MÉTHODES ET PRATIQUES ARITHMÉTIQUES DU XVI^{e} SIÈCLE

Frédéric MÉTIN
Formateur INSPÉ, UNIVERSITE DE BOURGOGNE
IREM de Dijon
Frederic.metin01@u-bourgogne.fr

Résumé
Les ouvrages d’arithmétique de la Renaissance (souvent qualifiés d’arithmétiques commerciales) initient le nouveau lectorat du 16e siècle à la numération décimale de position, ainsi qu’à de nombreuses méthodes de résolution de problèmes monétaires ou financiers dépassant les simples questions commerciales. Basées sur la « règle de trois » (qualifiée comme telle), ces méthodes et pratiques laissent peu de place aux raisonnements, pourtant nécessaires aux lecteurices modernes pour les comprendre. Faisant suite à l’atelier, l’article propose une exploration de ces anciennes méthodes, ainsi qu’une illustration des manipulations des jetons de compte, qui permettaient même aux analphabètes de calculer.

Le premier plan de Bordeaux, établi en 1565, l’a été par un humaniste saintongeais, Elie Vinet (1509-1587), qui allait devenir célèbre comme historien du Bordeaux de l’antiquité. Vinet est pour nous bien davantage qu’un simple érudit, car en tant que Principal du collège de Guyenne au temps de Montaigne, il eut à cœur d’y restaurer l’apprentissage des sciences, particulièrement de l’arithmétique. Dans le programme des études qu’il conçoit pour le collège de Guyenne (Vinet, 1583), il mentionne clairement l’apprentissage des *Éléments* d’Euclide et des quatre disciplines du *quadrivium* (arithmétique, géométrie, musique et astronomie), qui complètent celles du *trivium* (grammaire, rhétorique et dialectique) pour former les sept arts libéraux de l’enseignement médiéval. Il a d’ailleurs déjà publié deux ouvrages qui ont pu servir de supports à son enseignement : un *Quadrivium* d’après Michel Psellos (Vinet, 1553) et une *Logistica* (Vinet, 1573), comprenant la numération décimale, les opérations sur les entiers et les radicaux, et enfin les rapports et proportions.

L’objectif principal de ces manuels est d’enseigner la pratique de la numération décimale de position et les techniques opératoires qui en découlent à des étudiants maîtrisant le latin et destinés pour la plupart à l’état ecclésiastique. L’arithmétique en jeu ici est directement issue des mathématiques grecques qui ne peuvent être abordées que par des érudits comme les étudiants des collèges de l’époque. Il s’agit donc d’une discipline théorique inscrite dans une vision métaphysique du monde et de la réalité. Nous en voulons pour preuve cet extrait de l’*Arithmétique* de Jacques Peletier du Mans (Peletier, 1554), dont nous avons jugé l'*ortografe françoese* plus facile à décrypter que le latin de Vinet :

> *ARITMETIQVɆ sɇlon l’ordrɇ droęt et naturęl, ę́t la prɇmierɇ des quatrɇ partiɇs dɇ Matematiquɇ : E ę́t cęllɇ qui anseignɇ la suitɇ, la propriete e la prattiquɇ des Nombrɇs : commɇ la Musiquɇ des Tons, la Geometriɇ des Lignɇs, Supęrficɇs e Cors : L’Astronomiɇ des cors e mouuɇmans celestɇs. L’Aritmetiquɇ e Musiquɇ s’antrɇtienɇt, e ont toutɇs deus pour suget la Quātite Discrettɇ (Peletier, 1554, p. 12).*

Dans cet esprit, les divers composants du savoir mathématique doivent être intimement liés dans un corpus ordonné de manière à refléter l'unité du monde. La définition du nombre (entier) est alors conforme à la doctrine pythagoricienne :

> *Nombrɇ donq ę́t une quantite composeɇ dɇ plusieurs Vnitez : Commɇ 2, 3, 4, 5, 6, e tous autrɇs sans fin : Car il nɇ sɇ peùt donner Nombrɇ si grand, qui nɇ sɇ puisse augmanter d'vn […] L'Vnite, qui represantɇ lɇ Point an Geometriɇ, n'ę́t point Nombrɇ, męs seulɇmant originɇ de Nombre. Qui plus ę́t, originɇ de soę-mę́mɇ : Car cęllɇ mę́mɇ ę́t sa Multiplication, sa Diuision, sa Racinɇ, son Quarre, son Cubɇ (Peletier, 1554, p. 12-13).*

Cependant, en quoi cette vision du nombre est-elle utile aux commerçants, aux artisans, aux jaugeurs et autres mesureurs auxquels Stevin adressera sa *Disme* à la fin du siècle ? Ceux-ci n'ont aucun intérêt à connaître les catégories du nombre « perɇmantper, perɇmantnomper, e non perɇmantper »[1] de Peletier, pas plus que les dénominations des proportions « superparticulierɇ, sesquisɇcondɇ, sesquitiercɇ »[2], etc.

Ainsi, pour l'utilité pratique des diverses activités numériques humaines, il était nécessaire que soient rédigés des ouvrages de référence dans la langue commune des praticiens des comptes et des calculs, et non celle des savants. Les nombreux traités d'arithmétique commerciale qui subsistent de cette époque témoignent à la fois de la demande et de l'offre d'une formation mathématique pour tous ces praticiens, ainsi que pour les maîtres d'arithmétique qui se chargeraient de guider les débutants (Spiesser, 2008).

I - UNE PRATIQUE « BRIÈVE ET FACILE » ?

Soyons clair, les ouvrages d'arithmétique pratique de la Renaissance puisent à la fois aux deux registres théorique et pratique. Difficile en effet d'expliquer la tenue de livres de comptes ou les règles compliquées des échanges commerciaux sans passer par l'écrit, et sans fournir de cadre théorique, même minimal. Mais d'un autre côté, comment mettre ces contenus difficiles à la portée de personnes non-érudites ? Les titres des ouvrages vantent « la pratique, la plus briève et facille, qui ait esté encore mise en lumiere » (Denorry, 1574) ou promettent de « beaulx exemples et pratiques » (Anonyme, 1510), mais nous allons voir que l'élémentaire côtoie le plus ardu dans ce corpus assez disparate, comme devait l'être l'ensemble des lecteurs auxquels s'adressaient les auteurs.

Parmi ces nombreux ouvrages, nous avons choisi de présenter ceux que nous utilisons à la fois dans la formation initiale et continue des enseignants et dans des animations grand public, pour leur côté attrayant et dépaysant. En effet, lorsqu'il s'agit de réfléchir à notre propre lien à la discipline, il est souvent bénéfique de mettre les savoirs que nous pensons maîtriser à l'épreuve de leurs formulations anciennes que nous n'arrivons pas toujours à reconnaître.

[1] Dans la nomenclature pythagoricienne (Berthier, 1978) : pairement pair, pairement impair et impairement pair, catégories de nombres qui se traduisent respectivement par : puissance de 2, double d'un nombre impair et multiple impair d'une puissance de 2 supérieure ou égale à 2^2.

[2] De même, dans la théorie pythagoricienne (Berthier, 1978), les rapports superparticuliers sont ceux qu'entretiennent deux entiers consécutifs (comme les rapports de 3 à 2, de 4 à 3, de 5 à 4, etc.), et parmi ceux-ci, le rapport sesquialtère, que Peletier nomme sesquisecond, est le rapport de 3 à 2, le sesquitierce celui de 4 à 3 et ainsi de suite.

Nos lecteurices trouveront donc dans les exemples qui suivent toute une variété de méthodes oubliées et/ou difficilement déchiffrable d'un premier regard superficiel. Parfois il n'est question que de les reformuler dans des termes familiers, et c'est alors que l'on mesure toute l'économie, la simplification et la clarté qu'apporte l'algèbre. Parfois, il faut étudier les textes plus en profondeur pour y découvrir des techniques opératoires étranges ou des résolutions d'équations sans utilisation d'inconnues, du moins sans calcul littéral, mais là encore se manifeste la « libération de l'algèbre » selon l'expression de Claude Merker[3]. Au-delà de leur caractère pittoresque, ces textes, élémentaires ou non, sont l'occasion d'un questionnement des certitudes liées à la maîtrise des connaissances, ce qui les rend encore plus précieux en formation des enseignants, lorsqu'il s'agit d'interroger notre rapport aux mathématiques. Nous espérons que les quelques extraits donneront envie aux lecteurices d'examiner les ouvrages présentés (tous sont disponibles en ligne).

1. Les tables de multiplication selon Peletier

Jacques Peletier du Mans est aux côtés de Ronsard, l'un des poètes de la Pléiade, un réformateur créatif et défenseur de la langue française face au latin de l'élite. Médecin et mathématicien acquis aux idées de la Réforme, il cherche à diffuser le savoir mathématique auprès d'un public élargi aux besoins nouveaux, par exemple les bourgeois-marchands sédentarisés des grandes villes comme Lyon, Paris ou Rouen (Spiesser, 2008). Mais ne croyez pas qu'il vive dans un mode exclusivement masculin : parmi les poètes que fréquentait Peletier, la lyonnaise Louise Labé semble avoir occupé une place proéminente.

Outre ses recueils de poésie, Peletier a publié quelques traités de mathématiques élémentaires, parmi lesquels un abrégé des six premiers livres des *Éléments* d'Euclide, une géométrie pratique et un traité d'algèbre dans lequel l'on trouve pour l'une des premières fois l'usage des lettres dans la résolution des systèmes d'équations à plusieurs inconnues.

Dans l'*Arithmétique*, Peletier exprime clairement son projet : « jɇ trouvɇ qu'il n'ę́t pas impossiblɇ d'ę́trɇ facilɇ é brief tout ansamblɇ » (Peletier, 1554, p. 77). Ce souci de clarté se traduit par la progression suivie dans le Premier Livre, que ne réprouveraient pas les enseignants actuels et qui semble universelle : numération, addition, soustraction, multiplication et division, assorties du vocabulaire et des « preuves » de ces opérations, le tout expliqué pas à pas. Cependant, quand il en vient à la « Multiplicacion des Antiers », Peletier n'expose pas immédiatement la table de multiplication habituelle. Au lieu de cela, il donne une méthode de calcul d'un produit de deux nombres à un chiffre, avec l'exemple suivant :

> *Examplɇ : Jɇ veù multiplier 7 par 6 : J'otɇ 7 dɇ 10 restɇt 3 : samblablɇmant 6 dɇ 10 restɇt 4 : Aprę́s, jɇ dì einsi, 3 foęs 4 font 12 ; j'ecrì 2 pour ma prɇmierɇ figurɇ : Puis j'ajoutɇ 6 avęc 7, ce sont 13 : dont jɇ gettɇ la sɇcondɇ figurɇ, 1, e pràn la prɇmierɇ 3 : a laquelɇ j'ajoutɇ l'unite gardeɇ 1, cɇ sont 4, quɇ j'ecrì aprę́s 2. Einsi, jɇ trouvɇ 42, qui ę́t la valeur de 7 multiplie par 6 (Peletier, 1554, p. 33).*

Bien que le texte en soit très bien écrit, tout n'est peut-être pas parfaitement clair (en tout cas pour des yeux modernes) dans l'exposé de cette technique. Dans son souci de facilité et de brièveté, Peletier offre une disposition schématique (Figure 1) qui permet de visualiser les opérations successives :

[3] Expression mentionnée oralement par Claude Merker de l'IREM de Besançon au cours du colloque de la CII Épistémologie et Histoire à Lille en 1990.

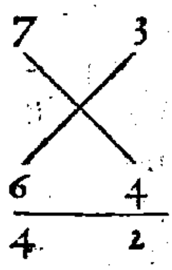


Figure 1. Peletier 1554

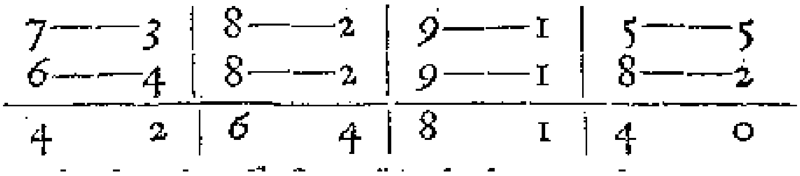


Figure 2. Vinet, 1573

Pour la multiplication de 7 par 6, on dispose ces deux nombres dans une même colonne, puis leurs compléments à 10 (qui sont respectivement 3 et 4) dans une seconde colonne à droite de la première. Le produit des deux compléments donne 12, dont on pose 2 et retient 1 ; la croix tracée permet de se rappeler que le chiffre des dizaines est obtenu comme différence de 7 et 4 ou de 6 et 3 (ce qui est toujours la même chose), auquel on ajoute la retenue pour obtenir 4, et finalement : 6 × 7 = 42, étonnant, non ?

Les étudiants (ou les jeunes enseignants) auxquels on demande d'étudier cette méthode s'inquiètent de sa généralité. On peut leur présenter l'extrait de la *Logistica* d'Elie Vinet proposé en Figure 2 (Vinet, 1573, p. 30) pour les convaincre qu'elle semble donner le bon produit dans de nombreux cas. Après avoir ainsi titillé leur curiosité, il ne reste qu'à les lancer dans une démonstration générale utilisant les conventions algébriques !

Cette disposition avait déjà été décrite en Angleterre par Robert Recorde de la même façon, avec la justification suivante : « En ce qui concerne les petits nombres à un chiffre (*dygetes*) inférieurs à 5, ce serait folie d'enseigner quelque règle, voyant que [les multiplications] sont si faciles qu'un enfant peut le faire. » (Recorde, 1543, fol. 47v). Notons qu'en bien des points, Recorde et Peletier ont des profils similaires, en particulier les aptitudes littéraires et le souhait de promouvoir les mathématiques au-delà du cercle des érudits en écrivant des traités en langue commune. Et c'est justement vers Recorde que nous nous tournons maintenant pour examiner une méthode multiplication qui ne nous paraît pas très conventionnelle.

2. Multiplier sans retenue

2.1. Le « truc » de Robert Recorde

Le fameux livre d'arithmétique de Robert Recorde, *The Ground of Artes* (Recorde, 1543), est le premier livre imprimé en Angleterre et en anglais sur ce sujet, si l'on excepte la traduction anglaise de l'*Art et science de arismetique* (Anonyme, 1510), dont on ne connaît que la page de titre et un autre ouvrage dérivé de celui-ci dont une édition complète n'a été découverte qu'en 2005 (Williams, 2012). *The Ground of Artes* reste néanmoins le plus important et le plus diffusé des anciens traités arithmétiques anglais (quarante-deux éditions), son succès ayant probablement été assuré par la qualité et la simplicité de son discours didactique à la portée des débutants. En effet, comme Peletier, Recorde prend soin de détailler chaque étape des algorithmes qu'il présente, et d'assortir ces schémas progressifs de commentaires explicatifs.

L'une des caractéristiques (déroutante pour nous) de la multiplication chez Recorde est l'absence de retenues en cours de calcul si ce n'est lors de l'addition finale, ce que l'on trouve également dans la plupart des livres imprimés à son époque. Recorde énonce la méthode générale Nous avons rassemblé dans la

Figure 3 les schémas qui accompagnent progressivement le texte explicatif de l'exemple donné par Recorde, texte que nous résumons ensuite :

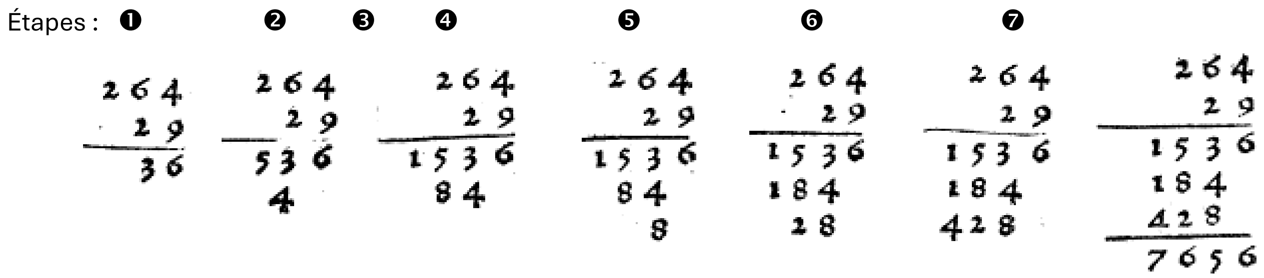


Figure 3. Multiplication de 264 par 29 (Recorde, 1543, 50v-52)

❶ : la multiplication 264 × 29 est posée comme de nos jours et entreprise avec l'algorithme usuel qui permet d'écrire le produit 36 sans retenir le chiffre 3 ;

❷ : ceci engendre un problème technique pour écrire 54, produit de la multiplication de 6 par 9, puisque la place du chiffre 4 est occupée par le chiffre 3 des dizaines du produit précédent ; qu'à cela ne tienne ! L'important pour l'addition finale est que ce 4 se trouve dans la colonne des centaines, on le place donc en dessous du 3. Le 5 se retrouve alors dans la troisième colonne, celle des milliers ;

❸ : de même, les deux chiffres 1 et 8 du produit de 2 par 9 sont placés respectivement dans la colonne des milliers et celle des centaines, le plus haut possible (sans doute pour ne pas occuper plus de lignes que nécessaire).

❹, ❺ et ❻ : le même principe est utilisé pour les multiplications par 2, tous les chiffres des produits étant inscrits sans retenir quoi que ce soit, sur trois lignes au lieu de deux seulement dans la méthode avec retenues.

❼ : l'addition finale est effectuée de manière ordinaire, avec les retenues évidemment, mais celles-ci ne sont pas indiquées.

Pourquoi ce choix de ne pas utiliser les retenues ? Cette question n'est pas judicieuse, car les auteurs du XVIe siècle possédant cette technique n'imaginaient probablement pas que l'on puisse procéder différemment. Quoi qu'il en soit, remarquons que cet algorithme de multiplication ne nécessite pas de la part du calculateur la faculté de mémoriser un chiffre et de l'additionner mentalement à un nombre au cours du processus. La technique de multiplication sans retenue en elle-même est probablement dérivée du calcul *par jalousie* que nous présentons brièvement dans l'ouvrage de Juan de Ortega ci-dessous.

2.2. Quelques variations de Juan de Ortega

On connaît mal la vie de Juan de Ortega, dominicain espagnol né au XVe siècle, si ce n'est qu'il est l'auteur de divers traités dont l'un des premiers ouvrages de mathématiques publiés en espagnol. Imprimé à Lyon faute d'imprimerie en Espagne, le rarissime *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria* (Ortega, 1512) sera rapidement reproduit en français sous le titre *Œuvre tressubtille et profitable de lart & science de aristmeticque: & geometrie* (Ortega, 1515), puis dans une version espagnole revue et corrigée, *Tratado subtilissimo de arismetica y de geometria* (Ortega, 1537) mainte fois rééditée en Espagne.

Nous portons un intérêt particulier au chapitre traitant de la multiplication. En effet, après avoir exposé comme Recorde et Peletier la multiplication telle que nous la connaissons, Ortega mentionne trois autres pratiques qu'il expose de manière graphique et sans les commenter, si ce n'est l'indication qu'elles se font sans retenue. Nous reproduisons ci-après (Figures 4, 5 et 6) les trois versions successives de cet extrait, qui présentent chacune la multiplication de 43 060 par 4085, *par jalousie* (cadre de gauche), par une technique équivalente à notre multiplication posée usuelle (à droite) et par une technique intermédiaire utilisant un tableau à double entrée (au centre). Notons que dans les trois éditions, le dispositif de *jalousie* a été gravé sur bois, tandis que les deux autres ont été composés avec des caractères mobiles. La police de caractère utilisée est de type gothique en 1512 et d'un modèle plus arrondi pour la seconde édition lyonnaise en 1515, ainsi qu'en 1537. Les chiffres gravés sur bois sont inspirés de la première police de caractère, comme on le remarque particulièrement pour le chiffre 2. Du point de vue de la gravure, les deux premières versions sont quasiment identiques, mais il ne s'agit pas du même bois car certaines différences de formes dans les signes sont visibles. La troisième gravure reste sur le même modèle, copié sur les deux précédents, mais nous notons toutefois que le graveur de 1537 a gravé les 2 dans le mauvais sens ! Nous examinons maintenant de plus près les trois techniques présentées par Ortega.

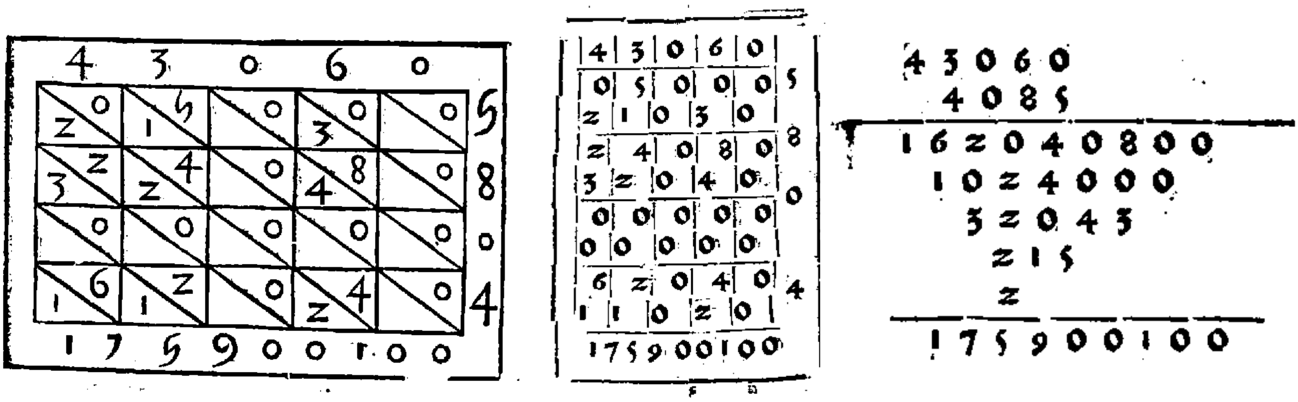


Figure 4. Trois façons de multiplier 43 060 par 5804 (Ortega, 1512, fol. 18v-19)

La multiplication par jalousie

À l'époque d'Ortega, cette technique de multiplication, peut-être d'origine orientale, est déjà connue en Europe car elle a été exposée par divers auteurs dont Luca Pacioli dans son célèbre ouvrage *Summa de arithmetica geometria proportioni & proportionalita* (Chabert et al., 1994, 26-32). Si l'on excepte la contrainte du cadre, nous allons constater qu'elle présente l'avantage de rendre simples et bien lisibles tous les calculs, du fait de l'absence de retenue et de l'organisation spatiale qui prévoit l'exacte place de chacun des chiffres des produits partiels, aussi bien que le regroupement de ceux-ci dans des « colonnes obliques » par ordre de grandeur décimale. Nous décrivons ci-dessous l'usage du dispositif.

Les cellules carrées d'un tableau à double entrée sont divisées en deux par l'une de leurs diagonales, toutes l'étant de la même façon (ici, de haut à gauche en bas à droite) ce qui engendre des lignes obliques comme on le voit sur les figures. Chaque colonne du tableau correspond à un chiffre du multiplicande et chaque ligne à un chiffre du multiplicateur. Les produits partiels (à deux chiffres au maximum) sont inscrits dans la cellule correspondante, celui des dizaines dans la partie basse et celui des unités dans la partie haute. On lit par exemple sur la première ligne 2\0 (= 4 × 5), 1\5 (= 3 × 5), 0 (= 0 × 5), 30 (= 6 × 5) et encore 0.

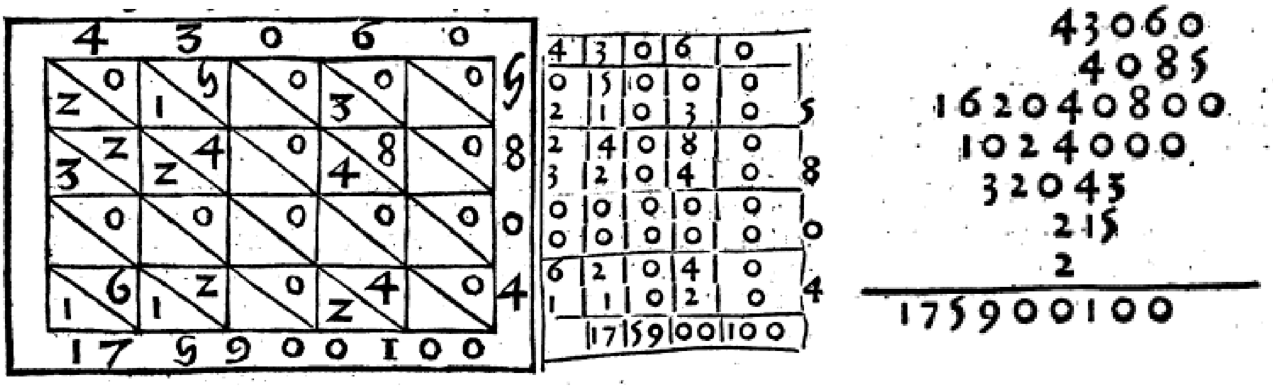


Figure 5. Trois façons de multiplier 43 060 par 5804 (Ortega, 1515, fol. 15v)

La demi-cellule supérieure droite contient le seul nombre contribuant au chiffre des unités du résultat, c'est 0. La demi-cellule inférieure qui lui correspond fait partie de la colonne oblique des dizaines, qui contient deux zéros s'additionnant pour obtenir le résultat 0. La colonne oblique des centaines contient 0, 3, 8 et 0, pour un montant total de 11, donc on conserve le chiffre 1 (de droite) et dont on retient l'autre, ce qui n'est indiqué nulle part sur le schéma. Le principe des retenues n'est donc pas tout à fait inconnu, mais celles-ci ne sont employées que pour les sommes finales, et pas en cours de multiplication.

Nous pouvons remarquer que dans les deux versions initiales imprimées à Lyon, les chiffres du multiplicateur ont été gravés à droite de la grille, ce qui rend impossible l'inscription des chiffres du résultat à l'extrémité des colonnes obliques correspondantes. En principe, le multiplicateur devrait être placé du côté de la grille correspondant aux extrémités supérieures des diagonales et les chiffres du produit sur les deux côtés restants, comme on le voit sur la Figure 6. Le graveur de 1537 a été attentif sur ce point, mais il a quand même gravé les 2 à l'envers !

La multiplication posée en tableau

Pour cette deuxième technique, les illustrations sont composées en caractères d'imprimerie et non plus gravées, et les trois versions sont sensiblement différentes. Longtemps nous avons utilisé en formation celle de la figure 5, lorsque nous n'avions pas accès à la version espagnole de 1512 qui n'était disponible qu'à Madrid. Cette illustration nous laissait perplexe, la disposition des chiffres dans le tableau ne permettant pas de comprendre aisément comment ils étaient additionnés.

Il aura fallu que la Banque d'Espagne mette en ligne la version scannée de l'exemplaire de sa bibliothèque pour confirmer notre intuition que le graveur lyonnais de 1515 ne savait probablement pas ce qu'il composait. En effet, le tableau de 1512 se lit facilement comme une version « redressée » du tableau de *jalousie*, qui laisse clairement apparaître les mêmes alignements obliques et les mêmes contenus numériques (avec l'intégralité des zéros). Le résultat est également disposé de la même façon sous la ligne inférieure du tableau, et le multiplicateur le long du côté droit.

De par sa disposition en colonnes verticales, l'illustration de 1515 prête le flanc à une interprétation moderne, ce qui ne manque jamais en formation initiale ou continue, notre regard étant conditionné par la méthode usuelle de multiplication posée. Évidemment, cela engendre l'incompréhension puisque les sommations verticales ne permettent pas d'obtenir le résultat affiché.

Dans ce contexte, la version de 1537 nous intrigue, car les chiffres du tableau ne sont plus exactement ceux de la grille de *jalousie*. En outre, le nombre de cellules y est réduit par rapport aux deux versions antérieures. On reconnaît les chiffres de la première ligne qui sont les mêmes, les zéros mis à part, que ceux de la première ligne du tableau de jalousie, mais dès la seconde ligne, cela ne convient plus. La quatrième ligne diffère également de son homologue du tableau de *jalousie*.

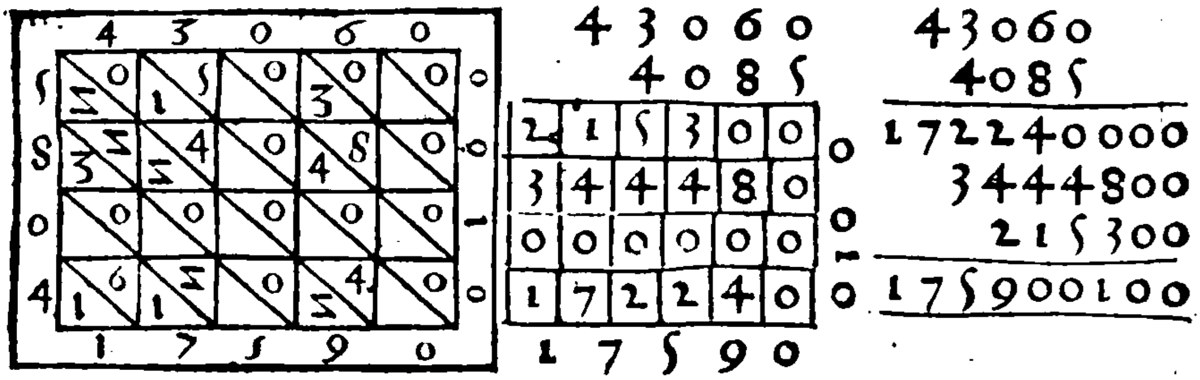


Figure 6. Trois façons de multiplier 43 060 par 5804 (Ortega, 1537, fol. 20)

Il est possible de retrouver un algorithme de calcul cohérent avec la disposition des chiffres de ce tableau, et c'est tout simplement notre technique moderne, comprenant l'usage de retenues : la première ligne est le produit de 43 060 par 5, la seconde par 8 et ainsi de suite. Comme le résultat final est disposé de manière identique à celui du tableau de *jalousie* qui jouxte celui-ci, on comprend que les sommes finales sont effectuées en diagonale, ce qui donne la forme la plus compacte possible pour la multiplication, dans une table carrée sans cellule inutile, si l'on excepte la ligne de zéros.

Cette présentation va constituer une transition idéale vers la multiplication posée qui fait l'objet de la troisième illustration que nous allons analyser.

La multiplication posée « à l'ancienne »

La troisième illustration de la Figure 4 constitue un document qu'il vaut la peine de proposer à des étudiants redécouvrant les mathématiques ou à des enseignants gagnés par la routine. Ceux-ci ont en effet très naturellement tendance à vérifier les résultats des opérations en appliquant mécaniquement l'algorithme usuel de la multiplication, ce qui les laisse perplexes quand ils découvrent que celui-ci ne fonctionne pas du tout ici. Il y a plus de lignes que prévu (tant qu'on ne se penche pas sur la version de 1537), et trop de zéros dès la première ligne.

C'est que contrairement à toute procédure contemporaine, l'auteur entame le calcul par la gauche, avec le produit 4 × 4, dont il inscrit intégralement le résultat 16 en première ligne. Nous retrouvons un algorithme sans retenue comparable à celui de Recorde vu plus haut, dans lequel les chiffres sont placés dans la bonne colonne, à l'endroit où il reste de la place pour les écrire. La présence des zéros et leur placement peut être interprété de plusieurs manières, mais il n'y a pas d'incohérence. Les chiffres sont plutôt correctement alignés verticalement, ce qui donne néanmoins quelques distorsions entre les chiffres des résultats partiels, qui peuvent se trouver assez éloignés les uns des autres. Les seules petites difficultés tiennent à un léger décalage de la ligne du 215 (le 5 devrait être au-dessous du 4) et de celle du résultat.

La comparaison avec l'illustration de 1515 ne laisse plus de doute : le typographe lyonnais ne comprend pas ce qu'il compose et aligne les chiffres sans logique apparente.

En revanche, la version de 1537 témoigne d'une parfaite maîtrise de la technique opératoire. Cette fois-ci, et c'est aussi déstabilisant, la multiplication est effectuée avec retenue, en commençant par le chiffre des milliers du multiplicateur et par le chiffre des unités du multiplicande. Un zéro est ajouté à l'extrémité de chaque ligne à chaque changement de ligne, à moins que les zéros ne soient placés en bloc directement à la fin de chaque ligne en fonction de l'ordre de grandeur du chiffre du multiplicateur traité. Cette fois-ci les alignements verticaux sont tous respectés, et les sommes finales sont identiques à celle du tableau central.

La figure 6 n'ayant pas fait l'objet d'un montage, elle reproduit fidèlement la mise en page originale de l'édition de 1537, qui met en évidence le lien entre les trois techniques de multiplication en promouvant de manière indirecte la troisième. C'est un extrait qui engendre d'intéressantes discussions en formation, en ce qu'il montre une sorte d'évolution d'une technique vers une autre. L'auteur en avait-il conscience ? Dans la mesure où le texte de l'ouvrage reste succinct à propos de ces techniques, et puisqu'il n'y a pas de changement notable entre les trois éditions, il n'est pas possible d'en avoir le cœur net.

II - « RÈGLE DE TROIS » ET AUTRES RÈGLES D'ALGÈBRE

Les ouvrages d'arithmétique pratique que nous étudions ne sont pas tous exclusivement réservés à l'apprentissage de la numération et des opérations à l'usage du commerce. Dans bon nombre d'entre eux, il est aussi question de la résolution de problèmes liés à la pratique marchande. Dans la plupart des cas, ces problèmes sont du premier degré et leur résolution ne nécessite pas le recours à l'algèbre, que probablement bien peu de destinataires des ouvrages auraient été à même de maîtriser. D'ailleurs, c'est jusqu'au XX^e siècle que les enfants des écoles primaires apprendront des méthodes purement numériques comme la méthode dite « de fausse position », qui sont largement suffisantes pour la résolution d'équations du premier degré lorsqu'il y a proportionnalité, ce qui est généralement le cas dans le contexte commercial. Comme on le sait, l'introduction du calcul littéral au collège pose problème à beaucoup de jeunes, qui posent souvent la question de son utilité dans « la vraie vie ».

Pour cette partie de notre présentation, et comme nous le faisons en formation initiale et continue, nous puisons à des sources de la seconde moitié du XV^e siècle, et particulièrement aux ouvrages de Valentin Mennher (Mennher, 1556), et Edouard Léon Mellema (Mellema, 1582) qui offrent un discours clair et une vue complète sur l'arithmétique commerciale de leur époque (Kool, 1999). Tous deux maîtres d'arithmétique ou comptables exerçant à Anvers, ils publient des ouvrages à l'intention de leurs élèves, dans lesquels ils détaillent et mettent sur le papier un ensemble complet de pratiques de résolution de problèmes faisant toutes appel à la « règle de trois ». Mais de quoi s'agit-il au juste ? Nous citons la définition de Valentin Mennher et quelques applications des deux auteurs.

1. Qu'est-ce que la « règle de trois » ?

Disciple allemand de Christoff Rudolff et adepte de la *Coss* (pratique allemande renaissante du calcul algébrique), Valentin Mennher se fixe à Anvers en 1549 comme maître d'arithmétique et publie divers textes d'arithmétique et de comptabilité, dont nous apprécions la lisibilité, ce qui nous a induit à proposer des extraits de l'*Arithmétique seconde* en formation continue, tant pour les enseignants de primaire que pour ceux du secondaire. Sa définition de la *règle de trois* nous rappelle qu'il s'agit bien d'une règle, avec un énoncé et des conditions d'application, et non pas de ce que nos étudiants qualifient abusivement de *produit en croix* qui n'est qu'une des propriétés de la proportionnalité. Précisons, pour faciliter la lecture de cette citation, qu'il y est questions d'unités monétaires (*£, ß, d'* : livres, sols et deniers), de poids (dont l'*esterlin*, à rapprocher de l'anglais *sterling*) et qu'il est fondamental que les données correspondantes soient exprimées dans la même unité, ou, selon l'expression de l'époque, réduites en un *nom* commun.

> *La Regle de trois contient 3 choses : ce qu'on demande sçavoir doit estre mis derriere, et la chose qui lui est en nom semblable doibt estre mise devant, & la tierce chose entre deux, qui est au milieu. Et quand l'une de ces 3 ou toutes 3 ont divers noms comme £, ß, d', ou marcs onces esterlins ou livres et onces &c., adonc il faut les reduire en son moindre nom. Quand cela est faict & que le dernier & premier ont noms semblables & que le nombre du milieu est reduict en son moindre nom, adonc il faut multiplier le nombre du milieu par le dernier & le produict partir par le premier nombre, & ce qui en vient de ceste division est le fact qu'on ha demandé et ha semblable nom que celuy du milieu. (Mennher, 1556, partie I, fol. signé Bij)*

Pour illustrer le propos simplement, viennent quelques mises en pratique élémentaires. Premier exemple : « Si 3 aulnes coustent 9 *d'* combien sousteront 36 aulnes ? 3 … 9 … 36 multiplies 36 par 9 & en viendront 324 lesquels divises par 3 et produiront 108 *d'* les mesmes divises par 12 & feront 9 *ß* — *d'* » ; troisième exemple : « Si une aulne couste *ß* 6 combien cousteront 27 aulnes ? Multiplies 27 par 6 et en viendront 162 *ß* lesquels divises par 20 pour faire en £ et feront 8 £ et 2 *ß*. »

Les textes ne posent pas problème aux lecteurices modernes, si ce n'est la gêne occasionnée par les impératifs se terminant en *s* et les conversions non décimales de monnaie : une livre vaut vingt sols, un sol douze deniers. De même, dans l'exemple bancaire qui suit, il faut savoir que le *daalder* d'argent est l'équivalent du *thaler* allemand, ancêtre du *dollar*. On s'aperçoit à la lecture de l'énoncé que la valeur faciale des pièces n'est pas leur valeur réelle et que le « caissier » doit manier avec aisance les conversions de monnaie pour tirer toujours profit de son activité, du moins ne pas y perdre :

> *Un Cassier doibt recevoir une somme d'argent laquelle on luy presente payer en dalders à 58 $\frac{1}{2}$ qui ne valent que d' 58 ou d'escus à ß 6 d' 9 qui ne valent que ß 6 d' 8. La demande est de laquelle sorte il doibt prendre pour avoir moins de dommage*
>
> *58 $\frac{1}{2}$ ♦ ♦ 58 ♦ ♦ 100 faict 99 $\frac{17}{117}$*
>
> *81 ♦ ♦ 80 ♦ ♦ 100 faict 98 $\frac{62}{81}$*
>
> *faict $\frac{400}{1053}$ pour cent vaut il mieux de prendre des dalders que des escus (Mennher, 1556, partie I, fol. signé Dij)*

Il s'agit donc pour le banquier de comparer la valeur réelle des deux monnaies en les convertissant en deniers (le « moindre nom » de la règle) et ramener leurs valeurs à l'indice 100, afin de savoir en quelle monnaie il a intérêt à être payé. Rappelons que les 6 sols et 9 deniers que vaut un écu sont équivalents à 6 × 12 + 9 = 81 deniers (qui n'en valent en fait ici que 80, ou 6 sols et 8 deniers seulement). Sur chacune des deux lignes, Mennher a soigneusement rangé les données dans l'ordre préconisé pour la règle de trois. Il cherche combien 100 deniers valent en réalité, selon l'un ou l'autre paiement, avec des daalders ou des écus dépréciés. En fait, les résultats expriment les pourcentages valeur réelle / valeur faciale. Ceux-ci ne sont pas exprimés en nombres décimaux (la *Disme* de Stevin ne sera publiée qu'en 1585) mais sous la forme partie entière + partie fractionnaire : $100 \times \frac{58}{58{,}5} = \frac{58\,000}{585} = \frac{11\,600}{117} = 99 + \frac{17}{117}$, et il en va de même pour la seconde : $100 \times \frac{80}{81} = \frac{8\,000}{81} = 98 + \frac{62}{81}$. Enfin, la différence pour cent est $1 + \frac{17}{117} - \frac{62}{81} = \frac{3600}{9477} = \frac{400}{1053}$ en faveur des daalders.

2. Des applications domestiques

Natif de Leuwwarden en Frise, Edouard Léon (dit Elcius) Mellema fut forcé de quitter la Flandre et se réfugier en Allemagne après le sac d'Anvers par les Espagnols en 1576. Il enseigna alors la comptabilité et l'arithmétique quelques années à Aix-la-Chapelle avant de reprendre son activité à Anvers (Mellema, 1582, épître). Son rarissime traité d'arithmétique est aussi impressionnant par la quantité de questions résolues sans algèbre (plus de trois mille) que par la diversité des approches proposées, outre le nombre important de poèmes et anecdotes de voyage qu'il contient. Il constitue un témoignage détaillé des pratiques commerciales du nord de l'Europe au XVIe siècle.

Nous présentons en Annexe 1 un exercice portant sur les « frais de bouche » d'un quidam non identifié, probablement hollandais. À proprement parler, ce n'est pas un exercice très difficile, puisqu'il ne s'agit que d'évaluer le montant total des frais engagés par le quidam pour ses repas pendant une période de près de trois mois, connaissant ce montant pour deux jours : 5 patards et 2 deniers de Hollande. C'est donc une préoccupation d'intendant.

L'intérêt de l'extrait ne réside pas tant dans l'énoncé lui-même que dans le dispositif graphique de présentation des calculs, que l'on interprète ainsi : 5 patards et 4 deniers font 5 × 16 + 4, soit 84 deniers, dépensés en deux jours, ce qui revient à 42 deniers par jour ; deux mois et 24 jours totalisent 84 jours, donc le montant total des dépenses est le produit 84 × 42, calculé de manière usuelle (avec retenue) pour un produit de 3528 deniers, converti en 220 patards et 8 deniers (3528 = 16 × 220 + 8), puis en 11 florins (220 = 20 × 11) et 8 deniers.

Lors de l'exposé de la « Reigle de troix », Mellema avait codé les diverses quantités proportionnelles avec les lettres A, B et C, et la quatrième proportionnelle D s'obtenait en calculant A × C ÷ B. Il reprend cette codification dans le texte accompagnant l'exemple. La division finale de 3528 par 16 (quotient 220 et reste 8) est faite « à la galère », mais sans que le dividende soit repris, et la conversion des 220 patards en florins est immédiate.

La méthode de division est plus lisible dans la vérification faite plus bas, mais il faut prendre garde au fait que Mellema l'a simplifiée (« abbréviée ») en prenant la moitié du dividende et du diviseur. En résumé, il a calculé la dépense totale en deniers (3528), l'a divisée par 84 (jours) et multiplié par 2 (jours) en posant 1764 ÷ 21, dont le résultat 84 (deniers) est converti en patards par une division par 16 : quotient 5 (patards) et reste 4 (deniers).

3. Et les équations du second degré ?

Revenons à Mennher pour notre dernier exemple, un peu plus difficile celui-ci, purement mathématique et résolu par l'algèbre, c'est le problème 72 que nous reproduisons en Annexe 2. Un cercle de diamètre 12 contient six cercles identiques, tangents entre eux, et qui forment un assemblage triangulaire dont les trois

« cercles-sommets » sont tangents au grand cercle. La question est de trouver le diamètre commun des petits cercles.

La résolution est peu détaillée, beaucoup de propriétés géométriques n'étant pas justifiées et les calculs intermédiaires non écrits. Mennher nomme x le diamètre demandé et z son carré ; le côté MN du triangle équilatéral (non justifié) MNR sera égal à $2x$ (non justifié) et par conséquent sa hauteur RS égale à $\sqrt{3\,x^2}$, résultat justifié par un évasif « par la troisième », correspondant à la troisième affirmation du chapitre auquel appartient ce problème. Il soustrait de cette hauteur son tiers pour obtenir RE égal à $\sqrt{\frac{4}{3}\,x^2}$ (propriété du triangle équilatéral non justifiée, E étant le centre de gravité du triangle RMN). Nous l'écrivons plutôt $\frac{2\sqrt{3}}{3}x$, ce qui revient à la même quantité.

Puisque le rayon AE vaut 6, et que par ailleurs c'est aussi AR + RE, Mennher établit l'équation :

$$\frac{1}{2}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}x = 6.$$

La solution de l'auteur est $x = \sqrt{40 + \frac{152}{169}} - \left(2 + \frac{10}{13}\right)$, alors qu'une résolution moderne de l'équation du premier degré ci-dessus nous donne $x = \frac{36}{3 + 4\sqrt{3}}$. Une simplification de la solution de Mennher et une transformation (multiplication par l'expression conjuguée du dénominateur) permettront à tout un chacun de vérifier qu'il s'agit de la même quantité.

Comme nous le constatons, l'algèbre n'est pas exclue de tous les ouvrages d'arithmétique commerciale. Il est vrai que les auteurs anversois ont développé une réelle virtuosité dans ce domaine, sous l'influence des *Cossistes* allemands. Cependant, le monde n'était pas fait que d'algébristes experts et les ouvrages que nous étudions abordent aussi diverses méthodes de numération et les opérations, selon que les apprentis savent ou non lire et écrire. Pour les premiers, il s'agira de l'art du calcul « par la plume » (i.e. en écrivant) et pour les autres, celui du calcul « par les gets » ou par les jetons, que nous allons illustrer maintenant, reprenant brièvement la seconde partie de l'atelier consacrée à la manipulation des jetons.

III - COMPTER ET CALCULER AUX JETONS

La pratique du calcul est intimement mêlée au système de numération dont il fait usage. Les divers abaques connus dans l'histoire mettent en évidence l'identification de chaque nombre entier usuel avec la collection d'unités qui le composent. Ainsi, tout nombre entier de taille raisonnable peut être représenté par un ensemble de coquillages, de perles, de cailloux, ou autres objets à manipuler en lieu et place des nombres écrits en chiffres (Schärlig, 2003).

Si vous connaissez par cœur la « comptine numérique », chère aux enseignants de l'école maternelle, il vous sera facile d'ajouter deux entiers sans connaître par cœur la table d'addition. Par exemple, pour le calcul de 3 + 2 (cailloux), il vous suffira d'énumérer 1-2-3 (cailloux) d'une part, 1-2 (cailloux) d'autre part et, rassemblant les deux collections, 1-2-3-4-5 (cailloux) pour le total, que vous pourrez résumer par la formule « 3 plus 2 font 5 ». Pour calculer ainsi, pas besoin de capacités de mémorisation. Mais dès que les quantités en jeu deviennent importantes, ces manipulations deviennent fastidieuses et peu fiables. Autant il est aisé de dénombrer ainsi une quantité de l'ordre de la dizaine, autant cela deviendra périlleux lorsqu'il s'agit de centaines, de milliers voire au-delà. Tout dépend donc de l'usage que vous en avez, mais aussi de la position que vous occupez, ainsi que de votre naissance : dans un milieu où vous avez appris à lire et à écrire, vous saurez effectuer les calculs à la plume ; si vous n'êtes qu'un pauvre marchand ambulant analphabète, les jetons vous seront précieux.

Il semble que les deux pratiques ont cependant coexisté, même dans les milieux financiers, à l'époque des textes que nous présentons. Une illustration en est donnée par la vignette de titre de l'ouvrage de Robert Recorde que nous avons déjà évoqué (Recorde, 1543). On y voit en effet (figure 7) plusieurs personnages représentés calculant dans une pièce dont on ne voit pas clairement s'il s'agit d'une taverne ou d'une forme médiévale de bureau d'expert-comptable. Sur les stalles n'est installé qu'un homme, les autres restent debout. Le contraste est saisissant : l'homme assis porte les cheveux courts et la barbe, il tient une épée à son côté, tandis que les hommes debout ont les cheveux longs et ne portent aucune arme.

Par ailleurs, celui qui est assis a devant lui une sorte de quadrillage sur lequel sont posés des jetons. C'est l'*échiquier* dont Recorde décrit la construction et l'usage dans la dernière partie de son ouvrage, *Accomptynge by counters* (Recorde, 1543, 116-134). Cependant, Recorde ne montre que le tracé des lignes tandis que la vignette du titre présente un réel quadrillage, ce qui l'apparente davantage à la pratique germanique qu'aux dispositifs décrits dans l'ouvrage, comme le montre une autre vignette de titre, celle du célèbre ouvrage allemand d'Adam Ries, *Rechenung auff der Linien vnd Federn*, présentée également figure 7 (Riese, 1535). Cette seconde image est plus explicite en ce qui concerne le local, bien que le tonneau sur la droite soit surtout destiné à montrer le travail des jaugeurs.

Figure 7. Vignette de titre des ouvrages (Recorde, 1543) et (Riese, 1535)

Dans les deux illustrations, nous remarquons la présence d'un homme debout à côté de la table, et coiffé d'un couvre-chef contrairement aux autres personnages de la scène. Comme il a l'air de ne pas travailler mais de superviser les comptables, les étudiants trouvent rapidement une interprétation de sa position : c'est celui qui possède l'argent.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à la pratique décrite dans les ouvrages en français, car il nous est bien plus facile en formation d'apporter un sac rempli de jetons qu'un certain nombre de tables gravées d'un quadrillage.

1. L'arbre aux jetons et la numération

Les ouvrages d'arithmétique pratique publiés en France au XVI[e] siècle décrivent une pratique similaire à ceux que nous venons de citer, mais qui ne nécessite pas tout l'attirail mobilier d'un *accountant* anglais ou d'un *Rechenmeister* allemand.

La pratique française est référencée dans de nombreux ouvrages élémentaires comme l'*Art et science de arismetique* (Anonyme, 1510) ou le *Livre de chiffres et de getz* (Anonyme, 1502) dont nous nous servons en formation initiale et continue. Les ordres décimaux (unités, dizaines, centaines…) sont matérialisés, non pas par des lignes gravées sur le bois d'une table, mais par la simple juxtaposition de jetons qui indiquent l'endroit des lignes le long desquelles on posera ceux qui représenteront les quantités numériques : c'est ce que l'on appelle l'*arbre aux jetons* (figure 8, que nous présentons à l'horizontale pour des raisons éditoriales).

Figure 8. Un arbre aux jetons *(Art et science de arismetique, vers 1510, fol. Ai-v)*

Cet arbre va être utilisé tout d'abord pour la numération (représentation des nombres entiers, voire quelques fractions simples) puis pour les quatre opérations usuelles.

L'exemple fondamental donné dans l'*Art et science de arismetique* (Anonyme, 1502)) est celui du nombre trente-quatre mille deux cent douze (figure 9). Les enseignants de tous niveaux, comme les élèves d'élémentaire, n'ont besoin d'aucune explication pour placer leurs jetons aux bons endroits : trois jetons sur la ligne des dizaines de milliers, quatre immédiatement en dessous, puis deux, puis un et deux.

Figure 9. Exemple de numération (Art et science de arismetique, vers 1510, fol. Eii)

Dans le *Livre de Chiffres et de getz*, l'exemple est plus compliqué : deux cent-quatorze millions cent-douze mille cent trente-huit (Anonyme, 1502, fol. Aii non signé). Il faut aller jusqu'en haut de l'arbre, au niveau des centaines de million, mais la répartition se fait aussi simplement que dans l'exemple plus haut. Cependant, les huit jetons de la ligne des unités peuvent poser problème. En effet, cette quantité n'est pas perceptible immédiatement (*subitizing*) par le commun des mortels, donc probablement pas non plus par les gens ordinaires de l'époque médiévale. Cela signifie qu'un arithméticien malhonnête et rapide peut poser seulement sept jetons sans que les usagers le remarquent, et ainsi fausser les calculs en direct à son plus grand profit, sans qu'il soit possible de vérifier leur justesse en cours de manipulation. Pour éviter cette situation, il existe depuis l'Antiquité la pratique du jeton *quinaire* que l'on place à l'intermédiaire entre les lignes et qui a la valeur de cinq jetons de la ligne au-dessous.

2. Les opérations

2.1. Addition et soustraction

Revenons à notre discours initial : si l'on conçoit un entier comme assemblage d'unités, ce qui semble conforme à la vision pythagoricienne des entiers, l'addition n'est qu'une autre forme d'assemblage, et la soustraction une forme de séparation d'une collection en deux parties.

Avec les élèves de primaire et ceux de collège, on commence donc par des manipulations simples pour calculer une somme comme 253 + 124. Les jetons sont posés à droite de l'arbre, d'abord en deux groupes séparés afin de distinguer les nombres à ajouter et de pouvoir vérifier que les jetons sont correctement posés. Souvent, les élèves les posent en commençant par le haut, comme dans le sens de lecture usuel, le chiffre des centaines en premier, puis celui des dizaines, et enfin celui des unités.

Quand il faut additionner les deux nombres, le regroupement des jetons peut commencer par les centaines ou par les unités, voire par les dizaines, cela n'a aucune importance. D'ailleurs, les élèves ont tendance à commencer par les jetons des centaines, contrairement à ce qu'ils font en posant le calcul. Est-ce différent en cas de retenue ? En fait non. Dans l'exercice qui suit, nous proposons aux élèves d'additionner 127 et 234, somme pour laquelle on sait que le calcul posé nécessite une retenue (car 7 + 4 font 11). Mais il n'y a pas de gêne dans l'arbre aux jetons : vous trouvez onze jetons pour les unités, cinq jetons pour les dizaines et trois jetons pour les unités. Puisque 11 dépasse 10, vous ramassez dix jetons de la ligne des dizaines pour les remplacer par un jeton dans la ligne des centaines. Cette simple opération s'apparente à un transfert avec conversion, et elle permet de retrouver le sens de la retenue d'une dizaine.

2.2. Multiplication

Dans l'*Art et science de arismetique*, l'exemple illustré de la multiplication avec jetons concerne la conversion des monnaies (figure 10). On demande combien il y a de sols dans 61 francs. Lorsque ce type d'exemple est proposé à des élèves, il vaut la peine de ne pas les informer sur les monnaies anciennes et donc ne pas leur expliquer dès le départ que le multiplicateur n'est pas 10. En effet, un franc, équivalent à une livre, vaut vingt sols, lesquels valent chacun douze deniers. L'idée ici est de laisser les élèves trouver eux-mêmes les taux de conversion en analysant ce qui est donné. Détaillons la figure 10 : la partie centrale est occupée par l'arbre, des unités aux dizaines de milliers ; la somme de 61 francs se lit à gauche (avec un jeton quinaire pour 59, un jeton simple pour 10 et un simple pour 1 ; la somme équivalente en sols (ou sous) est sur la droite, on lit : 1000 + 2 × 100 + 2 × 10 soit 1220 sols.

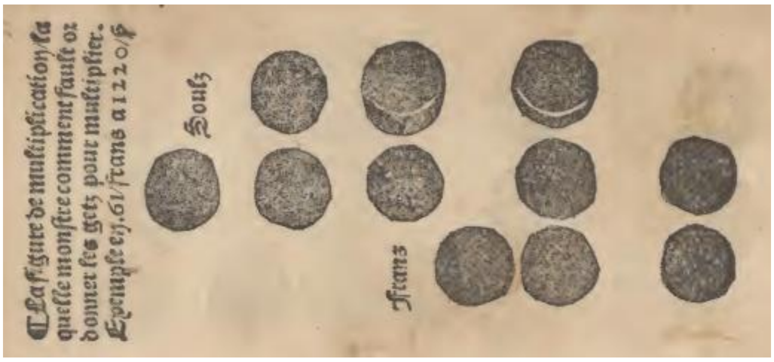


Figure 10. Multiplication de 61 par 20 (Anonyme, 1510, fol. Ei-v)

L’exemple du *Livre de chiffres et de gets* que nous utilisons aussi porte sur une conversion identique de 1223 francs en sols. L’énoncé y est quasiment identique à celui que nous venons de lire, mais il est imprimé de manière un peu plus sibylline : « en 1223 f a d s 24 460 ».

En formation ou avec des classes, nous prolongeons l’étude du texte par quelques exercices simples susceptibles d’engendrer des erreurs, ce qui ne manque jamais d’arriver. Il s’agit d’abord de multiplier par 20, en trouvant les gestes simples qui conviennent : poser deux jetons à droite chaque fois qu’il s’en trouve un à gauche, et remonter l’ensemble des jetons obtenus d’un échelon dans l’arbre. Ensuite, on demande de multiplier 27 par 12 et les choses se gâtent : les élèves ont tendance à reproduire les mêmes gestes que pour la multiplication précédente, assimilant la décomposition additive 10 + 2 avec la décomposition multiplicative 10 × 2. Il n’est pas difficile de les amener à se corriger en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l’addition.

2.3. Division

Notre dernier exemple concerne le partage d’une somme de 1170 francs entre quinze hommes, comme l’indique la légende de la figure 11. L’exemplaire dont nous avons copie, celui de la collection Plimpton de la bibliothèque de l’université de Columbia, porte une correction manuelle ancienne : le 65 imprimé dans la légende a été remplacé par 78 qui est le bon résultat de la division de 1170 par 15. L’ancienneté de la correction est manifestée par la graphie des chiffres. Quel est alors le véritable énoncé ? Il faut le vérifier sur la figure de l’arbre aux jetons.

Cependant, il y a un problème : on repère facilement les jetons de l’arbre au centre, ils sont assez espacés. Mais le nombre de droite est 650 et celui de gauche 261, aucun rapport avec l’énoncé ! Pour y voir plus clair, nous devons nous rappeler que la figure est imprimée comme une gravure, tandis que le texte est composé. La feuille, munie de ses disques noirs représentant les jetons, est repassée sous presse au moment d’imprimer le texte, il y a parfois des incidents et c’est le cas ici : la feuille a été placée à l’envers, et le texte est imprimé en sens inverse du sens de lecture de la figure.

Prenons donc la page (ou la figure 11) dans l’autre sens et décryptons : à droite le nombre 1170 (utilisant un quinaire selon la décomposition 70 = 50 + 20), et à gauche 65 (50 + 10 + 5).

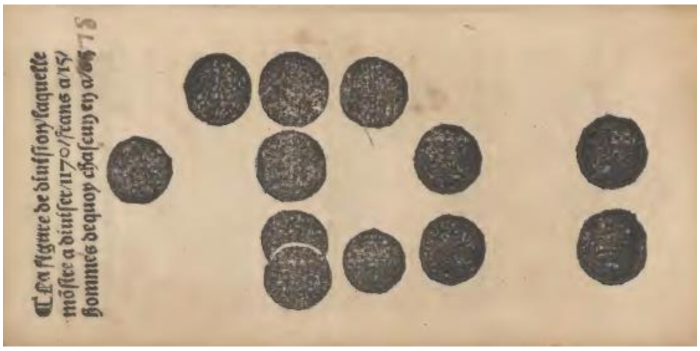


Figure 11. Division de 1170 par 15 (Anonyme, 1510, Eiii-v non signé)

Nous avions espéré comprendre cette différence entre le texte et la gravure en consultant une autre édition de l'ouvrage (Anonyme, 1520) souvent référencée sous le titre d'*Arithmétique de Pierre Sergent*, d'après le nom de l'imprimeur. Notre espoir fut vain : la gravure est identique, quoique de moins bonne qualité et avec un placement un peu approximatif des jetons de gauche. Cette gravure est également disposée à l'envers, ce qui fait soupçonner une recomposition à partir de l'édition de 1510, mais il faut être prudent sur l'estimation de la date de parution car aucun des deux ouvrages n'en porte. Pour ce qui est de notre problème de hiatus entre le texte et l'image, nous ne sommes pas avancés, d'autant plus que dans le texte de 1520 il est question de « diviser 1140 francs à 15 hommes » et non plus 1170 francs, même si curieusement la solution reste « de quoy chascun en a 65 ». Un bref coup d'œil à la multiplication précédente (celle de 61 par 20 vue plus haut) confirme la non fiabilité de l'ensemble dans l'édition de 1520 : le nombre 1220 est représenté comme 1110 sur l'arbre, et le texte indique un multiplicande de 91 au lieu de 61…

Dans les exercices de suite donnés aux élèves, aux enseignants en formation ou aux participants d'ateliers, nous proposons de diviser 1220 par 20, ce qu'ils réalisent facilement en renversant la succession de manipulations inventée pour la multiplication par 20. Mais la division de 2436 par 12 les laisse davantage perplexes (on ne peut pas l'assimiler aux deux divisions successives par 2 puis par 10). Une méthode toute visuelle est néanmoins possible : poser à gauche de l'arbre un jeton pour chaque bloc de douze jetons que l'on peut isoler à droite. En y réfléchissant bien, c'est conforme au principe même de division, par lequel on cherche à retrouver le diviseur dans le dividende autant de fois que possible, en commençant par les ordres supérieurs.

IV - CONCLUSION

Dans tous les exemples élémentaires cités, les problèmes résolus l'ont été sans raisonnement, mais en appliquant des méthodes standard, qui sont exposées de manière répétitive dans les ouvrages que nous avons consultés. Alors, peut-on penser que le raisonnement n'est pas indispensable en arithmétique à la Renaissance ? Les praticiens de l'époque auraient-ils trouvé cette idée incongrue ?

Nous avons surtout lu des extraits de textes adressés à des praticiens de l'arithmétique pour le commerce, voire la finance et, en tout cas, les changes de monnaies. Est-ce que les clients de ces praticiens demandaient des explications ? Certainement pas si les clients étaient seulement intéressés par leur expertise et l'efficacité de leurs méthodes. On en revient donc à la visée principale de notre enseignement : tête bien faite ou tête bien pleine ?

La réponse n'est pas immédiate, car ce n'est en aucun cas élémentaire. Il nous est souvent arrivé de nous trouver face à des personnes déplorant le manque d'habileté des jeunes adultes dans le maniement des chiffres et dans la résolution concrète de problèmes simples de proportionnalité. C'est même une réflexion récurrente à l'Institut de formation en soins infirmiers : les jeunes ne maîtrisent pas la règle de trois et ne peuvent pas effectuer de tête un simple calcul de proportion.

Comme en géométrie, l'aspect pratique des mathématiques est souvent minimisé dans notre enseignement. Alors, même s'il n'est pas du tout incongru de raisonner en arithmétique, nous voudrions rappeler que certains élèves tireront davantage profit de méthodes performantes et utiles, qu'il ne s'agit donc pas d'exclure des connaissances à acquérir à l'école.

V - BIBLIOGRAPHIE

Anonyme (1502). *Livre de chiffres & de getz nouvellement imprimé*. Lyon : Pierre Mareschal & Barnabé Chaussard.

Anonyme (vers 1510). *Art et science de arismetique moult utille et p[rou]ffitable… pour ceulx qui ne scavent lyre ne escripre nouvellement imprimé a Paris*. Paris : la veuve de Jehan Trepperel & Jehan Jehannot.

Anonyme (vers 1520). *Art et science de arismeticque par beaux exemples et pratiques...* Paris : Pierre Sergent.

Berthier, J. (1978). *Nicomaque de Gérase : Introduction arithmetique*. Paris : Vrin.

Chabert, J.-L. (dir.) (1994). *Histoire d'Algorithmes. Du caillou à la puce*. Paris : Belin.

Kool, M. (1999). *Die conste vanden getale. Een studie over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw, met een glossarium van rekenkundige termen*. Hilversum :Verloren.

Mellema, E. L. (1582). *Premier volume de l'arithmetique, composé de plusieurs inventions & problemes nouveaux…* Anvers : Gillis vanden Rade.

Mennher, V. (1556). *Arithmetique seconde*. Anvers : Jan van der Loë.

De Norry, M. (1574). *[L']Arithmetiqve de Milles Denorry... Avec la maniere universelle des remises, traictes et retours des changes, ensemble leurs differences de monnoyes... le tout par la pratique, la plus briève et facille, qui ait esté encore mise en lumiere*. Paris : Gilles Gourbin.

Ortega, J. (1512). *Siguese vna conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria…* Barcelone : Johannes Trinxer [impr. Lyon : Nicolas de Benedictis].

Ortega, J. (1515). *Œuvre tressubtille et profitable de lart & science de aristmeticque: & geometrie translate nouvellement despaignol en francoys…* Lyon : Simon Vincent.

Ortega, J. (1537). *Tratado subtilissimo de arismetica y de geometria…* Séville : Juan Cromberger.

Peletier, J. (1554). *L'Aritmetiqve de Jacqves Peletier du Mans, departie an quatre Liuvres. Reuüe e augmantee par L'Auteur*. Lyon : Jean de Tournes.

Recorde, R. (1543). *The Ground of Artes teachyng the worke and practise of Arithmetike*… Londres : R. Wolfe.

Schärlig, A. (2003). *Compter avec des jetons. Tables à calculer et tables de compte du Moyen Age à la Révolution.* Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Ries, A. (1535). *Rechenung auff der Linien vnd Federn*… Francfort : Christian Egenolph.

Spiesser, M. (2008). L'arithmétique pratique en France au seuil de la Renaissance : formes et acteurs d'un enseignement. *Lull, volume 31*, 81-102.

Vinet, E. (1553). *Ex Mathematico Pselli Breviaro : Arithmetica, Musica, Geometria, Sphæra ex Procli Græco, Elia Vineto Santone interprete*. Bordeaux : François Morpain.

Vinet, E. (1573). *Elia Vineti Santonis De Logistica Libri tres.* Bordeaux : Simon Millange.

Vinet, E. (1577). *L'Arpanterie d'Élie Vinet, livre de geometrie, enseignant à mezurer les champs, & pluzieurs autres chozes*. Bordeaux : Simon Millange.

Vinet, E. (1583). *Schola aquitanica*. Bordeaux : Simon Millange.

Williams, T. D. (2012). The Earliest English Printed Arithmetic Books. *The Library. The Transactions of the Bibliographical Society*, 7th series, 13(2), 164-184.

VI - ANNEXE 1 : UN PROBLÈME GOURMAND

4 Quelqu'vn despend en 2.iours pour sa table 5. pat. 4. ₰. d'Hollande, combien monte il en 2.mois 24. iours, le mois de 30. iours? facit 11. fl. 0. pat. 8. ₰.

Iours.	pat.	₰.	mois.	Iours.
2	5	4	2	24
1	16		30	
	84		84	
	42		42	
			168	
			336	
			3528	

Souuenez vous de ce qu'auons dit cy dessus, que A. & C. doibuent estre de semblable espece. Doncq ie reduy les 2. mois 24. iours qui est C. tous en iours, si viëdront 84. iours. Puis ie reduy les patars aussi tous en ₰. si ay ie 84. ₰. lesquels abbregez contre A. ou 2. donnent 42. ₰. iceulx multipliez par C. ou 84. rendent 3528. ₰. Et puis que A. est 1. lequel ne se partit iamais, ny multiplie (comme dessus est dit) ie reduy les ₰. par 16. en pat. & puis en florins. En voicy l'espreuue.

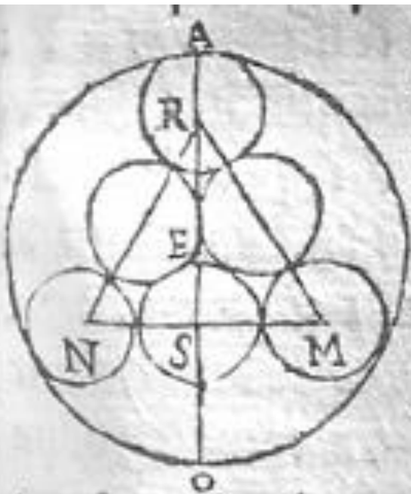
mois.	iours.	fl.	pat.	₰.	iours.
2	24	11	0	8	2
30		20			1
84		220			
42		16			
21		1328			
		220			
		3528			
		1764			

Facit 5. pat. 4. ₰.

On sçauroit les 21. en A. par 7. bien encore plus abbreger contre B. ou 1764. ₰. mais telles Abbreuiations lairrons encore, iusque à vne autrefois.

Edouard Léon Mellema, Premier volume de l'arithmetique, 1582, p. 104.

ANNEXE 2 : UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ CHEZ MENNHER



72. Plus il y a vn cercle duquel le diametre faict 12 dedãs luy sont faits 6 autres cercles d'vne grãdeur & de sorte q̃ chacun touche l'vn l'autre en forme d'vn triangle / et les trois extremes touchent la circunferẽce du plus grand cercle la demande est combien soit le diametre d'vn petit cercle. Responce/poses qu'il soit 1 ℞ adonques sera vn costé du triãgle r.m.n. 2 ℞ & par la troisiesme sera r.e. $\surd 3$ ʒ desquels prenes $\frac{1}{3}$ q̃ faict $\surd\frac{3}{9}$ ʒ & resterõt $\surd\frac{12}{9}$ ʒ aux mesmes adioustes a.r. qui est $\frac{1}{2}$ ℞ & en viendra $\frac{1}{2}$ ℞ + $\surd\frac{12}{9}$ ʒ egal à 6 qui est le demy diametre a.e. et 1 ℞ est egal à $\surd 40\frac{152}{169}$ — $2\frac{10}{13}$ pour vn diametre des petitz cercles.

Valentin Mennher, Arithmetique seconde, 1556, fol. signé T2.