ARITHMÉTIQUE ET RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Denis GARDES
IREM DIJON
denis.gardes@wanadoo.fr

Dominique BERNARD
IREM LYON
dominique.bernard@gmail.com

Résumé
Il s'agit dans cet atelier de montrer que l'arithmétique est un domaine des mathématiques où l'on peut privilégier l'apprentissage du raisonnement et ceci à tout niveau du secondaire. On présente la structure des différents raisonnements habituels en mathématiques. Chaque raisonnement sera accompagné d'exemples avec leur correction de niveau collège, de niveau seconde ou terminale mathématiques expertes. La solution proposée est une solution « experte » et n'est évidemment pas un attendu de la part des élèves. Elle a pour but d'éclairer l'enseignant sur la pertinence de l'exemple.

I - RÉSOLUTION D'UN PETIT AMUSE-BOUCHE

Nous avons commencé l'atelier en demandant de résoudre un exercice légèrement modifié des Olympiades Mathématiques 2008 et de dégager à chaque question le type de raisonnement mathématique utilisé.

Voici l'énoncé :

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

1. Proposer un nombre *digisible* à deux chiffres.

2. Déterminer tous les nombres *digisibles* à deux chiffres.

3. Déterminer le plus petit nombre *digisible* à quatre chiffres.

4. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

5. Soit n un entier *digisible* quelconque.

a. Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.

b. Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.

c. Déterminer le plus grand entier *digisible*.

Voici maintenant une solution de cet exercice. Nous avons écrit en italique les différents types de raisonnement que nous avons repérés.

1. Les nombres 12, 15, 24 et 48 sont *digisibles* par exemple.

Il s'agit de prouver une proposition existentielle. Il suffit d'exhiber un élément satisfaisant les conditions, peu importe la méthode pour le trouver.

2. On va raisonner selon les dizaines.

Si le chiffre des dizaines est 1, cela n'impose aucune condition sur le chiffre des unités puisque 1 divise tous les entiers. On examine un par un les entiers. On remarque alors que seuls 12 et 15 conviennent.
Si le chiffre des dizaines est 2, alors le nombre est divisible par 2. Le chiffre des unités est alors 4, 6 ou 8. Seul 24 convient.
Si le chiffre des dizaines est 3, alors le nombre est divisible par 3. Cela peut être : 36 et 39. Seul 36 convient.
Si le chiffre des dizaines est 4, alors le nombre est divisible par 4. Cela peut être : 48. 48 convient.
Si le chiffre des dizaines est 5, alors le nombre est divisible par 5. Il n'y a pas dans cette dizaine de nombre divisible par 5 ayant des chiffres distincts et non nuls.
Si le chiffre des dizaines est 6, alors le nombre est divisible par 6. Il n'y a pas dans cette dizaine de nombre divisible par 6 ayant des chiffres distincts et non nuls.
Si le chiffre des dizaines est 7, alors le nombre est divisible par 7. Il n'y a pas dans cette dizaine de nombre divisible par 7 ayant des chiffres distincts et non nuls.
Si le chiffre des dizaines est 8, alors le nombre est divisible par 8. Il n'y a pas dans cette dizaine de nombre divisible par 8 ayant des chiffres distincts et non nuls.
Si le chiffre des dizaines est 9, alors le nombre est divisible par 9. Il n'y a pas dans cette dizaine de nombre divisible par 9 ayant des chiffres distincts et non nuls.
Conclusion : l'ensemble des nombres *digisibles* à 2 chiffres est $\{12 ; 15 ; 24 ; 35 ; 48\}$.

On a effectué un raisonnement par disjonction des cas (selon le chiffre des dizaines). Dans chaque cas, un raisonnement par conditions nécessaires et suffisantes ou analyse-synthèse a été effectué.

3. Le plus petit nombre écrit avec quatre chiffres distincts est 1 234. Ce nombre ne convient pas car il n'est pas divisible par 4.
Le nombre suivant dans l'ordre croissant est 1 236 car il doit être divisible par 2 et 3. Ce nombre convient car il est divisible par 1, 2, 3 et 6.
Le nombre cherché est donc 1 236.

On a effectué un raisonnement par disjonction des cas, selon l'ordre croissant des nombres, qui s'est arrêté dès que l'on a trouvé un nombre qui convenait.

4. **a**. n s'écrit avec un 5, il est donc divisible par 5. Ainsi son chiffre des unités est soit 0, soit 5. Comme il ne peut pas être 0, il est donc égal à 5.
On a effectué un raisonnement direct par modus ponens pour démontrer une implication.

b. D'après la question précédente, n se termine par 5 est donc impair. Il ne contient que des chiffres impairs.
On a effectué un raisonnement direct par modus tollens avec l'implication : « Si n a au moins un chiffre pair alors il est divisible par 2 » ou ce qui est équivalent un raisonnement direct par modus ponens avec la contraposée « si n n'est pas divisible par 2, alors n a tous ses chiffres impairs ».

c. Tous les chiffres de n sont impairs et distincts. n a donc au plus 5 chiffres. On suppose que n est formé des 5 chiffres impairs : 1, 3, 5, 7 et 9. Il est donc divisible par 9 donc la somme de ses chiffres est divisible par 9. Or celle-ci est égale à 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 qui n'est pas divisible par 9. On aboutit à une contradiction. Donc le nombre n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

On a effectué un raisonnement par l'absurde : pour démontrer Q[a] : « Le nombre s'écrit avec au plus 4 chiffres », on a supposé NON Q[a] : « le nombre a s'écrit avec strictement plus de 4 chiffres » puis on a démontré que cela aboutissait à une contradiction, c'est-à-dire une proposition fausse « 25 est divisible par 9 » donc NON Q[a] est fausse, c'est-à-dire Q[a] est vraie.

d. D'après ce qui précède, le nombre cherché n s'écrit avec au plus 4 chiffres tous impairs et se termine par 5.

Pour essayer de trouver le plus grand, on commence avec 9 comme chiffre des milliers. Ainsi n commence par 9 et se termine par 5. Il reste à déterminer le chiffre des centaines et celui des dizaines. La somme S des quatre chiffres doit être divisible par 9. Or S est comprise entre 9 +7+3+5 = 24 et 9+1+3+5 = 18.

Elle est donc égale à 18. Les deux chiffres restants sont 3 et 1. On obtient deux valeurs de n : 9 315 et 9 135.

Le nombre 9 315 est divisible par 9, 3 et 5. Il est donc digisible et c'est le plus grand nombre digisible s'écrivant avec un 5.

On a commencé un raisonnement par disjonction des cas selon la valeur du chiffre des milliers vite interrompu puisqu'on a une solution dès le premier cas examiné. Dans l'examen de ce cas, on a effectué un raisonnement par analyse-synthèse. L'analyse a permis de restreindre deux possibilités pour le nombre cherché et la synthèse a permis de déterminer lequel de ces deux nombres convient.

5. a. Soit n un entier *digisible*. Le nombre s'écrit avec au plus neuf chiffres parmi {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}. Soit il contient le 5, il s'écrit avec aux plus quatre chiffres d'après la question **4.c.**
Soit il ne contient pas le 5, il s'écrit alors avec aux plus huit chiffres. S'il s'écrit avec les huit chiffres restants alors il contient le 9. La somme des huit chiffres est égale à 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40 et n'est pas divisible par 9.
Ceci prouve qu'un tel nombre n'est pas *digisible*. Le nombre *digisible* ne peut contenir les huit chiffres (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9). Il a donc au plus sept chiffres.

Plusieurs types de raisonnement s'enchevêtrent :

- *raisonnement par disjonction des cas : présence du chiffre 5 ou non*
- *raisonnement par condition nécessaire*

« si le nombre digisible contient le 5, alors il a au plus 4 chiffres » et « si le nombre digisible contient 9 alors il a au plus 7 chiffres ».

• *raisonnement par modus tollens utilisant l'implication*

« Si le nombre digisible contient 9 et a 8 chiffres, alors il est divisible par 9 » Il est intéressant de noter, qu'à ce stade de la résolution de l'exercice, « avoir au plus 7 chiffres » est une condition nécessaire pour l'existence d'un entier digisible, mais est-elle suffisante ?

b. Soit *n* un entier digisible s'écrivant avec sept chiffres dont 9.
D'après la question **4.c** il ne contient pas 5. Les six autres chiffres sont à prendre dans {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8}. Or 1+2+3+4+6+7+8+9 = 40 et pour obtenir un multiple de 9, la seule possibilité est d'enlever le chiffre 4. Les chiffres n sont : 1, 2, 3, 6, 7, 8 et 9.
Il s'agit ici d'obtenir une condition nécessaire obtenue par conditions nécessaires successives amenant à une seule possibilité.

c. D'après la question précédente, si *n* le nombre digisible cherché a 7 chiffres, ceux-ci sont à prendre dans {1, 2, 3, 6, 7, 8, 9}. Le nombre *n* a nécessairement un chiffre pair, il est donc divisible par 2, donc pair.
Pour trouver le plus grand, on peut commencer à chercher les nombres commençant par 9 876. Il reste les trois chiffres 1, 2 et 3 à placer. Comme *n* est pair, il n'y a que deux possibilités : 9 876 312 et 9 876 132. Or 9 876 312 n'est pas divisible par 7 et 9 876 132 n'est pas divisible par 8. Le nombre *n* ne commence pas par 9 876.
On cherche maintenant s'il peut commencer par 9 873. Il reste les trois chiffres 1, 2 et 6 à placer. Sachant que *n* est pair, il y a 4 possibilités : 9 873 126, 9 873 162, 9 873 216 et 9 873 612.
Or 9 873 126,9 873 162 et 9 876 3216 ne sont pas divisibles par 7 et 9 8763 612 n'est pas divisible par 8.
On cherche maintenant s'il peut commencer par 9 872. Il reste les trois chiffres 1, 3 et 6 à placer. Sachant que *n* est pair, il y a 2 possibilités : 9 872 316 et 9 872 136. Or ces deux nombres ne sont pas divisibles par 7.
On cherche maintenant s'il peut commencer par 9 871. Il reste les trois chiffres 2, 3 et 6 à placer. Sachant que *n* est pair, il y a 4 possibilités : 9 871 236, 9 871 326
9 871 362 et 9 871 632. Or ces quatre nombres ne sont pas divisibles par 7.
Le nombre *n* ne peut pas commencer par 987. On cherche maintenant s'il peut commencer par 9 867. Il reste les trois chiffres 1, 2 et 3. Sachant que *n* est pair, il y a 2 possibilités : 9 867 312 et 9 867 132. Or 9 867 312 est divisible par 1, 2, 3, 6, 7, 8 et 9. C'est le plus grand nombre digisible.

On a raisonné par disjonction des cas selon l'ordre décroissant des nombres cherchés et dans chaque cas on a effectué un raisonnement par analyse-synthèse.

Cet exercice est intéressant car il mobilise de nombreux types de raisonnement : *modus ponens*, *modus tollens*, raisonnement par l'absurde, raisonnement par disjonction des cas, raisonnement analyse-synthèse. D'autre part, il ne demande que très peu de connaissances mathématiques. Il se fonde surtout sur la numération décimale et sur les critères de divisibilité. On peut regretter que le raisonnement par équivalence et celui par récurrence n'aient pas été convoqués. Pour le raisonnement par équivalence, nous en reparlerons plus loin.

II - SPÉCIFICITÉ DE L'ARITHMÉTIQUE

1. Comme nous venons de le voir avec l'exemple d'introduction, beaucoup d'exercices ne demandent qu'un niveau de connaissances mathématiques assez faible. C'est un des rares domaines où l'on peut énoncer à des élèves des conjectures non encore démontrées. Nous pensons à la conjecture de Goldbach (tout nombre pair supérieur à 3 est somme de deux nombres premiers), à la conjecture d'Erdös-Straus (pour tout n entier naturel, on peut trouver trois entiers naturels a, b et c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, à la conjecture de Syracuse (la suite est définie de la manière suivante $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ si $u_n$est pair et u_{n+1}= $3u_n$ +1 si u_n est impair et la conjecture énonce qu'il existe toujours un rang pour lequel u_n = 1 quel que soit le premier terme choisi).

Sans aller jusqu'à proposer aux élèves des problèmes ouverts (au sens de la recherche mathématique), on peut proposer aux élèves un grand nombre d'exercices où l'énoncé est simple à comprendre, où l'élève peut s'engager rapidement dans une recherche et mobiliser des raisonnements variés. Ce n'est pas étonnant que l'on trouve beaucoup de tels exercices dans des énoncés de type rallye, olympiades. Évidemment, tous les exercices d'arithmétique n'ont pas ce statut, certains peuvent relever de connaissances très ardues !

2. Au niveau de l'enseignement secondaire, l'arithmétique demande de modifier les « réflexes » acquis notamment en algèbre et en analyse. Par exemple, la résolution d'une équation dans ℝ est très souvent très différente de la résolution dans ℕ. Le fait que ℕ soit un ensemble discret amène souvent à pouvoir traiter tous les cas « un par un ». Une équation à deux variables n'a souvent que peu de solutions dans ℕ alors qu'elle en a souvent une infinité dans ℝ.

Par exemple, résoudre dans ℕ* × ℕ* : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

Cette équation est équivalente à $(x - 2)(y - 2) = 4$.

Ainsi $x - 2$ et $y - 2$ sont des diviseurs de 4 différents de -2 (x et y étant non nuls).

Les diviseurs de 4 sont : −4,−2,−1, 1, 2 et 4.

On obtient 6 systèmes à résoudre. Trois seulement donnent une solution avec des entiers naturels non nuls.

Les solutions sont : (3 ; 6), (4 ; 4) et (6 ; 3).

Si on résout dans ℝ* × ℝ*.

L'équation est équivalente à $y = \frac{2x}{x-2}$ avec $x \neq 2$.

Il y a alors une infinité de couples solutions $\left(x ; \frac{2x}{x-2} \right)$ avec $x \in \mathbb{R}\setminus\{0 ; 2\}$.

3. Le raisonnement par récurrence est très fréquent. Ceci n'est pas étonnant, l'axiome de récurrence est un des axiomes de la définition de ℕ comme ensemble des entiers naturels.

Le raisonnement par descente infinie de Fermat est aussi utilisé. Il s'appuie sur le principe dit de descente infinie de Fermat « il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'entiers naturels». Ce principe est équivalent à l'axiome de bon ordre « toute partie non vide de ℕ admet un plus petit élément ». Dans ℕ, l'axiome de récurrence et l'axiome de bon ordre sont équivalents.

4. Le raisonnement par analyse-synthèse est très fréquent. Ceci s'explique car peu de résultats sont énoncés sous forme d'équivalence en arithmétique. Par exemple, le théorème de Gauss est une implication et non une équivalence. De même l'implication « pour tous entiers a, b et c, si a divise b et c alors a divise b + c » ne peut pas s'énoncer sous la forme d'une équivalence. Ceci amène à déterminer, lors de résolution de problèmes, à des conditions nécessaires. Ces dernières doivent être étudiées pour obtenir des conditions suffisantes.

5. Le raisonnement par disjonction des cas est très souvent employé. En effet, discuter suivant la parité, suivant le reste de la division euclidienne d'un entier naturel est une pratique très courante en arithmétique.

6. Enfin, le principe des tiroirs de Dirichlet « Si m+1 objets ou plus sont rangés dans m tiroirs, alors il y aura au moins un tiroir qui contient deux objets ou plus » peut être un principe pertinent dans certains problèmes d'arithmétique.

III - RAISONNEMENT DIRECT : *MODUS PONENS ET MODUS TOLLENS*

Le *modus ponens* est la règle la plus couramment utilisée dans les raisonnements. Elle est directement liée à l'implication et à ses valeurs de vérité.
Elle s'écrit :
en logique des propositions :

$$\left.\begin{array}{l}(P \Longrightarrow Q) \text{ Vraie} \\ P \text{ Vraie}\end{array}\right\} \text{DONC } Q \text{ Vraie.}$$

en logique des prédicats :

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \ (P[x] \Longrightarrow Q[x]) \text{ Vraie} \\ P[a] \text{ Vraie}\end{array}\right\} \text{DONC } Q[a] \text{ Vraie.}$$

Une autre règle de raisonnement liée à l'implication est celle appelée *modus tollens* :

$$\left.\begin{array}{l}(P \Longrightarrow Q) \text{ Vraie} \\ Q \text{ Fausse}\end{array}\right\} \text{DONC } P \text{ Fausse.}$$

en logique des prédicats :

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \ (P[x] \Longrightarrow Q[x]) \text{ Vraie} \\ Q[a] \text{ Fausse}\end{array}\right\} \text{DONC } P[a] \text{ Fausse.}$$

Ces deux règles s'observent aisément grâce à la table de vérité de l'implication :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Nous ne donnerons pas d'exemples d'exercices où on applique la règle du *modus ponens* car celle-ci est la plus fréquemment employée. En revanche, la règle du *modus tollens* est rarement énoncée. L'habitude scolaire actuelle veut que l'on utilise plutôt la règle du *modus ponens* avec la contraposée de l'implication ou alors qu'on utilise un raisonnement par l'absurde. Nous donnons les trois exemples suivants :

Exercice Col1

Démontrer que $\sqrt{2}^2 \neq 1{,}414$.

Solution

On a $\sqrt{2}^2 = 2$ et $1{,}414^2 = 1{,}999396$.

Comme $\sqrt{2}^2 \neq 1{,}414^2$, on en déduit que $\sqrt{2} \neq 1{,}414$.

Remarque

On utilise le *modus tollens* avec l'implication : $\forall\ (a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2 \quad a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$.
Cette règle permet d'éviter un raisonnement par l'absurde ou d'avoir recours à la notion de contraposée.

Exercice Sec1

Démontrer que la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ n'admet pas de points à coordonnées entières.

Solution

Soit $M\ (x\ ;\ y)$ un point à coordonnées entières de la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$.
Une équation équivalente de $(\mathscr{D})$ est $8y = 6x + 1$.
Pour x et y, entiers, $8y$ est pair et $6x + 1$ est impair. Ainsi est $8y \neq 6x + 1$.
On en déduit qu'il n'existe pas de points à coordonnées entières sur la droite $(\mathscr{D})$.

Remarque

On utilise le *modus tollens* avec l'implication :
$\forall\ (x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2 \quad M\ (x\ ;\ y) \in (\mathscr{D}) \Longrightarrow (8y = 6x + 1)$.
Là encore, cette règle permet d'éviter un raisonnement par l'absurde.

Exercice Exp1

Démontrer que la somme de cinq carrés d'entiers consécutifs n'est jamais un carré d'entier.

Solution

On note les cinq entiers consécutifs $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$ et $n + 2$ avec $n \geq 2$.
La somme $(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2$ est égale à $5(n^2 + 2)$.
Pour que $5(n^2 + 2)$ soit un carré parfait, il est nécessaire que $n^2 + 2$ soit divisible par 5 puisque l'exposant de 5 dans un carré parfait est pair.
On examine la congruence modulo 5 de $n^2 + 2$.
Ainsi on obtient le tableau de congruence modulo 5 :

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	4	1
n^2+2	2	3	1	1	3

On peut remarquer que $n^2 + 2$ n'est jamais divisible par 5.
On en déduit que $5(n^2 + 2)$ n'est pas un carré parfait.

Remarque

On utilise le modus tollens avec l'implication : « pour tout entier n, si $5(n^2 + 2)$ est un carré parfait, alors $n^2 + 2$ est divisible par 5 ».

IV - RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DES CAS

Le raisonnement par disjonction des cas s'utilise principalement pour démontrer la vérité d'une proposition universelle que l'on note : $\forall x \in E \quad P[x]$.

Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'ensembles telles que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$.

Le raisonnement par disjonction des cas consiste à démontrer successivement les propositions universelles suivantes : pour i de 1 à n, $\forall x \in E_i \quad P[x]$.

Formellement, il peut s'écrire :

$$\text{SI} \begin{cases} E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \ \forall x \in E_i \ P[x] \end{cases} \qquad \text{ALORS } \forall x \in E \ P[x].$$

Il n'est pas nécessaire que la famille $(E_i)_{(1 \leq i \leq n)}$ soit une partition même si c'est souvent le cas dans les exemples d'application. La notion de recouvrement suffit.

Exercice Col2

Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

<u>Solution</u>

On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre décimal.

Comme $1 < \sqrt{2} < 2$, $\sqrt{2}$ n'est pas entier. Soit a la dernière décimale non nulle de $\sqrt{2}$. On examine la dernière décimale de $\sqrt{2}^2 = 2$ selon les différentes valeurs de a.

Si $a = 1$ alors la dernière décimale non nulle de $\sqrt{2}^2$ est 1.

Si $a = 2$ alors la dernière décimale non nulle de $\sqrt{2}^2$ est 4.

Si $a = 3$ alors la dernière décimale non nulle de $\sqrt{2}^2$ est 9.

Si $a = 4$ alors la dernière décimale non nulle de $\sqrt{2}^2$ est 6.

Si $a = 5$ alors la dernière décimale non nulle de $\sqrt{2}^2$ est 5.

Si $a = 6$ alors la dernière décimale non nulle de $\sqrt{2}^2$ est 6.

Si $a =7$ alors la dernière décimale non nulle de $\sqrt{2}^2$ est 9.

Si $a = 8$ alors la dernière décimale non nulle de $\sqrt{2}^2$ est 4.

Si $a = 9$ alors la dernière décimale non nulle de $\sqrt{2}^2$ est 1.

On remarque que $\sqrt{2}^2$ aurait une décimale non nulle. Ceci est faux puisque 2 est un entier. Ainsi l'hypothèse formulée « $\sqrt{2}$ est un nombre décimal » est fausse.

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

<u>Remarque</u>

Le raisonnement par disjonction des cas (selon la dernière décimale non nulle de $\sqrt{2}$) se trouve à l'intérieur d'un raisonnement par l'absurde.

Exercice Sec2

Démontrer que pour tout entier naturel n, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

Solution

On raisonne selon le reste de la division euclidienne de n par 3. Il y a donc trois cas à traiter selon que ce reste r est nul, égal à 1 ou à 2.

Premier cas : $r = 0$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k$.

Ainsi $n(n^2 + 5) = 3k(n^2 + 5)$. Or $k(n^2 + 5)$ est un entier. Donc, dans ce cas, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

Deuxième cas : $r = 1$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k + 1$.

Ainsi $n(n^2 +5) = (3k +1)((3k +1)^2 +5) = (3k +1)(9k^2 +6k +6) = 3(3k +1)(3k^2 +2k +2)$.

Or $(3k + 1)(3k^2 + 2k + 2)$ est un entier. Donc, dans ce cas, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

Troisième cas : $r = 2$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k + 2$.

Ainsi $n(n^2 +5) = (3k +2)((3k +2)^2 +5) = (3k +2)(9k^2 +12k +9) = 3(3k +2)(3k^2 +4k +3)$.

Or $(3k + 2)(3k^2 + 4k + 3)$ est un entier. Donc, dans ce cas, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3. On a bien démontré que, pour tout n entier naturel, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

Remarque

On a utilisé la partition suivante de $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}$ est la réunion de l'ensemble des entiers divisibles par 3, de l'ensemble des entiers dont le reste par la division euclidienne par 3 est 1 et de l'ensemble des entiers dont le reste de la division euclidienne par 3 est 2.

Exercice Exp2

Démontrer que pour tout couple $(a ; b)$ d'entiers naturels, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.

Solution

On va effectuer un raisonnement par disjonction de cas, selon les congruences des nombres a et b modulo 7.

On examine, selon les congruences de a modulo 7, les congruences de a^2.

On obtient le tableau suivant :

a	0	1	2	3	4	5	6
a^2	0	1	4	2	2	4	1

Les congruences du carré d'un entier modulo 7 sont au nombre de quatre : 0, 1, 2 et 4.

On écrit les seize résultats modulo 7 de $a^2 + b^2$ dans le tableau suivant :

	$a^2 \equiv 0$	$a^2 \equiv 1$	$a^2 \equiv 2$	$a^2 \equiv 4$
$b^2 \equiv 0$	0	1	2	4
$b^2 \equiv 1$	1	2	3	4
$b^2 \equiv 2$	2	3	4	6
$b^2 \equiv 4$	4	5	6	1

Il n'y a qu'un seul cas où $a^2 + b^2$ est divisible par 7. C'est le cas où a^2 et b^2 sont tous les deux congrus à 0 modulo 7. Or, d'après le premier tableau, a^2 est divisible par 7 si et seulement si a est divisible par 7.
Ainsi, on a démontré que, pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.

Remarque

La disjonction des cas porte sur le reste de la division euclidienne des entiers par 7. Cette disjonction est très courante en arithmétique, elle permet de se ramener à un nombre fini de cas que l'on traite un par un.
On peut aussi remarquer que l'on a démontré l'équivalence pour tout couple (a ; b) d'entiers naturels entre « 7 divise $a^2 + b^2$ » et « a divise 7 et b divise 7 ».

V - RAISONNEMENT PAR CONTRAPOSITION

On sait que l'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à NON $Q \Rightarrow$ NON P .

Ce raisonnement ne s'applique que quand on veut démontrer une implication puisque l'on remplace l'implication à démontrer par une implication qui lui est équivalente.
On privilégie ce raisonnement quand les propositions P et Q sont difficiles à écrire et que leurs négations sont simples à énoncer.
Il ne faut pas confondre ce raisonnement avec le raisonnement que certains auteurs nomment « raisonnement par contraposée » qui est un raisonnement de type *modus ponens* avec la contraposée d'une implication. Par exemple, dans l'exemple **Col1**, on peut utiliser la contraposée de l'implication « $\forall(a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2\ \ a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ » pour conclure que $\sqrt{2}$ est différent de 1,414.

Exercice Col3

Démontrer que pour tout entier naturel n, si n^2 est pair alors n est pair.

Solution

On demande de démontrer l'implication : pour tout n entier naturel, si n^2 est pair alors n est pair.
La contraposée de cette implication est : pour tout n entier naturel, si n est impair, alors n^2 est impair.
Soit n un entier naturel impair. Il existe k entier naturel tel que $n = 2k +1$.
Ainsi $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k +1 = 2k' +1$ avec $k' = 2k^2 + 2k$ entier naturel. Donc n^2 est impair.
La contraposée est démontrée, donc pour tout n entier naturel, si n^2 est pair alors n est pair.

Remarque

La négation de « n est pair » est « n est impair ». Il est plus simple de traduire « n est impair » que de traduire et d'exploiter « n^2 est pair ». Ceci donne des indices pour tenter de démontrer la contraposée.

Exercice Col3bis

Démontrer que pour tout entier naturel, si $n^2 - 1$ est divisible par 8, alors n est impair.

Solution

On demande de démontrer l'implication : pour tout n entier naturel, si $n^2 -1$ est divisible par 8 alors n est impair.
La contraposée de cette implication est : pour tout n entier naturel, si n est pair, alors $n^2 -1$ n'est pas divisible par 8.
Soit n un entier naturel pair. Il existe k entier naturel tel que $n = 2k$.
Ainsi $n^2 - 1 = 4k^2 - 1 = 2(2k^2) - 1$ et $n^2 - 1$ est impair. $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 2, *a fortiori* par 8.

La contraposée est démontrée, donc pour tout n entier naturel, si $n^2 - 1$ est divisible par 8 alors n est impair.

Remarque

On peut faire la même remarque que pour l'exercice précédent. Il semble difficile d'exploiter la proposition « $n^2 - 1$ est divisible par 8 ».

Exercice Sec3

Démontrer que pour tous entiers naturels a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, si $a_1 + a_2 + ... + a_8 + a_9 = 90$ alors il existe au-moins trois entiers dans $\{a_1 ; a_2 ; ... ; a_8 ; a_9\}$ dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Solution

On demande de démontrer l'implication : pour tous $a_1, a_2, ..., a_9$ entiers naturels, si $a_1 + a_2 + ... + a_9 = 90$ alors il existe au moins trois entiers dans $a_1 ; a_2 ; ... ; a_8 ; a_9$ dont la somme est supérieure ou égale à 30.

La contraposée de cette implication est : pour tous $a_1, a_2, ..., a_9$ entiers naturels, si la somme de trois entiers quelconques de $\{a_1 ; a_2 ; ... ; a_8 ; a_9\}$ est strictement inférieure à 30 alors $a_1 + a_2 + ... + a_9 = 90$.

Ainsi $a_1 + a_2 + a_3 < 30$, de même $a_4 + a_5 + a_6 < 30$ et $a_7 + a_8 + a_9 < 30$. En ajoutant ces trois inégalités, on obtient $a_1 + a_2 + ... + a_9 < 30 + 30 + 30$ soit $a_1 + a_2 + ... + a_9 < 90$. La contraposée est démontrée, donc pour tout $a_1, a_2, ..., a_9$ entiers naturels, si $a_1 + a_2 +... + a_9 = 90$ alors il existe au-moins trois entiers dans $\{a_1 ; a_2 ; ... ; a_8 ; a_9\}$ dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Remarque

La négation de la proposition « il existe au moins trois entiers dans $\{a_1 ; a_2 ; ... ; a_8 ; a_9\}$ dont la somme est supérieure ou égale à 30 » est « la somme de trois entiers quelconques de $\{a_1 ; a_2 ; ... ; a_8 ; a_9\}$ est strictement inférieure à 30 ». On peut remarquer la transformation du quantificateur quand on énonce la négation.

Exercice Exp3

Démontrer que pour tout $(x ; y ; z) \in \mathbb{N}^3$, si 9 divise $x^3 + y^3 + z^3$ alors 3 divise x ou 3 divise y ou 3 divise z.

Solution

On demande de démontrer l'implication : pour tout $(x ; y ; z) \in \mathbb{N}^3$, si 9 divise $x^3 + y^3 + z^3$ alors 3 divise x ou 3 divise y ou 3 divise z.

La contraposée de cette implication s'écrit : pour tout $(x ; y ; z) \in \mathbb{N}^3$, si 3 ne divise ni x, ni y, ni z, alors 9 ne divise pas $x^3 + y^3 + z^3$.

On examine les congruences de x^3 modulo 9 suivant les congruences de x modulo 3.

Si $x \equiv 1\ (3)$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 3k + 1$. Ainsi $x^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 \equiv 1\ (9)$.

Si $x \equiv 2\ (3)$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 3k + 2$. Ainsi $x^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 \equiv 8\ (9)$.

Ainsi x^3 ou y^3 ou z^3 ne peuvent avoir que deux restes modulo 9.

Donc pour $x^3 + y^3 + z^3$ on obtient au maximum 8 résultats possibles.

On peut les déterminer grâce au tableau suivant :

x^3	y^3	z^3	$x^3+y^3+z^3$
1	1	1	3
1	1	8	1
1	8	1	1
1	8	8	8
8	1	1	1
8	1	8	8
8	8	1	8
8	8	8	6

Ainsi $x^3 + y^3 + z^3$ n'est jamais divisible par 9.
La contraposée est démontrée et on a bien démontré que pour tout triplet $(x ; y ; z)$ d'entiers, si 9 divise $x^3 + y^3 + z^3$ alors au moins l'un des trois nombres x, y ou z est divisible par 3.

Remarque
La négation de la proposition « 3 divise x ou 3 divise y ou 3 divise z » s'écrit simplement « 3 ne divise ni x, ni y, ni z », ce qui rend possible de démontrer la contraposée.
Un raisonnement direct par disjonction des cas est possible. Il suffit d'envisager les 729 cas possibles de reste de la division euclidienne de x, y et z par 9 et d'examiner les cas où $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9. Ce raisonnement est nettement plus long !

VI - RAISONNEMENT PAR ÉQUIVALENCES

Le raisonnement par équivalences s'emploie principalement dans deux cas :

1- pour démontrer une proposition P, ce raisonnement consiste à déterminer une suite finie de propositions P_i avec i variant de 1 à n telles que et $P_1 = P$, que P_i est équivalente à P_{i+1} et que P_n est manifestement vraie ;

2- pour résoudre une équation ou une inéquation sur un ensemble D, ce raisonnement consiste à transformer successivement une équation en une équation équivalente (c'est-à-dire qui a le même ensemble de solutions) et aboutir à une équation de la forme $x \in A$ où A est un sous-ensemble de D.
Comme nous l'avons évoqué plus haut, le raisonnement par équivalences est assez rare en arithmétique. Il peut être utilisé avec les critères de divisibilité, avec les diviseurs d'un nombre entier... En effet, les critères sont des équivalences et les diviseurs d'un entier sont complètement connus.

Exercice Col4
Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9. On considère le nombre N écrit en base 10 par $\overline{3a7b}$.
Déterminer a et b pour que N soit divisible par 9 et par 5.

Solution
On a les équivalences suivantes pour tous a et b :
N divisible par 9 et par 5 $\Leftrightarrow$ 3+ a + 7+ b divisible par 9 et (b = 0 ou b = 5)
$\Leftrightarrow$ $a + b$ +1 divisible par 9 et (b = 0 ou b = 5)
$\Leftrightarrow$ ($a + b = 8$ ou $a + b = 17$) et (b = 0 ou b = 5)
car $a + b$ est compris entre 0 et 18 (a et b représentent des chiffres)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=8 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} b=0 \\ a=17 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} b=5 \\ a=3 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} b=5 \\ a=12 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=8 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} b=5 \\ a=3 \end{cases}$$

car a et b représentent des chiffres, ils sont compris entre 0 et 9.

$\Longleftrightarrow N = 3870$ ou $N = 3375$

Il y a exactement deux nombres N qui sont divisibles par 9 et par 5 : 3 870 et 3 375.

Remarque
Le raisonnement par équivalence a été possible car les critères de divisibilité sont des équivalences. Il est donc ici inutile de vérifier.

Exercice Sec4
Déterminer les entiers naturels n tels que $\frac{3n+2}{n+4}$ soit entier.

Solution
On a les équivalences suivantes pour tout entier naturel n :

$\frac{3n+2}{n+4}$ entier $\Longleftrightarrow \frac{3n+12-10}{n+4}$ entier

$\Longleftrightarrow 3 - \frac{10}{n+4}$ entier

$\Longleftrightarrow \frac{10}{n+4}$ entier

$\Longleftrightarrow n + 4$ divise 10

$\Longleftrightarrow$ ($n + 4 = -10$ ou $n + 4 = -5$ ou $n + 4 = -2$ ou $n + 4 = -1$ ou $n + 4 = 1$ ou $n + 4 = 2$

ou $n + 4 = 5$ ou $n + 4 = 10$)

$\Longleftrightarrow$ ($n = -14$ ou $n = -9$ ou $n = -6$ ou $n = -5$ ou $n = -3$ ou $n = -2$ ou $n = 1$ ou $n = 6$)

$\Longleftrightarrow$ ($n = 1$ ou $n = 6$ car n est entier naturel)

Il existe exactement deux valeurs de n qui rendent $\frac{3n+2}{n+4}$ entier : 1 et 6.

Remarque
Le raisonnement par équivalence a été possible car les transformations algébriques sont des équivalences et que l'on connaît exactement les diviseurs de 10.

Exercice Exp4
Résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}^2$: $x^2 - y^2 = 7$.

Solution
On a les équivalences suivantes pour tous x et y :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = 7 &\iff (x-y)(x+y) = 7 \\ &\iff \begin{cases} x-y=-7 \\ x+y=-1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-7 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=7 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x-y=7 \\ x+y=1 \end{cases} \\ &\iff (x\ ;\ y) = (-4\ ;\ 3) \text{ ou } (x\ ;\ y) = (-4\ ;\ -3) \text{ ou } (x\ ;\ y) = (4\ ;\ 3) \\ &\quad\ \text{ou } (x\ ;\ y) = (4\ ;\ -3) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{(-4\ ;3)\ ;(-4\ ;-3)\ ;(4\ ;3)\ ;(4\ ;-3)\}$.

Remarque

Le raisonnement par équivalence a été possible car les transformations algébriques sont des équivalences et que l'on connaît exactement les diviseurs de 7.

VII – RAISONNEMENT PAR ANALYSE- SYNTHÈSE

Ce raisonnement comporte deux étapes : l'analyse puis la synthèse.

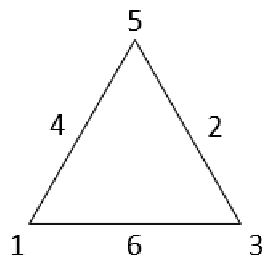
Dans la partie analyse, on suppose l'existence d'au moins une solution au problème et l'on cherche des conditions nécessaires sur cette solution. On en déduit le maximum d'informations permettant de construire ou de réduire l'ensemble des solutions candidates. Dans la partie synthèse, on examine si les conditions nécessaires obtenues dans la partie analyse sont suffisantes. On reporte dans le problème la ou les solutions candidates trouvées précédemment pour vérifier qu'elles sont bien solutions au problème. On obtient alors un ensemble (éventuellement vide) contenant les solutions au problème posé. Cette étape assure l'existence ou non de solutions et parfois l'unicité.

On peut remarquer que les domaines où ce raisonnement est pertinent se raréfient au cours des changements de programmes. Il était très employé dans la recherche d'ensembles de points (lieux géométriques), de constructions en géométrie. Ces problèmes ont disparu. L'arithmétique est aussi un domaine où ce raisonnement est fréquent. Comme nous l'avons dit plus haut, rares sont les situations en arithmétique où l'on peut raisonner par équivalences. Ainsi le raisonnement par analyse-synthèse prend toute sa place et son importance.

Exercice Col5

Les entiers de 1 à 6 sont placés aux sommets et sur les côtés d'un triangle.

La figure ci-dessous donne un exemple de placement des entiers.



On s'intéresse au placement des entiers tel que les sommes des trois entiers de chaque côté soient égales.

Déterminer, s'il existe, le placement donnant la somme minimale.

Même question en considérant un carré avec les entiers de 1 à 8.

Solution pour un triangle

On va effectuer un raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse

On note S la somme égale sur chaque côté. Ainsi $3S$ correspond à la somme des 6 premiers entiers et des trois nombres aux sommets.

Donc $3S$ est inférieure ou égale à $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + (4 + 5 + 6)$ c'est-à-dire à 36 et est supérieure ou égale à $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + (1 + 2 + 3)$ c'est-à-dire à 27.

D'où S est inférieure ou égale à 12 et est supérieure ou égale à 9.

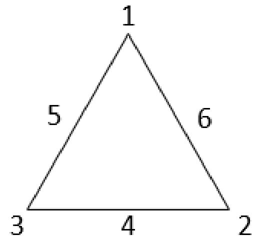
S prend ses valeurs dans l'ensemble $\{9 ; 10 ; 11 ; 12\}$.

Le minimum de S est donc supérieur ou égal à 9.

Synthèse

On vérifie que $S = 9$ est bien possible.

La configuration suivante le prouve :



Conclusion

La somme minimale cherchée est égale à 9 avec un placement possible (voir ci-dessus).

Solution pour un carré

On va effectuer un raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse

On note S la somme égale sur chaque côté. Ainsi $4S$ correspond à la somme des 8 premiers entiers et des quatre nombres aux sommets.

Donc $4S$ est inférieure ou égale à $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + (5 + 6 + 7 + 8)$ c'est-à-dire à 62 et est supérieure ou égale à $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + (1 + 2 + 3 + 4)$ c'est-à-dire à 46.

D'où S est inférieure ou égale à 15 et est supérieure ou égale à 12 (S est un entier).

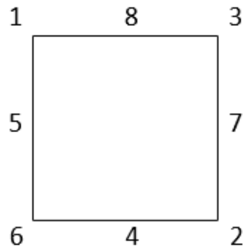
S prend ses valeurs dans l'ensemble $\{12; 13 ; 14 ; 15\}$.

Le minimum de S est donc supérieur ou égal à 12.

Synthèse

On vérifie que $S = 12$ est bien possible.

La configuration suivante le prouve :



Conclusion

La somme minimale cherchée est égale à 12 avec un placement possible (voir ci-dessus).

Remarque

L'analyse a consisté à déterminer un encadrement (en réalité un minorant aurait suffi) de la somme considérée et la synthèse a consisté à vérifier que ce minorant convenait. La difficulté, pour le cas du carré, a été de trouver la bonne configuration des nombres à placer.
On peut prolonger cet exercice, soit en changeant les nombres à placer, soit en travaillant avec un pentagone, un hexagone ... Certaines situations sont intéressantes car le minorant obtenu dans l'analyse ne convient pas. Cela permet de bien appréhender la notion de *condition nécessaire* et de *condition suffisante*.

Exercice Sec5

Déterminer tous les triplets (a ; b ; c) d'entiers naturels non nuls tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Solution
On va effectuer un raisonnement par *analyse-synthèse.*

Analyse
On note a, b et c les entiers cherchés, *nécessairement* non nuls avec $1 \leq a \leq b \leq c$.
Puisque $a \leq b \leq c$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$ (fonction inverse décroissante sur [1 ; +∞ [), d'où $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{3}{a}$
et donc $1 \leq \frac{3}{a}$ ce qui implique $a \leq 3$.

Raisonnons par disjonction des cas : $a = 1$ ou $a = 2$ ou $a = 3$.
• Supposons $a = 1$. Ainsi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ équivaut à $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ ce qui est sans solution.
D'où $a \geq 2$.
• Supposons $a = 2$. Ainsi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ équivaut à $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$. Or $2 \leq b \leq c$, d'où $\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{2}{b}$ c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{b}$, ce qui implique $b \leq 4$. Donc si $a = 2$, *nécessairement* $b \in \{2 ; 3; 4\}$. Nous pouvons chercher les solutions possibles :
si $a = 2$ et $b = 2$ alors $\frac{1}{c}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ ce qui est impossible,
si $a = 2$ et $b = 3$ alors $\frac{1}{c}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ d'où $c = 6$ et cette valeur convient car $a \leq b \leq c$.
si $a = 2$ et $b = 4$ alors $\frac{1}{c}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ d'où $c = 4$ et cette valeur convient car $a \leq b \leq c$.

• Supposons $a = 3$ alors $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ équivaut à $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}$. Or $b \leq c$ d'où $\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{2}{b}$ c'est-à-dire $\frac{2}{3} \leq \frac{2}{b}$.
D'où *nécessairement* $b \leq 3$ et comme $a = 3 \leq b \leq 3$, la seule valeur possible pour b est 3.
Si $a = 3$ et $b = 3$ alors $\frac{1}{c}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, d'où $c = 3$ et cette valeur convient.
Le problème admet trois triplets candidats-solutions : (2 ; 3 ; 6) , (2 ; 4 ; 4) et (3 ; 3 ; 3).

Synthèse
La synthèse est immédiate car $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ et $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$.
Conclusion

Le problème admet exactement trois triplets solutions : (2 ; 3 ; 6) , (2 ; 4 ; 4) et (3 ; 3 ; 3).

Remarque
L'analyse a permis d'obtenir une condition nécessaire : « $a \leq 3$ ». Ensuite, un raisonnement par disjonction des cas a permis d'obtenir trois triplets candidats. Grâce à la synthèse, ces trois triplets conviennent et sont donc les solutions au problème.
Comme dans la plupart du temps, la synthèse est très simple. Il suffit de vérifier que les valeurs trouvées dans l'analyse conviennent ou non.

Exercice Exp5
Déterminer les entiers naturels N tels que les 10 chiffres de 0 à 9 soient nécessaires une fois et une seule pour écrire N^3 et N^4 (le chiffre 0 ne pouvant pas être en premier dans l'écriture décimale).

Solution
On va effectuer un raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse
On examine le nombre de chiffres possibles pour l'écriture de N .
Si N a un chiffre, alors N^3 a au plus 3 chiffres et N^4 a au plus 4 chiffres car $9^3 = 729$ et $9^4 = 6\,561$. Cela donne un total au maximum de 7 chiffres pour écrire N^3 et N^4. Ce n'est donc pas possible.

Si N a deux chiffres, alors N^3 a au moins 4 chiffres et au plus 6 chiffres et N^4 a au moins 5 chiffres et au plus 8 chiffres car $10^3 = 1\,000$, $98^3 = 941\,192$, $10^4 = 10\,000$ et $98^4 = 92\,236\,816$. Ce cas est *a priori* possible avec N^3 à 4 chiffres et N^4 à 6 chiffres. Le cas où N^3 et N^4 ont chacun 5 chiffres est impossible : si $N^4 \leq 99\,999$ alors $N \leq 17$ et 17^3 a strictement moins de 5 chiffres.

Si N a 3 chiffres ou plus, alors N^3 a au moins 7 chiffres car $102^3 = 1\,061\,208$. Il ne reste plus assez de chiffres pour écrire N^4.

Le seul cas possible est donc N^3 avec 4 chiffres et N^4 avec 6 chiffres.

On a : $\sqrt[3]{1\,023} \simeq 10{,}1$ et $\sqrt[3]{9\,876} \simeq 21{,}4$ et $\sqrt[4]{102\,345} \simeq 17{,}9$ et $\sqrt[5]{987\,654} \simeq 31{,}5$ (toutes les valeurs approchées sont données à 10^{-1} près).

Il ne reste que 4 cas possibles pour N : 18, 19, 20 et 21.

Synthèse
Si $N = 18$ alors $N^3 = 5\,832$ et $N^4 = 104\,976$, ce cas convient.
Si $N = 19$ alors $N^3 = 6\,859$ et $N^4 = 130\,321$, ce cas ne convient pas (deux fois le chiffre 1 par exemple).
Si $N = 20$, alors N^3 nécessite au moins deux chiffres 0. Ce cas ne convient pas.
Si $N = 21$, alors $N^3 = 9\,261$ et $N^4 = 130\,321$, ce cas ne convient pas (trois fois le chiffre 1 par exemple).

Conclusion Il n'existe qu'un seul entier naturel N tel que les 10 chiffres de 0 à 9 soient nécessaires une fois et une seule pour écrire N^3 et N^4 : le nombre 18.

Remarque
L'analyse a permis de réduire les possibilités pour N au nombre de quatre et la synthèse a permis de prouver qu'une seule possibilité sur les quatre était validée. Cet exemple montre que la synthèse est une étape indispensable, sans elle, on aurait donné quatre « solutions ».

VIII – RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Le raisonnement par l'absurde consiste à démontrer la vérité d'une proposition P en prouvant que sa négation entraîne la vérité d'une proposition que l'on sait fausse, ou la vérité d'une proposition et de sa négation.

On peut distinguer deux schémas avec la structure suivante :

Schéma 1 : ((NON P) $\Longrightarrow R$) vraie ET R fausse

Schéma 2 : [(NON P) $\Longrightarrow$(R ET (NON R))] vraie.

D'après la règle du *modus tollens* si l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie et si Q est fausse, alors P est fausse.

Dans le schéma 1 : ((NON P) $\Longrightarrow R$) vraie ET R fausse.

La proposition R est fausse et l'implication ((NON P) $\Longrightarrow R$) est vraie. Donc la proposition (NON P) est fausse, donc P est vraie.

Dans le schéma 2 : [(NON P) $\Longrightarrow$ (R ET (NON R))] vraie.

L'implication est vraie mais la proposition (R ET (NON R)) est fausse quelle que soit la proposition R (principe de non-contradiction). Donc la proposition (NON P) est fausse, donc P est vraie.

Les deux schémas diffèrent par la nature de la contradiction :

Dans le premier schéma, on sait par ailleurs que R est fausse alors que dans le deuxième schéma, (R ET NON R)) est fausse quelle que soit la proposition R.

Nous explicitons le cas où la proposition à démontrer est une implication. La proposition P devient $P \Longrightarrow Q$. Nous obtenons alors les deux schémas suivants où R est une proposition :

Schéma 1bis : [(P ET NON(Q)) $\Longrightarrow R$] vraie et R fausse

Schéma 2bis : [(P ET NON(Q)) $\Longrightarrow$ (R ET NON R)] vraie

Nous ne donnerons des exemples des schémas 1bis et 2bis qu'au niveau Terminale Maths Expertes. En effet, pour bien comprendre ces cas, il est nécessaire de savoir nier une implication, tâche que l'on ne peut demander au collège, ni même en classe de seconde. Les cas 2 et 2bis se rencontrent très souvent quand la proposition NON P est la conjonction de deux propositions NON P_1 et NON P_2 et on démontre que NON P implique P_2 et évidemment NON P_2.

Exercice Col6

Démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

<u>Solution</u>

On effectue un raisonnement par l'absurde.

On suppose que $\frac{1}{3}$ est un décimal. Il existe donc un entier relatif a et un entier naturel n tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.

On en déduit que $3a = 10^n$. Ainsi 3 divise 10^n. Or la somme des chiffres de 10^n est 1, donc 10^n n'est pas divisible par 3.

On en déduit que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

<u>Remarque</u>

La proposition à démontrer est une proposition élémentaire et celle-ci est formulée de manière négative (« ne pas être décimal »), donc sa négation est simple à énoncer. Ceci permet une compréhension plus aisée du raisonnement par l'absurde.

D'autre part, nous sommes dans le cas (1) avec la proposition P « $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal » et la proposition R « 10^n divisible par 3. ».

Exercice Sec6

Démontrer que 111 111 111 111 n'est pas un carré parfait.

Solution

On effectue un raisonnement par l'absurde.
On suppose que 111 111 111 111 est un carré parfait.
Ainsi $9 \times 111\,111\,111\,111 = 999\,999\,999\,999$ est aussi un carré parfait. Or $999\,999\,999\,999 = 10^{12} - 1$ et 10^{12} est un carré parfait. Ceci est absurde car 0 et 1 sont les deux seuls carrés parfaits qui diffèrent de 1.
Donc 111 111 111 111 n'est pas un carré parfait.

Remarque

Même remarque que pour l'exercice précédent. La négation de la proposition est simple à énoncer : « être un carré parfait ». La difficulté de l'exercice réside dans l'idée de multiplier par 9.
Ce n'est pas la seule démonstration possible. On peut remarquer que 111 111 111 111 est divisible par 3 et n'est pas divisible par 9.
D'autre part, nous sommes dans le cas schéma 1 avec la proposition P « 111 111 111 111 n'est pas un carré parfait » et la proposition R « $10^{12} - 1$ et 10^{12} sont des carrés parfaits ».

Exercice Sec6bis

1. Démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
2. Démontrer qu'un triangle équilatéral ne peut pas avoir ses trois sommets à coordonnées entières.

Solution

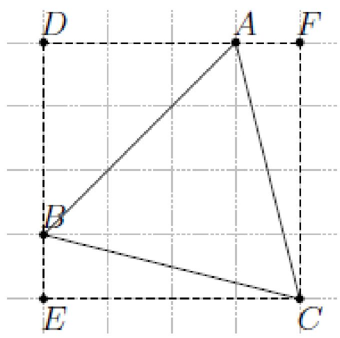
1. On effectue un raisonnement par l'absurde.

   On suppose que $\sqrt{3}$ est rationnel. Il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ avec $\frac{a}{b}$ irréductible.
   Ainsi on obtient : $3b^2 = a^2$. D'où a^2 est divisible par 3.
   On démontre l'implication : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est divisible par 3, alors n est divisible par 3. Sa contraposée s'écrit : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n n'est pas divisible par 3, alors n^2 n'est pas divisible par 3.

   Soit n un entier non divisible par 3. Il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$. Si $n = 3k + 1$, alors $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(6k^2 + 2k) + 1$ ou $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Dans les deux cas, n^2 n'est pas divisible par 3. La contraposée est démontrée et ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est divisible par 3, alors n est divisible par 3.
   Grâce à cette implication, on déduit que a est divisible par 3. Ainsi il existe $a' \in \mathbb{N}$ tel que $a = 3a'$. D'où $b^2 = 3a'^2$. Par conséquent b^2 est divisible par 3 et donc b est divisible par 3. Les deux entiers a et b sont divisibles par 3. La fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible, ce qui est faux.
   Donc $\sqrt{3}$ est irrationnel.

2. On raisonne par l'absurde.

On suppose que le triangle équilatéral, que l'on note ABC, a ses trois sommets à coordonnées entières. On construit le rectangle circonscrit au triangle ayant ses côtés parallèles aux axes. L'aire du rectangle est entière, les aires des triangles rectangles ADB, BEC et AFC sont rationnelles. On en déduit par soustraction que l'aire du triangle ABC est rationnelle. Or l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Comme c^2 est entier (calculé d'après le théorème de Pythagore), on aboutit à la conclusion que $\sqrt{3}$ est rationnel ce qui est faux. Donc les trois sommets de ABC n'ont pas tous les trois des coordonnées entières.



Remarque

Les deux raisonnements par l'absurde sont faciles à débuter car les négations des deux propositions à démontrer s'énoncent aisément. La première question de cet exercice peut être un bon réinvestissement de la démonstration de $\sqrt{2}$ irrationnel et la deuxième question une belle utilisation de l'irrationalité de $\sqrt{3}$.
Pour la question **1.**, nous sommes dans le schéma 2. La proposition P est « $\sqrt{3}$ est irrationnel », ainsi NON P s'énonce « il existe a et b tels que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ET $\frac{a}{b}$ est irréductible ».
La supposition de NON P implique $\frac{a}{b}$ est irréductible et évidemment, par définition de NON P, que $\frac{a}{b}$ est irréductible.
Pour la question **2.**, nous sommes dans le schéma 1 avec la proposition P « un triangle équilatéral ne peut pas avoir ses trois sommets à coordonnées entières » et la proposition R « $\sqrt{3}$ est rationnel ».

Exercice Exp6

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 3$, il existe un nombre premier tel que $n < p < n\,!$.

Solution

On va raisonner par l'absurde. La négation de la proposition à démontrer s'écrit « il existe un entier naturel n tel qu'il n'existe pas de nombre premier p tel que $n < p < n!$ ». Soit n un tel entier. On considère alors le nombre $N = n! - 1$.
Comme $n \geq 3$, $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n \geq 2n$. D'où $n! - 1 \geq 2n - 1$ et $2n - 1 > n$ dès que $n > 1$. Ainsi $n! - 1 > n$ et évidemment $n! - 1 < n!$. Ainsi N n'est pas premier car on a supposé qu'il n'existe pas de nombre premier p tel que $n < p < n!$.
N n'étant pas premier, il existe un nombre premier p qui divise N. Comme il n'existe pas de nombre premier strictement entre n et $n!$, ce nombre premier p vérifie $p \leq n$. Ainsi p divise $n!$ et il divise N. Il divise leur différence 1. D'où $p = 1$. Ceci est faux car 1 n'est pas premier.
Donc pour tout entier $n \geq 3$, il existe un nombre premier p tel que $n < p < n!$.

Remarque

La proposition à démontrer est une proposition élémentaire. La démonstration est très proche de celle de l'infinitude des nombres premiers.
Nous sommes dans le schéma 1 avec la proposition P « pour tout entier $n \geq 3$, il existe un nombre premier p tel que $n < p < n!$ » et la proposition R « 1 est un nombre premier ».

Exercice Exp6bis

Démontrer que, pour tout $n \geq 2$ entier naturel, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i}$ n'est pas un entier.

Solution

On effectue un raisonnement par l'absurde. La négation de la proposition à démontrer s'écrit : « il existe un entier naturel n supérieur ou égal à 2 tel que u_n soit entier ».

Soit n un tel entier.

On a $u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$. Ainsi n est supérieur ou égal à 4.

Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note $i = 2^{k_i} p_i$ où 2^{k_i} la plus grande puissance de 2 qui divise i.

Donc p_i est impair.

On considère k le maximum des k_i pour $1 \leq i \leq n$. Ainsi 2^k est la plus grande puissance de 2 qui divise l'un des entiers de $[\![1; n]\!]$. Comme n est supérieur ou égal à 2, k n'est pas nul. De plus cette puissance 2^k n'intervient qu'une seule fois dans les décompositions en facteurs premiers des entiers de $[\![1; n]\!]$. En effet le nombre le plus petit ayant 2^k comme diviseur est 2^k. Le suivant est $2^k \times 3$, or $2^k \times 3$ est supérieur à 2^{k+1}. Donc $2^k \times 3$ n'appartient pas à $[1 ; n]$ puisque 2^k est la plus grande puissance de 2 divisant les entiers de $[\![1; n]\!]$.

Ainsi $n! = \prod_{\ell=1}^{n} 2^{k_\ell} p_\ell = 2^{k'} p$ où $k' = \sum_{\ell=1}^{n} k_\ell$ et $p = \prod_{\ell=1}^{n} p_\ell$.

On peut remarquer que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ $k' > k_i$ car il y a au moins deux entiers divisibles par 2 dans $[\![1; n]\!]$ (≥ 4).

Donc pour $i \in [\![1; n]\!]$, $\frac{n!}{i} = 2^{k'-k_i} \frac{p}{p_i} = 2^{k'-k_i} q_i$ où $q_i = \frac{p}{p_i}$. D'après la définition de p, q_i est un entier.

On a $n! u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i}$. On en déduit : $2^{k'} p u_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{k'-k_i} q_i$.

En divisant cette égalité par $2^{k'-k}$, on obtient $2^k p u_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{k-k_i} q_i$.

On note j le nombre 2^k, c'est-à-dire l'entier de $[\![1 ; n]\!]$ qui a la plus grande puissance de 2 comme diviseur.

D'où $\sum_{i=1}^{n} 2^{k-k_i} q_i = \sum_{i=1\ i\neq j}^{n} 2^{k-k_i} q_i + q_j$ et $2^k p u_n = \sum_{i=1\ i\neq j}^{n} 2^{k-k_i} q_i + q_j$

Le membre de gauche de cette dernière égalité est pair car k est non nul et le membre de droite est impair car pour $i \neq j$, $k - k_i = 0$ et q_j est impair. On aboutit à une contradiction.

Pour tout $n \geq 2$, u_n n'est pas entier.

Remarque

La proposition à démontrer est une proposition élémentaire. Sa négation est très simple à énoncer. La difficulté de l'exercice provient de l'exploitation de cette négation.

Exercice Exp6ter

Démontrer l'implication suivante : $\forall (a ; b ; c) \in \mathbb{N}^3 \quad a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0$.

Solution

On va démontrer cette implication par l'absurde.

On suppose qu'il existe un triplet $(a ; b ; c)$ de $\mathbb{N}^3$ tel que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ et ($a \neq 0$ OU $b \neq 0$ OU $c \neq 0$).

On va raisonner par disjonction des cas selon la nullité des nombres a, b et c.

- Premier cas : $b = 0$

On a alors $a + c\sqrt{3} = 0$

Si $c = 0$ alors $a \neq 0$ car au moins un des trois nombres a, b et c est non nul. Et $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ devient $a = 0$. Ceci est faux car $a \neq 0$.

Si $c \neq 0$ alors $\sqrt{3} = -\frac{a}{c}$. Ceci est faux car $\sqrt{3}$ est irrationnel.

- Deuxième cas : $b \neq 0$

Si $c = 0$ alors $a + b\sqrt{2} = 0$ et $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$. Ceci est faux car $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Si $c \neq 0$, alors $b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = -a$. On en déduit que $(b\sqrt{2} + c\sqrt{3})^2 = a^2$ c'est-à-dire $2b^2 + 3c^2 + 2bc\sqrt{6} = a^2$.

Ainsi $\sqrt{6} = \frac{a^2 - 2b^2 - 3c^2}{2bc}$. Ceci est faux car $\sqrt{6}$ est irrationnel.

Dans tous les cas, on aboutit à une proposition fausse (contradiction). La proposition « il existe un triplet $(a\,;b\,;c)$ de $\mathbb{N}^3$ tel que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ et ($a \neq 0$ OU $b \neq 0$ OU $c \neq 0$) » est fausse. L'implication cherchée est alors vraie.

Remarque

La proposition à démontrer est une proposition implicative. Pour la démontrer par l'absurde, il est nécessaire de savoir la nier. On rappelle que la négation de $P \Longrightarrow Q$ est P ET NON Q.

De plus un raisonnement par disjonction des cas a été nécessaire pour utiliser l'hypothèse que $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$.

D'autre part nous sommes dans le schéma (1bis) avec la proposition P « il existe un triplet $(a\,;b\,;c)$ de $\mathbb{N}^3$ tel que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ et ($a \neq 0$ OU $b \neq 0$ OU $c \neq 0$) » et la proposition R « $\sqrt{3}$ est rationnel » dans le cas $b = 0$ et la proposition R « $\sqrt{6}$ est rationnel » dans le cas où $b \neq 0$.

IX – RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Il existe plusieurs formes du raisonnement par récurrence. Elles sont toutes équivalentes sur $\mathbb{N}$.

On considère une proposition $P[n]$ où n est un entier naturel.

Principe de récurrence « simple »

Si la proposition $P[n]$ vérifie :

$P[0]$ est vraie (initialisation),

et, pour tout entier naturel k, $(P[k] \Longrightarrow P[k+1])$ est vraie (hérédité)[1]

alors, pour tout n, $P[n]$ est vraie.

Plus formellement : $(P[0] \text{ ET } \forall k \in \mathbb{N}\ \ P[k] \Longrightarrow P[k+1]) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}\ \ P[n])$.

Principe de récurrence « double »

Cette forme du principe de récurrence intervient lorsque la relation de récurrence porte sur deux valeurs consécutives de n.

Si la proposition $P[n]$ vérifie :

$P[0]$ et $P[1]$ sont vraies (initialisation),

[1] Il peut être intéressant de changer le nom de la variable dans l'implication : l'appeler k au lieu de n pour bien distinguer les différents rôles de la variable dans toutes ces écritures.

et, pour tout entier naturel k, $((P[k]$ ET $P[k+1]) \Longrightarrow P[k+2])$ est vraie (hérédité)
alors, pour tout n, $P[n]$ est vraie.
Plus formellement :
$(P[0]$ ET $P[1]$ ET $(\forall k \in \mathbb{N}\ (P[k]$ ET $P[k+1]) \Longrightarrow P[k+2]) \Longrightarrow ((\forall n \in \mathbb{N}\ \ P[n])$.

Principe de récurrence « forte »
On peut avoir besoin, pour prouver que, pour tout n, $P[n]$ est vraie, de faire l'hypothèse que $P[n]$ vraie pour tous les entiers m inférieurs à l'entier n générique. Un cas particulier est celui où la proposition $P[n]$ est définie en fonction de valeurs précédentes de n. Le principe de récurrence s'écrit alors ainsi :
Si la proposition $P[n]$ vérifie :
$P[0]$ est vraie (initialisation),
et, pour tout entier naturel k, $((\forall h \leq k\ , P[h]) \Longrightarrow P[k+1])$ est vraie (hérédité)
alors, pour tout n, $P[n]$ est vraie.
Plus formellement : $(P[0]$ ET $(\forall k \in \mathbb{N}\ \ ((\forall h \leq k\ , P[h]) \Longrightarrow P[k+1])) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}\ \ P[n])$.

1. Récurrence simple

Exercice Exp7

Démontrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation $1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$ admet au moins une solution en nombres entiers positifs tous distincts.

Solution

Soit n un entier naturel. On note $P[n]$ la proposition : « l'équation $1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$ admet au moins une solution en nombres entiers positifs tous distincts ».
On démontre par récurrence que $P[n]$ est vraie pour tout $n \geq 3$.
Initialisation
$P[3]$ s'écrit : « l'équation $1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ admet au moins une solution en nombres entiers positifs tous distincts.
$P[3]$ est vraie car $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.
Hérédité
On démontre l'implication : $\forall n \geq 3\ \ P[n] \Longrightarrow P[n+1]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P[n]$ est vraie. On veut démontrer qu'alors $P[n+1]$ est vraie.
Il existe n entiers positifs tous distincts tels que $1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$.
On en déduit que $\frac{1}{2} = \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \ldots + \frac{1}{2x_n}$.
Ainsi $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \ldots + \frac{1}{2x_n}$. On peut remarquer que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ x_i est différent de 1 car $n \geq 3$. Les x_i étant tous distincts entre eux et différents de 1, les entiers 2, $2x_1$, $2x_2$, …, $2x_n$ sont tous distincts. Ceci montre que $P[n+1]$ est vraie.
L'implication $(\forall n \geq 3\ \ P[n] \Longrightarrow P[n+1])$ est démontrée, la proposition est héréditaire à partir de $n = 3$.
Conclusion $P[3]$ est vraie et la proposition $P[n]$ est héréditaire à partir de $n = 3$, d'après le principe de récurrence, $P[n]$ est vraie pour tout $n \geq 3$.
Ainsi pour tout $n \geq 3$, l'équation $1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$ admet au moins une solution en nombres entiers

positifs tous distincts.

Remarque
Un des intérêts de cet exercice concerne l'indice d'initialisation et d'hérédité. Il n'est égal ni à 0, ni à 1.

Exercice Exp7bis

Démontrer que pour tout n entier naturel, $4^{2n+2} - 15n - 16$ est divisible par 225.

Solution
On va effectuer un raisonnement par récurrence. On note $P[n]$ la proposition « $4^{2n+2} - 15n - 16$ est divisible par 225 ».
Initialisation
$P[0]$ s'écrit : $4^2 - 15 \times 0 - 16$ est divisible par 225.
Or $4^2 - 15 \times 0 - 16 = 0$ donc $P[0]$ est vraie.
Hérédité
On veut démontrer l'implication $\forall n \in \mathbb{N} \quad P[n] \Longrightarrow P[n+1]$
On veut donc démontrer que pour tout n entier naturel, si $4^{2n+2} - 15n - 16$ est divisible par 225, alors $4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16$ est divisible par 225.
Soit n un entier naturel tel que $4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16$ est divisible par 225.
Ainsi il existe un entier k tel que $4^{2n+2} - 15(n+1) - 16 = 225k$.
D'où $4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16$
$= 16 \times 4^{2n+2} - 16 \times 15n - 16 \times 16 + 16 \times 15n - 15n - 15 + 16 \times 16 - 16$
$= 16\ (4^{2n+2} - 15n - 16) + 15n(16 - 1) + 256 - 31 = 16 \times 225k + 225n + 225$
$= 225(16k + n + 1)$
Ainsi $4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16$ est divisible par 225. La proposition $P[n+1]$ est vraie.
L'implication ($\forall n \in \mathbb{N} \quad P[n] \Longrightarrow P[n+1]$) est démontrée, la proposition est héréditaire à partir de $n = 0$.
Conclusion
La proposition $P[0]$ est vraie et l'hérédité est prouvée pour $n \geq 0$. D'après le principe de récurrence, la proposition $P[n]$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a bien prouvé que pour tout n entier naturel $4^{2n+2} - 15n - 16$ est divisible par 225.

Remarque
Le raisonnement par récurrence est ici très performant. Habituellement, pour ce type d'exercice, les congruences sont un outil efficace. Le problème, ici, est que l'on doit travailler modulo 225 et que dans l'expression $4^{2n+2} - 15n - 16$ la variable n figure dans une expression affine et en exposant. Ceci rend la méthode par congruences peu efficace.

2. Récurrence multiple

Exercice Exp8

Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x}$ soit entier.

Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier.

Solution
On va effectuer un raisonnement par récurrence double.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P[n]$ la proposition : $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier.

Initialisation

$P[1]$ s'écrit : $x + \frac{1}{x}$ est entier. $P[1]$ est vraie par hypothèse.

$P[2]$ s'écrit $x^2 + \frac{1}{x^2}$ est entier. Or $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$. Donc $x^2 + \frac{1}{x^2}$ est entier.

$P[2]$ est vraie.

Hérédité

On démontre l'implication : $\forall n \geq 1$, $(P[n]$ ET $P[n+1]) \Longrightarrow P[n+2]$

Pour tout n entier naturel, il suffit de démontrer que si $P[n]$ et $P[n+1]$ sont vraies, alors $P[n+2]$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P[n]$ et $P[n+1]$ sont vraies. On suppose donc que $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sont entiers et on veut démontrer que $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$ est entier.

Ainsi $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = (x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}})(x + \frac{1}{x}) - (x^n + \frac{1}{x^n})$

Or $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ est entier car $P[n+1]$ est vraie, de même pour $x^n + \frac{1}{x^n}$ car $P[n]$ est vraie. Enfin $x + \frac{1}{x}$ est entier. Ainsi $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$ est entier.

Ceci prouve que la proposition $P[n+2]$ est vraie si $P[n]$ et $P[n+1]$ sont vraies.

L'implication cherchée est démontrée, la proposition est héréditaire à partir de $n = 1$.

Conclusion

$P[1]$ et $P[2]$ sont vraies et la proposition $P[n]$ est héréditaire à partir de $n = 1$, d'après le principe de récurrence double, $P[n]$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier.

Exemple Exp8bis

Démontrer que cos 1° est irrationnel.

Solution

On raisonne par l'absurde. On suppose que cos 1° est rationnel et on va démontrer par récurrence double que cos n° est rationnel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P[n]$: « cos n° est rationnel ».

Initialisation

$P[0]$ s'écrit : cos 0° est rationnel.

$P[0]$ est vraie car cos 0° = 1.

$P[1]$ s'écrit : cos 1° est rationnel.

$P[1]$ est vraie car c'est ce que l'on a supposé.

Hérédité

On montre l'implication :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (P[n] \text{ ET } P[n+1]) \Longrightarrow P[n+2].$$

Pour tout n entier naturel, on veut démontrer que si $P[n]$ et $P[n+1]$ sont vraies, alors $P[n+2]$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P[n]$ *et* $P[n+1]$ sont vraies. On suppose donc que cos n° et cos(n + 1)° sont rationnels et on veut démontrer que cos(n + 2)° est rationnel.

On a : $\cos(n+2)° + \cos n° = 2\cos(n+1)° \cos 1°$ en appliquant la formule :

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$.

On sait que cos(n + 1)°, cos(n)° et que cos 1° sont rationnels. On en déduit que cos(n + 2)° est rationnel.

L'implication cherchée est prouvée. La proposition $P[n]$ est héréditaire à partir de 0.

Conclusion

Comme $P[0]$ et $P[1]$ sont vraies et que l'implication $\forall n \in \mathbb{N}$, $(P[n]$ ET $P[n+1]) \Longrightarrow P[n+2]$, est vraie, d'après le principe de récurrence double, la proposition $P[n]$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En particulier P[45] est vraie, ce qui signifie que $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est rationnel. Or ceci est faux, l'hypothèse « cos 1° rationnel » est fausse. Ainsi cos 1° est irrationnel.

Remarque

Cet exemple est intéressant car il s'appuie sur deux types de raisonnement : par récurrence et par l'absurde. Le raisonnement par récurrence est double car $\cos(n+2)$ s'exprime simplement en fonction de $\cos(n+1)$ et de $\cos(n)$.

La récurrence double s'utilise très naturellement pour étudier les suites numériques d'ordre 2.

3. Récurrence forte

Exercice Exp9

Tout entier naturel $n \geq 2$ est soit premier, soit peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Solution

Démontrons ce résultat par un raisonnement par récurrence forte.

Pour tout $n \geq 2$, soit $P[n]$: « L'entier n soit est premier, soit peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers ».

Initialisation

2 est un nombre premier. $P[2]$ est donc bien vraie.

Hérédité

On veut démontrer l'implication suivante : pour tout $n \geq 2$, si $P[k]$ est vraie pour tout $2 \leq k \leq n$ alors $P[n+1]$ est vraie.

Soit $n \geq 2$. Supposons que pour tout $k \in [\![2\,;\,n]\!]$, $P[k]$ est vraie, i.e. supposons que tout entier k appartenant à $[\![2\,;\,n]\!]$, soit est premier, soit peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.

Deux cas se présentent :

- Si $n+1$ est *premier*, alors $P[n+1]$ est bien vraie.
- Si $n+1$ n'est pas premier, alors il existe (au moins un) diviseur a (entier naturel non nul) tel que : $a \neq 1$ et $a \neq n+1$, et par conséquent il existe b, $b \neq 1$ et $b \neq n+1$ tels que $n+1 = a \times b$.

On en déduit $a \in [\![2\,;\,n]\!]$, or on a supposé que pour tout $k \in [\![2\,;\,n]\!]$, k soit est premier, soit peut s'écrire comme un produit de nombres premiers, on peut en déduire que a est premier ou peut s'écrire comme produit de nombres premiers. De même pour b donc b soit est premier, soit peut s'écrire comme un produit de nombres premiers, on en déduit que ab, c'est-à-dire $n+1$ s'écrit également comme produit de nombres premiers. Donc dans ce cas également, $P[n+1]$ est bien vraie.

Ainsi dans tous les cas, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $P[n]$ =) $P[n+1]$.

Conclusion

D'après le principe de récurrence forte, pour tout entier naturel n, $n \geq 2$, $P[n]$ est vraie, i.e. tout entier $n \geq 2$ soit est premier, soit peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Remarques

• L'intérêt d'utiliser ici une récurrence forte réside dans le fait que, comme on suppose $P[k]$ vraie pour tous les rangs k compris entre 2 et n, on peut ensuite l'appliquer à a et b (les diviseurs de $n + 1$), même si on ne sait pas explicitement qui ils sont : il suffit de savoir que ce sont des entiers compris entre 2 et n. Si on supposait seulement $P[n]$ vraie, on ne pourrait rien dire a priori sur a et b !

Ceci illustre bien la puissance pratique d'un raisonnement par récurrence forte, par rapport à une récurrence classique dans ce cas.

• Le raisonnement par récurrence forte est particulièrement utile dans certains problèmes de divisibilité comme on vient de le voir ou dans les exercices sur les suites lorsque le terme général de la suite est fonction de tous les termes précédents.

X - RAISONNEMENT PAR DESCENTE INFINIE DE FERMAT

Le principe s'énonce ainsi : « il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'entiers positifs ». Sur $\mathbb{N}$, cet énoncé est équivalent aux énoncés sur le principe de récurrence donnés précédemment. Dans certains problèmes, il est plus simple à utiliser. C'est le cas, en pratique, lorsque $P[n]$ est une propriété d'un ensemble d'objets indicé par n, qu'on ne peut passer d'un objet quelconque de taille n à un objet quelconque de taille $n + 1$ et que l'on veut démontrer que quel que soit n, $P[n]$ est fausse.

Le raisonnement est le suivant : on démontre que pour tout n tel que $P[n]$ est vraie, on peut trouver un $m < n$ tel que $P[m]$ est vraie. Ce qui revient à construire une suite infinie d'entiers strictement décroissante telle que $P[n]$ est vraie. Ceci est impossible. Donc $P[n]$ est fausse quel que soit n.

Exercice Exp10

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Solution

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers relatifs p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On peut choisir p et q entiers naturels car $\sqrt{2}$ est positif.

De $\sqrt{2} \neq 0$, on déduit que $p \neq 0$. De même de $\sqrt{2} \neq 1$, on déduit $p \neq q$ et donc $p-q \neq 0$.

Si $p^2 = 2q^2$ alors $p^2 - pq = 2q^2 - pq$, c'est-à-dire $p(p - q) = q(2q - p)$.

On en déduit que $\frac{p}{q} = \frac{2q-p}{p-q}$.

Montrons maintenant que $0 < 2q - p < p$ et que $0 < p-q < q$.

On a : $1 < \sqrt{2} < 2$, donc $q < p < 2q$.

Ainsi $0 < p - q < q$.

De même, on obtient $q < p < 2q < 2p$, donc $0 < 2q - p < p$.

Ainsi $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$ avec p_1 et q_1 entiers naturels vérifiant $0 < p_1 < p$ et $0 < q_1 < q$. On réitère le procédé opéré sur p et q sur les entiers p_1 et q_1.

Ainsi $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \ldots$

On construit ainsi deux suites d'entiers naturels non nuls (p_n) et (q_n) strictement décroissantes.

Ceci est en contradiction avec le principe de Fermat.

Ainsi la proposition initiale supposée vraie est fausse.

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice Exp10bis

Démontrer que l'équation $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^3$ autre que (0 ; 0 ; 0).

<u>Solution</u>

Préliminaire : la proposition « pour tout entier naturel n, si n^3 est pair alors n est pair » est vraie.
Démontrons la proposition équivalente, sa contraposée, « pour tout entier naturel n, si n est impair alors n^3 est impair » : soit n entier naturel ; si n est impair, il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$ d'où $n^3 = (2k + 1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 4k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 2k) + 1$ ce qui prouve que n^3 est impair puisque $4k^3 + 6k^2 + 2k$ est alors un entier naturel. Par contraposition, pour tout entier naturel n, n^3 pair $\Longrightarrow$ n pair.
Le triplet (0 ; 0 ; 0) est solution évidente de (E) dans $\mathbb{N}^3$. Effectuons un raisonnement par l'absurde.

On suppose qu'il existe un triplet (a ; b ; c) solution de (E) avec a, b et c entiers non tous nuls c'est-à-dire (a ; b ; c) $\neq$ (0 ; 0 ; 0). Dans ce cas, $a^3 = 4c^3 - 2b^3 = 2(2c^3 - b^3)$ où $(2c^3 - b^3)$ est un entier naturel donc a^3 est pair. De a^3 pair on déduit a pair (préliminaire) d'où il existe un entier naturel a′ tel que $a = 2a'$.
L'égalité $a^3 + 2b^3 = 4c^3$ devient : $8a'^3 + 2b^3 = 4c^3$ soit $4a'^3 + b^3 = 2c^3$ d'où $b^3 = 2c^3 - 4a'^3 = 2(c^3 - 2a'^3)$ où $(c^3 - 2a'^3)$ est entier naturel ce qui entraîne b^3 pair. De b^3 pair on déduit b pair (préliminaire) d'où il existe un entier naturel b' tel que $b = 2b$.
L'égalité $4a'^3 + b^3 = 2c^3$ devient alors $4a'^3 + 8b'^3 = 2c^3$ d'où $2a'^3 + 4b'^3 = c^3$ ce qui entraîne c^3 pair. De c^3 pair on déduit c pair (préliminaire) d'où il existe un entier naturel c' tel que $c = 2\,c'$. En remplaçant dans l'égalité $2a'^3 + 4b'^3 = c^3$ on obtient $2a'^3 + 4b'^3 = 8\,c'^3$ c'est-à-dire $a'^3 + 2b'^3 = 4c'^3$.
On vient de démontrer que si (a ; b ; c) est solution dans $\mathbb{N}^3$ de $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ autre que (0 ; 0 ; 0) alors $(a'; b'; c') = (\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2})$ est aussi solution dans $\mathbb{N}^3$ de cette même équation $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ et autre que (0 ; 0 ; 0). On peut réitérer le procédé.
On a supposé (a ; b ; c) $\neq$ (0 ; 0 ; 0) donc au moins un des entiers a, b ou c n'est pas nul ; on peut supposer $a \neq 0$. On constitue ainsi une suite infinie de solutions entières strictement décroissante ($a' = \frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2} < a$), ce qui contredit le principe de descente infinie de Fermat.
On conclut que l'équation $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ n'a pas dans $\mathbb{N}^3$ de solution autre que (0 ; 0 ; 0).

XI - CONCLUSION

Nous avons donc bien montré que l'arithmétique est un domaine des mathématiques où l'apprentissage du raisonnement peut être privilégié. En effet, tous les types de raisonnement que l'on rencontre en mathématiques dans le secondaire peuvent être présents. Une des spécificités de l'arithmétique est que l'on peut travailler avec très peu de connaissances, ce qui explique que nous avons pu exhiber des exemples de niveau collège ou seconde. On peut donc regretter que ce domaine ne soit pas plus développé, notamment au lycée dans les programmes de spécialité des classes de première et terminale.