LE TOUR DE MAGIE DE GERGONNE

Anne CORTELLA
Maîtresse de Conférences
Groupe jeux, IRES de Montpellier
anne.cortella@u.montpellier.fr

Résumé

Gergonne, professeur de mathématiques puis recteur à Montpellier au début du 19ème siècle publie en 1814 dans le premier journal de recherche en mathématiques (qu'il a créé) ses « Recherches sur un tour de cartes », maintenant appelé tour des « des piles de Gergonne », décrit initialement en 1769 par Guyot dans ses Nouvelles récréations physiques et mathématiques. La version traditionnelle de ce tour est basée sur l'écriture des nombres en base 3, qui permet de numéroter chacune des cartes entre 0 et 26 par une écriture à 3 chiffres.

L'atelier a consisté en une appropriation du tour « de magie », une recherche des participants sur le fonctionnement de ce tour, et une mise en lumière des propriétés mathématiques permettant de le modéliser. Les expérimentations ont utilisé des jeux de 27 ou de 100 cartes, reparties respectivement en 3 ou 10 tas, ce qui a conduit à une généralisation à un jeu d'une puissance quelconque *n* d'un nombre *a* de cartes, réparties en *n* tas.

Des éléments sur ce qui peut être traité avec/produit par les élèves en classe ont finalement été proposés. Ces éléments sont issus des expérimentations effectuées à divers niveaux du collège à la terminale ainsi qu'en formation des enseignants du premier ou second degré, en grands comme en petits groupes, par le groupe jeux de l'IRES de Montpellier.

Ce groupe est composé de

- professeurs de collège : Alix Boissière, Clémence Bargniol, Audrey Burel, Carole Duffet, Driss

Foufa, Saïd Mounime ;

- un professeur des écoles : Thomas Haye ;

- des enseignants-chercheurs : Anne Cortella, Nicolas Saby, David Théret.

Le lecteur est d'ailleurs invité à se munir d'un jeu de 27 cartes, voire d'un jeu de 100 cartes (par exemple les 100 premières d'un jeu de *6 qui prend*) pour expérimenter les actions au fur et à mesure et ainsi avoir une idée de ce qui se passe, puis suivre les calculs proposés. On pourra mettre, pour démarrer, les 100 cartes dans l'ordre croissant, en commençant par le dessus du paquet, faces cachées.

I - PRÉSENTATION DU TOUR DE MAGIE

1. La version classique

L'atelier a débuté par plusieurs démonstrations effectives du tour, par une "mauvaise magicienne" (pour que l'on puisse entrapercevoir que "Y'a un trrruc").

On va ici tout d'abord expliquer le fonctionnement du tour de magie de Gergonne.

On dispose d'un jeu de 27 cartes toutes différentes. La magicienne propose à une personne du public, que l'on nommera le cobaye, de choisir une des cartes, de bien la mémoriser en ne la montrant qu'au public et pas à la magicienne. Elle tient alors le paquet de cartes faces cachées, et distribue les cartes une par une, en les retournant, en 3 colonnes. Elle demande au cobaye de lui indiquer celle dans laquelle est positionnée sa carte, puis regroupe les colonnes en 3 paquets qu'elle entasse avant de redistribuer suivant la même méthode. Elle répète ceci plusieurs fois, puis retourne les cartes une à une et s'arrête miraculeusement à la carte choisie par le cobaye.

La présentation de ce tour peut être répétée plusieurs fois, en changeant de cobaye, en laissant de plus en plus apparentes les manipulations, afin que le public puisse remarquer *in fine* que :

- le jeu comporte 27 cartes ;

- on a distribué et regroupé 3 fois ;

- on a toujours mis le paquet contenant la carte visée au milieu du paquet reconstitué ;

- on a ensuite compté jusqu'à 14, et ainsi la carte choisie s'est retrouvée au bout des 3 manipulations au milieu du paquet.

La démonstration faite avec le jeu de 100 cartes, pas forcément triées au départ, permet de constater qu'en distribuant et regroupant 2 fois les 100 cartes en 10 tas, et en mettant chaque fois le tas contenant la carte en cinquième position, à partir du haut faces cachées, la carte choisie se retrouve en 50-ième position. Pour le faire apparaître plus visuellement, on peut distribuer à partir de la fin le tas en 10 colonnes et on s'arrête donc quand on a rempli les 5 premières lignes de toutes les colonnes. La carte est la dernière posée.

2. Plus de magie

Puisque les participants pensent maintenant avoir tout compris, on peut leur montrer qu'on peut faire beaucoup mieux : le cobaye est alors amené à proposer un nombre entre 1 et 27 (pour le jeu de 27 cartes). La magicienne, après un moment d'intense concentration, après avoir distribué et regroupé à nouveau trois fois, compte les cartes à partir du haut du paquet. La carte choisie se trouve (si elle ne s'est pas trompée), à la place choisie par le cobaye.

S'il est laborieux de le faire également pour le jeu de 100 cartes, on peut plutôt proposer d'observer précisément les manipulations qui conduisent la carte choisie tout en haut ou tout en bas du tas de 27 cartes (en 1$^{\text{ère}}$ ou en 27-ième position).

Le rôle de l'observation de ces manipulations est d'éclairer sur la manière dont la carte « remonte » dans les premières positions, ou « redescend » dans les dernières, suivant les positions choisies par la magicienne. Ce sont ces observations qui conduisent aux premières constatations sur le comportement des cartes au fur-et-à-mesure des manipulations pour conduire la carte en une position quelconque pour 27 cartes : si on met toujours le tas contenant la carte au-dessus du paquet (faces cachées), la carte arrive en une fois dans les 9 premières, en deux fois dans les 3 premières, en trois fois en premier (et symétriquement quand on met le paquet contenant la carte en dessous).

De la même manière quand on place le paquet contenant la carte au milieu du paquet, la carte se situe entre la 10-ième et la 18-ième place dans le paquet reconstitué.

L'utilisation des 100 cartes peut alors être renouvelée mais seulement (à cause du caractère fastidieux de l'opération) pour mettre la carte en deux fois à l'une des extrémités du paquet. On pourra ainsi infirmer ou confirmer certaines des conjectures émises précédemment.

3. Le cas général

Le travail effectué dans l'atelier tend à généraliser les deux cas observés précédemment en modélisant les actions et leurs effets pour un paquet de a^n cartes, pour un entier positif a quelconque.

On désire alors choisir un nombre b entre 1 et a^n, et en distribuant n fois le paquet en a colonnes et en les regroupant suivant un ordre bien choisi, on amène la carte en position b du paquet recomposé, sans toutefois connaître la carte, mais sur les seules indications à chaque distribution de la colonne dans laquelle elle se trouve.

C'est ce travail qui a été proposé dans une réflexion guidée par petits groupes disposant de jeux de 27 cartes et avec un jeu de 100 cartes commun pour tous les groupes.

II - MODÉLISATION DES MANIPULATIONS DES CARTES

1. Observation et modélisation de la distribution

Les petits groupes ont reçu la consigne suivante : essayez de réaliser le tour. Puis regardez plus précisément la répartition de cartes, par exemple en supposant qu'elles sont numérotées dans l'ordre dans le paquet à distribuer. Plus précisément :

- Avec un jeu de 100 cartes distribuées en 10 tas : comment sont réparties les cartes ?Caractériser la colonne et le rang dans cette colonne de la carte b.
- Et avec un jeu de 27 cartes ? Comment caractériser les cartes de chaque tas ? En quelle position de quelle colonne arrive la carte b ?
- Généraliser pour a^n cartes.

Voici ce que l'on peut observer.
Tout d'abord si on distribue 100 cartes numérotées de 1 à 100 en 10 colonnes, observons la place de la 46-ième carte dans les lignes et colonnes

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
4	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$4+1$	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
6	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
7	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
8	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
9	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
10	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figure 1. Distribution pour 100 cartes

La carte 46 = 45 + 1 est placée en position 4 + 1 de la colonne 5 + 1.

Autrement dit, la première colonne contient les cartes dont le numéro se termine par 1, la deuxième celles terminant par 2, etc…, mais la dixième et dernière celles terminant par 0. La première ligne contient celles dont le numéro n'a qu'un chiffre et le numéro 10, c'est-à-dire dont le numéro moins 1, écrit avec deux chiffres, commence par 0 ; la deuxième celles dont le numéro moins un commence par 1, etc…Ainsi la carte numérotée $b = a_1a_0 + 1$, l'écriture en base 10 de $b - 1$ étant notée a_1a_0, est placée par la distribution en $(a_1 + 1)$-ième place dans la colonne $(a_0 + 1)$.

Cela peut encore s'écrire : la carte b avec $b - 1 = 10 \times q + r$ se trouve en position $q + 1$ dela colonne $r + 1$.

Effectuons maintenant la distribution pour 27 cartes numérotées de 1 à 27 distribuées en 3 colonnes de 9, et repérons la 17-ième carte :

	1	1 + 1	3	
1-ière position	1	2	3	
2-ième position	4	5	6	
3-ième position	7	8	9	
4-ième position	10	11	12	
5-ième position	13	14	15	
position 5 + 1	16	17	18	$17 = 3 \times 5 + 1 + 1$
7-ième position	19	20	21	
8-ième position	22	23	24	
9-ième position	25	26	27	

Figure 2. Distribution pour 27 cartes

Ainsi la carte b telle que $b - 1 = 3 \times q + r$ se trouve en position $q + 1$ dans la colonne $r + 1$.

On peut extrapoler facilement :

Résultat 1. Pour a^n cartes distribuées en a tas (a entier non nul fixé) : si la division euclidienne de b- 1 par a s'écrit $b - 1 = qa + r$, alors la b-ième carte se trouve à la $(q + 1)$-ième place dans la $(r + 1)$-ième colonne.

Remarque : À ce stade, il peut paraître plus simple de tout numéroter entre 0 et a^n-1 ou $a-1$ ou encore $a^{n-1} - 1$. C'est effectivement ce qu'un enseignant peut décider. Ce n'est pas le choix qui a été fait ici bien que cela puisse simplifier les écritures. En effet, cela ne correspond pas aux observations que font naturellement des élèves de collège qui comptent bien sûr les cartes à partir de 1, ni aux constatations préalables qui ont été faites pendant la phase d'observation.On retrouve néanmoins partout cette correspondance puisqu'on considère toujours la division du rang $b - 1$ par a qui se trouverait en q-ième position de la r-ième colonne si on numérotait partout à partir de zéro.

2. Modélisation du rassemblement des colonnes en tas

On regroupe maintenant les colonnes en un seul tas, en mettant la colonne contenant la carte b en $(k + 1)$-ième position à partir du dessus, toujours face cachée.

On peut par exemple mettre pour le jeu de 100 cartes distribuées précédemment la colonne 5 + 1 contenant la carte $b = 46 = 45 + 1$ en 3-ième position. On choisit donc dans cet exemple $k = 2$. On place ainsi 2 paquets de 10 cartes avant la colonne sélectionnée. La carte choisie, qui était en position 4 + 1 dans sa colonne, est ainsi placée, après distribution et recomposition, en position $b' = 2 \times 10 + 4 + 1$.

De même, on peut mettre pour le jeu de $3^3 = 27$ cartes distribuées précédemment la colonne 1+1 contenant la carte $b = 17 = 5{\times}3 + 1 + 1$ en 2-ième position. On choisit donc dans cet exemple $k = 1$. On place ainsi 1 paquet de 9 cartes avant la colonne sélectionnée. La carte choisie, qui était en position 5 + 1 dans sa colonne, est ainsi placée, après distribution et recomposition, en position $b' = 1 \times 9 + 5 + 1$.

Résultat 2. Pour a^n cartes distribuées en a colonnes : supposons que la carte choisie se trouve en $(q + 1)$-ième position de sa colonne.

a. En mettant cette colonne sur le dessus, la carte reste en $(q + 1)$-ème position du tas reconstitué.

b. Pour la colonne en deuxième position, on a alors ajouté au-dessus autant de cartes qu'il y a de cartes dans une colonne, c'est-à-dire a^{n-1}. Elle se retrouve alors en $(a^{n-1} + q + 1)$-ième position.

De manière générale, si on met la colonne contenant la carte b en $(k + 1)$-ième position à partir du dessus face cachée, la carte est maintenant placée en position $k.a^{n-1} + q + 1$ dans le tas reconstitué.

Quelques cas particuliers intéressants :

c. Pour 100 cartes, si la carte est en 10-ième position de sa colonne ($q = 9$), et que l'on met cette colonne en 5-ième place en partant du dessus dans le tas ($k = 4$), la carte se retrouve en position $4 \times 10 + 9 + 1 = 50$ dans le tas reconstitué.

d. Si elle était en première position de sa colonne ($q = 0$) et qu'on met cette colonne en 6-ième place ($k = 5$), alors elle se retrouve en position $5 \times 10 + 0 + 1 = 51$ dans le tas.

e. Pour 27 cartes, si la carte était au milieu de sa colonne (i.e. pour $q = 4$), et que l'on met cette colonne au milieu du tas ($k = 1$), elle se retrouve en $9 + 4 + 1 = 14$-ième position donc au milieu du paquet.

3. Combinaison des deux actions pour 100 ou 27 cartes

Les membres de l'atelier ont alors été amenés à répondre aux questions suivantes :

- Avec 100 cartes, si on met la colonne $r + 1$ de la carte $b = aq + r + 1$ en $(k + 1)$-ème position à partir du haut (faces cachées), en quelle nouvelle position se trouve la carte ?
- Avec 27 cartes, si la carte b était en deuxième colonne et qu'on met cette colonne au milieu, quelle est la nouvelle position de la carte ?
- Avec 27 cartes, donner un encadrement de la position de la carte b valable pour b quelconque.

Pour mieux comprendre, reprenons le paquet de 100 cartes et observons la position b' de la carte $b = 46$ après la recomposition décrite ci-dessus ($k = 2$) : $b' = 2 \times 10 + 4 + 1$. Ainsi, pour trouver l'écriture en base 10 de b'-1, on a décalé dans celle de $b - 1$ le 4 d'un cran vers la droite, et on a mis en premier chiffre le rang de recomposition choisi moins 1 (soit k).

Reprenons le paquet de 27 cartes. Observons tout d'abord des recompositions particulières.

- Si on met la 2-ième colonne au milieu (en position 1 + 1), on ramène toutes les cartes de rang b avec $b = 3q + r + 1$ pour $r = 1$ en position $9 \times 1 + q + 1$, soit entre la 10-ième et la 18-ième position, puisque

$0 \leq q < 9$.

C'était le cas dans le paragraphe ci-dessus pour la carte $b = 17$, qui est conduite en $b' = 15$.

- De même pour les cartes telles que $r = 0$ (1ère colonne) ou $r = 2$ (troisième colonne), si on met leur colonne au milieu (en $1 + 1$) : la dépendance en r disparaît.
- Si maintenant on considère une carte de rang b compris entre 10 et 18. Écrivons $b = 9 \times 1 + 3b_1 + b_0 + 1$ avec $0 \leq b_0 = r < 3$ et $0 \leq b_1 < 3$. Ainsi $q = 3 + b_1$. Elle arrive par distribution en position $3 + b_1 + 1$ de la $(b_0 + 1)$-ième colonne. Donc si on met cette colonne au milieu, elle se retrouve en position $9 + 3 + b_1 + 1$, donc entre la 13-ième et la 15-ième position.
  - Si de plus $b_1 = 1$, donc si $b = 12 + b_0 + 1$ est entre 13 et 15, alors la carte arrive en $9 + 3 + 1 + 1 = 14$-ième position, soit au milieu du paquet de 27 cartes.

On est ainsi amené à décrire la position b par l'écriture de b-1 en base 3. Comme $0 < b \leq 27$, $b - 1$ décrit les nombres qui ont 3 chiffres en base 3. Nous pouvons donc écrire $b = 9b_2 + 3b_1 + b_0 + 1$ avec les chiffres b_i en base 3 valant 0, 1 ou 2.

On observe alors qu'après distribution et en remettant la colonne de la carte en $(k + 1)$-ième position, la carte choisie se retrouve en position $b' = 9k + 3b_2 + b_1 + 1$.

Comme pour le cas d'un jeu de 100 cartes, la dépendance $r = b_0$ a disparu et l'avant dernier 3-chiffre b_1 de $b - 1$ est devenu le dernier chiffre de $b' - 1$, et le premier chiffre est devenu k. Mais ici le chiffre précédent b_2 de $b - 1$ a glissé en deuxième chiffre.

C'est ce glissement-remplacement que l'on va observer dans le cas général.

4. Cas général

On distribue les a^n cartes en a paquets, nous allons choisir d'écrire la position d'une carte dans les paquets en base a. Si b est la position d'une carte, alors $b - 1 \leq a^n - 1$ donc il s'écrit avec n chiffres en base a (on les appellera ses a-chiffres). On notera donc :

$$b = \sum_{i=0}^{n-1} b_i a^i + 1, \text{ avec pour chaque } i,\ b_i \in \{0, \dots, a - 1\}.$$

Ainsi dans le tour classique $b = 9b_2 + 3b_1 + b_0 + 1$, avec $b_i \in \{0, 1, 2\}$ comme ci-dessus, et s'il y a 100 cartes, alors $b = 10b_1 + b_0 + 1$ avec b_i les chiffres usuels.

Alors $b - 1 = qa + r$ avec $q = \sum_{i=1}^{n-1} b_i a^{i-1}$ et $r = b_0$.

Ainsi, lors de la distribution, la carte b arrive en $(q + 1)$-ième place dans la $(b_0 + 1)$-ième colonne. Si on place cette colonne en $(k + 1)$-ième place au-dessus face cachée dans le tas, la carte se retrouve en position $b' = k.a^{n-1} + q + 1$ dans le tas reconstitué.

Résultat 3. La nouvelle place est donc

$$b' = \sum_{i=0}^{n-1} b'_i a^i + 1, \text{ avec } b'_{n-1} = k \text{ et pour } i = 0 \text{ à } n - 2,\ b'_i = b'_{i+1}$$

Les a-chiffres ont glissé d'un rang vers la droite, le premier étant remplacé par k. Le dernier chiffre initial b_0 n'apparaît plus.

III AMENER UNE CARTE CHOISIE EN UNE POSITION CHOISIE

1. Amener la carte au milieu du paquet pour un nombre impair de cartes

On a pu observer pour un paquet de 27 cartes que :

- En mettant la colonne de la carte souhaitée au milieu du tas (k = 1) après distribution, la carte se trouvait alors en position b' tel que $10 \leq b' \leq 18$, c'est-à-dire avec $b_2' = k = 1$.
- Si on redistribue et que l'on met la colonne souhaitée (la colonne $b_0' + 1 = b_1 + 1$) au milieu, la carte arrive en position b'' comprise entre 13 et 15 : $b_2'' = 1$ et $b_1'' = 1$.
- On recommence en mettant à nouveau la colonne souhaitée (la colonne $b_0'' + 1 = b_2 + 1$) au milieu, et la carte se trouve maintenant en $14 = 9 \times 1 + 3 \times 1 + 1 + 1$-ième position, donc au milieu du paquet.

Considérons maintenant un paquet de a^n cartes pour un entier a impair. La position centrale est la position cible M définie par

$$M - 1 = \frac{a^n - 1}{2} = \frac{a-1}{2}\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1 \right),$$

dont tous les chiffres en base a sont $m = \frac{a-1}{2}$. L'entier $m + 1$ est alors également la position de la colonne centrale. Ainsi dans l'exemple précédent $m = 1$ et $M = 14$.

Pour amener la carte petit à petit au milieu du tas, on commence par mettre sa colonne ($b_0 + 1$) au milieu du paquet (en position $m + 1$) : cela conduit la carte dans le tas recomposé en position $b' = ma^{n-1} + b_{n-1}a^{n-2} + \cdots + b_2 a + b_1 + 1$.

On a décalé à les n - 1 derniers a-chiffres d'une place vers la droite, et mis m en premier a-chiffre.

On recommence : la colonne $b_1 + 1$ est mise au milieu, puis $b_2 + 1$, etc…

Résultat 4. La carte se retrouve en i étapes, par une récurrence immédiate, en position

$$ma^{n-1} + ma^{n-2} + \cdots + ma^{n-i} + b_{n-1}a^{n-i-1} + \cdots + b_i + 1.$$

Ainsi à partir de $i = n$, la carte est stabilisée en position centrale dans le paquet.

Remarque : On peut remarquer que pour que le tour fonctionne à coup sûr, il faut distribuer et recomposer au moins n fois !!!

2. Amener la carte en haut ou en bas du paquet

On a vu qu'en mettant la colonne contenant la carte en haut du paquet (k = 0), la carte se retrouve en position $q + 1$ du paquet. Ainsi

- Pour 100 cartes : $b = 10b_1 + b_0 + 1$, arrive ainsi en $b' = 0 \times 10 + b_1 + 1$. On recommence, elle est distribuée en 1ère position de sa colonne, puis arrive en $b'' = 0 \times 10 + 0 + 1 = 1$, donc en haut !

- Pour 27 cartes, $b = 9b_2 + 3b_1 + b_0 + 1$ est conduite la première fois en $b' = 9 \times 0 + 3b_2 + b_1 + 1$, puis en $b'' = 9 \times 0 + 3 \times 0 + b_2 + 1$ et à la troisième manipulation en $b''' = 9 \times 0 + 3 \times 0 + 0 + 1 = 1$, donc en haut.
- En général : cette manipulation effectuée n fois fait glisser progressivement les a-chiffres vers la droite en plaçant 0 en premier chiffre. Ça marche encore !
- Symétriquement, mettre à chaque fois la colonne de la carte en bas du paquet (position a donc $k = a - 1$) face cachée amène en n fois la carte en bas du paquet, en position $(a-1)a^{n-1} + \cdots + (a-1)a + (a-1) + 1 = a^n$.

3. Choisir la position pour 100 cartes

Si la cible est la position $c = 10c_1 + c_0 + 1$ (donnés par l'écriture décimale de $c - 1$)

- Après une première distribution, on recompose en positionnant la colonne $b_0 + 1$ en $(c_0 + 1)$-ième place au-dessus face cachée. La carte se trouve en position $b' = 10c_0 + b_1 + 1$;
- Après redistribution on amène la colonne $b_1 + 1$ en $c_1 + 1$. La carte se trouve en c. C'est facile !! Même pas de calcul à faire...

4. Choisir la position dans le cas général

Si la cible est la position $c = \sum_{i=0}^{n-1} c_i + 1$, on place successivement la colonne de la carte (colonne $b_0 + 1$ puis $b_1 + 1$…) en $c_0 + 1$ puis en $c_1 + 1$, $c_2 + 1$,…. Les a-chiffres de la position sont décalés progressivement vers la droite tandis que les premiers chiffres sont remplacés par les c_i pour i allant de 0 à n.

Il " suffit "donc de calculer les a-chiffres de c pour effectuer le tour ! Le magicien a besoin d'un peu de temps et de concentration pour cela. On peut remarquer que comme précédemment, pour que le tour fonctionne, il faut faire n manipulations.

Faute de temps, les participants n'ont pas pu tenter d'effectuer le tour. Mais ils auraient pu constater que cet exercice de calcul mental, sous la pression du public, n'est pas toujours si simple.

C'est pourquoi la magicienne disposait dans la première phase de l'atelier d'une « antisèche » décrivant les 3 actions à produire dans l'ordre pour amener la carte en position cible donnée par le public. Un assistant pourra détourner l'attention du public pendant cette « triche » du magicien. Gergonne, en référence à Guyot, recommande également l'utilisation d'un tel stratagème :

> Si donc on a sous les yeux un tableau qui présente la correspondance entre les vingt-sept manières dont on a pu relever les paquets trois fois consécutivement, et le rang que chaque système de relèvement assigne à la carte pensée, rien ne sera plus facile que de trouver cette carte. L'ouvrage cité prescrit de faire construire une lunette mystérieuse, telle qu'en y regardant on n'y aperçoive que ce tableau, qui s'y trouvera caché intérieurement. A chaque opération, on feindra de regarder les paquets avec cette lunette, comme pour tâcher de discerner la carte pensée ; et on en prendra occasion de contempler le tableau, et d'y lire ce qu'on a à faire, pour que cette carte se trouve à la fin dans le jeu à la place qu'on lui aura assignée à l'avance. (Gergonne, p 277-278)

IV- QUELQUES EXPÉRIMENTATIONS DE LA 4IÈME À LA 1ÈRE

1. Faits généraux

L'atelier s'est terminé par des retours d'expérimentation menés par les membres du groupe IREM jeux de Montpellier.

1. Premier constat : ils ont envie de savoir faire !… mais pas vraiment forcément de comprendre. Nous, on veut qu'ils comprennent ce qu'on utilise :
   - reste, quotient, écriture en base 10 et en base 3,
   - raisonnement,
   - modélisation et représentation du paquet, des actions.

   Donc on veut qu'ils découvrent par eux-mêmes "le truc".
2. Deuxième constat : ils sont incapables (pour beaucoup) de distribuer des cartes...
3. Des difficultés à décrire sont inhérentes aux actions : nécessité de se mettre d'accord. On retourne les cartes, faces cachées, haut, bas...
4. Certains chemins pris par les cartes sont plus visibles que d'autres : ce seront les points d'appui pour commencer à modéliser.
5. À partir de la 3ième, la présence de cartes à jouer induit souvent pour les élèves un modèle probabiliste... C'est difficile de penser à autre chose.

2. Des difficultés de modélisation

Deux choix de numérotation sont possibles qui ont tous les deux des avantages et des inconvénients :

- Le choix fait ici : les numérotations se font à partir de 1.
  - C'est beaucoup plus naturel et proche du tour de magie initial : on compte jusqu'à 14.
  - On peut utiliser le « 6 qui prend » pour la base 10.
  - Les décompositions utilisées sont toujours celles de b - 1, on rajoute 1 partout, il y a des décalages. Mais ils sont toujours les mêmes.
  - Les élèves doivent repérer ces décalages.
  - Le choix de travailler avec 100 cartes est très porteur.
- On peut numéroter les cartes à partir de 0, et compter toujours à partir de 0.
  - Ce n'est pas naturel,
  - Aucun jeu avec cette numérotation n'existe.
  - On peut utiliser des cartes blanches (vendues dans le commerce et qui seront alors effaçables) et les marquer en base 3 (ou 10) à partir de 0.
  - On peut ainsi travailler avec des cartes codées par une écriture à 3 chiffres 000, 001, 002, 010, 011, 012 . . . 222.

- Les actions sont plus faciles à coder,
- C'est difficile de leur faire coder les cartes eux-mêmes.

C'est le choix qui a été fait le plus souvent dans nos expérimentations, sans utiliser de paquet de 100 cartes, quand il y avait des petits groupes d'élèves (stages MathC2+ par exemple, ou avec des classes de première et deux encadrants).

3. Quelques productions d'élèves

Les participants ont pu alors chercher la logique de quelques productions d'élèves de 4ième auxquels on avait demandé d'expliquer pourquoi la carte choisie se trouvait à la fin en 14-ième position après avoir mis la colonne choisie trois fois de suite au milieu du paquet reconstitué.

L'interprétation n'est pas simple si l'on ne s'est pas attaché non seulement à la position des cartes en base 3 mais aussi à des encadrements de cette position au fur et à mesure du tour.

Des tentatives de représentations :

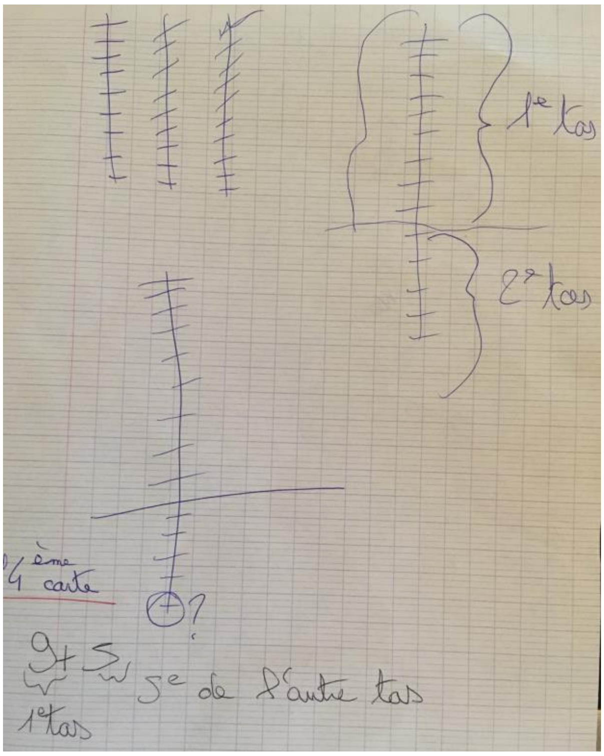


Figure 3. Représentation 1

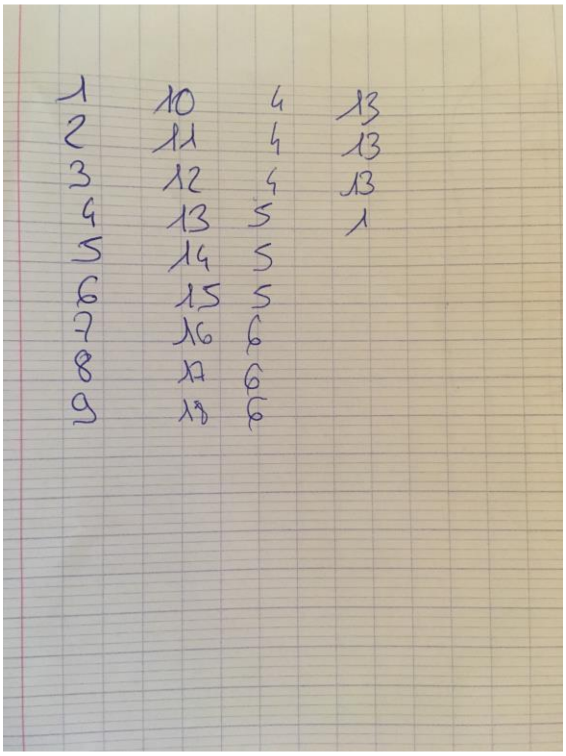


Figure 4. Représentation 2

La première représentation montre que les élèves ont compris comment la position de la carte évolue par recomposition du paquet. Les trois colonnes sont représentées contenant chacune 9 cartes, puis un exemple de position de carte est donné : pour la cinquième d'un paquet.

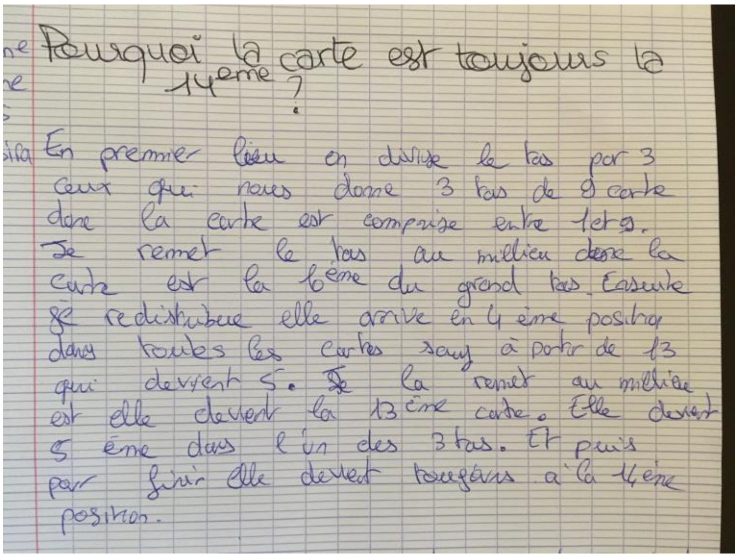
Il se trouve que ce choix n'est pas anodin puisque la carte arrive donc en 14-ième position dès la première reconstitution, puis se stabilise à cette 14-ième position. La représentation après redistribution puis rassemblement la place encore en 9+5 = 14-ième position.

La deuxième représentation énumère dans la première colonne les positions possibles d'une carte dans sa colonne, et dans la deuxième la position correspondante dans le tas reconstitué (position dans la colonne +9). Dans la troisième colonne, on trouve la position de la même carte dans sa colonne après redistribution, et dans la quatrième (non achevée), la position dans le tas recomposé. Il manquerait une cinquième et une sixième colonne pour obtenir une représentation complète. Il se peut que les élèves aient remarqué que l'on retournait à la première colonne et que ce n'était pas la peine de continuer : les trois premières colonnes suffisent à pister la position d'une carte donnée.

Des descriptions factuelles :

La première description proposée ci-dessous commence plutôt par un fait numérique : distribuer revient à une division du nombre de cartes. Malgré un premier constat d'encadrement du rang de la carte dans sa colonne, les élèves ne poursuivent pas par des encadrements qu'ils n'ont sans doute pas vraiment les moyens de traiter logiquement. Ils considèrent à la fois le cas particulier de la première carte d'une colonne, qui devient 10-ième du paquet puis 4-ième de sa colonne dans la distribution suivante, mais aussi les deux suivantes qui arrivent également en 4-ième position, ainsi que celles d'après qui sont annoncées comme arrivant en 5-ième position quand on redistribue.

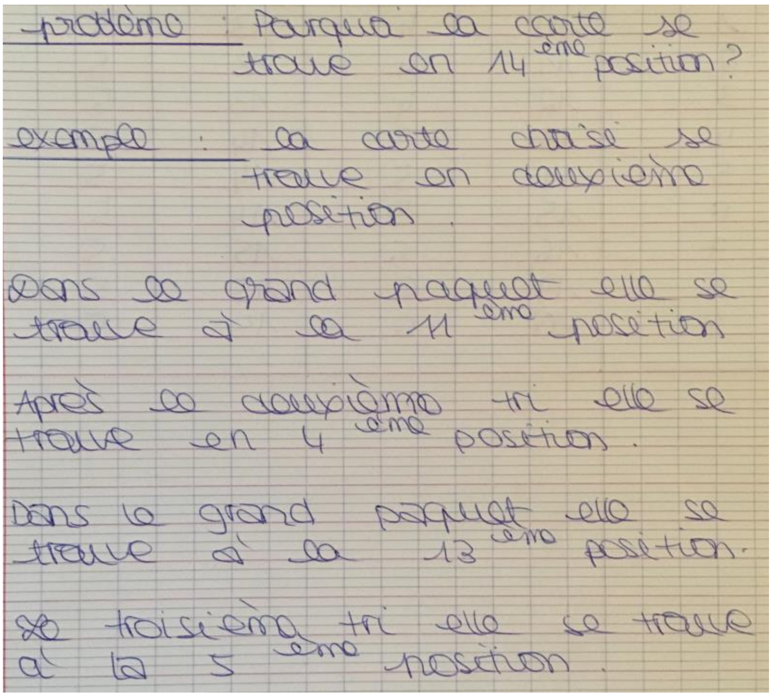
Dans leur optique de ne considérer que le chemin de la dixième carte, les élèves n'ont pas remarqué que seules les cartes entre les rangs 13 et 15 sont distribuées en cinquième position de leur colonne. Ils pistent correctement les positions de la première carte d'une colonne.


Pourquoi la carte est toujours la 14ème ?

En premier lieu on divise le tas par 3 ceux qui nous donne 3 tas de 9 carte donc la carte est comprise entre 1 et 9. Je remet le tas au millieu donc la carte est la 6ème du grand tas. Ensuite je redistribue elle arrive en 4 ème position dans toutes les cartes sauf à partir de 13 qui devient 5. Je la remet au millieu est elle devient la 13ème carte. Elle devient 5 ème dans l'un des 3 tas. Et puis pour finir elle devient toujours à la 14ème position.

Figure 5. Description 1

Dans la dernière description, le choix de prendre un exemple, qui se veut peut-être générique, est plus conscient. Là encore, les élèves ont bien compris ce qui se passe en distribuant et rassemblant les cartes.


problème : Pourquoi la carte se trouve en 14ème position ?

exemple : la carte choisi se trouve en deuxième position.

Dans le grand paquet elle se trouve à la 11ème position

Après le deuxième tri elle se trouve en 4ème position.

Dans le grand paquet elle se trouve à la 13ème position.

Le troisième tri elle se trouve à la 5ème position.

Figure 6. Description 2

V- CONCLUSION DE L'ATELIER

L'atelier était construit pour donner de réels éléments mathématiques permettant de comprendre le tour dans une assez grande généralité, ce qui en a fait un atelier relativement exigeant du point de vue de l'attention aux mathématiques et au raisonnement.

Cela n'a sans doute pas permis complètement aux participants de se projeter dans l'analyse avec des élèves d'un tel tour de magie. Néanmoins il a donné les bases d'une activité originale pour travailler l'arithmétique, et éventuellement l'écriture en bases, avec les élèves. Le groupe jeux de l'IRES de Montpellier travaille encore actuellement sur la mise en place en classe avec divers formats et devra également tenter ce travail avec des élèves de terminale en mathématiques expertes.

Une brochure est en préparation, ainsi qu'un article plus complet élargissant le problème à d'autres nombres de cartes.

VI- BIBLIOGRAPHIE

Guyot, Edme-Gilles (1769). *Nouvelles récréations physiques et mathématiques*, tome III, Gueffierpage 267.

Gergonne, Joseph-Diez (1813-1814).Récréations mathématiques – Recherches sur un tour decartes, *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 4, p. 276-283.
http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__276_1

Quintero, Roy, Guérini, Christian (2010). Le "tour de cartes de Gergonne" ; d'un article datant de prèsde deux cents ans à une généralisation en plusieurs étapes, *Quadrature* n^0 78, p. 8-17.