PIÈCES DE MONNAIE : DIOPS À TOUT PRIX ?

Thierry CHEVALARIAS
Enseignant, Collège saint Exupéry
CII Collège, IREM&S Poitiers
thierry.chevalarias@ac-poitiers.fr

Stéphanie DEWYSPELAERE
Enseignante, Collège du Mont des Princes
CII Collège, IREM de Grenoble
Stephanie.dewyspelaere@ac-grenoble.fr

Jérôme HERISSET
Enseignant, Collège La Fontaine Margot Keranroux
CII Collège, IREM de Brest
jerome.herisset@ac-rennes.fr

Résumé
Lors de cet atelier, les membres de la CII-Collège ont présenté une activité expérimentée dans des classes afin de permettre un travail sur la notion de preuve en mathématiques. Cette activité portait sur la validité d'un système de monnaie basé sur seulement deux types de pièces de valeurs différentes.

A partir de la résolution du problème et de l'analyse de productions d'élèves, les participants ont listé les connaissances mathématiques en jeu en lien avec les programmes du collège.

L'analyse de ces productions a également permis de catégoriser plusieurs types de raisonnements et de justifications chez les élèves, à partir desquels les participants ont pu travailler, en utilisant les travaux de N. Balacheff concernant les types de preuves. Ainsi ils ont pu envisager comment gérer la phase d'institutionnalisation en regard d'apports théoriques relatifs à la preuve en mathématiques.

I - PRÉSENTATION DE LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le cadre de travaux de la commission CII-Collège sur la preuve en arithmétique, les membres ont proposé une activité inspirée de l'exercice proposé dans les évaluations PISA 2009 ci-dessous :

PIÈCES DE MONNAIE – *QUESTION 1*

Serait-il concevable de mettre en place un système de pièces de monnaie en n'utilisant que les valeurs 3 et 5 ? Plus spécifiquement, quels sont les montants qui pourraient être obtenus sur cette base ? Un tel système serait-il souhaitable ?

Figure 1. Énoncé extrait des évaluations PISA 2009

Il s'agissait alors de l'énoncé d'un exercice à prise d'initiative. Plusieurs démarches de raisonnement étaient envisagées.

La Commission Inter-IREM Collège propose une adaptation de cet énoncé, exploitable à tous les niveaux de classe du collège. Un article à paraitre explicitera davantage les choix pédagogiques et didactiques de mise en œuvre de cette situation d'apprentissage. Voici l'énoncé du problème retenu :

L'île de Diophée a un système de monnaie particulier: les habitants n'utilisent que des pièces de 9 diops et 11 diops. Ce système de monnaie permet-il de vendre ou d'acheter des objets à n'importe quel prix ?

Dans un premier temps, les participants ont résolu le problème puis se sont interrogés sur les démarches possibles des élèves et sur les objectifs d'enseignement visés.

Il s'agit de faire travailler les élèves sur la notion de preuve. Les connaissances mathématiques mises en jeu sont des notions d'arithmétique telles que la notion de multiple, de diviseur et de nombres premiers entre eux.
La CII a proposé le déroulé suivant à ses classes :
- une phase de travail individuel
- une phase de travail de groupe avec production d'un compte-rendu commun
- une mise en commun visant à analyser avec la classe les arguments avancés par chacun des groupes. Celle-ci aboutit à une trace écrite portant sur « ce qu'est prouver ».
- Un prolongement possible : « Quelles valeurs entières peut-on choisir pour les deux pièces pour pouvoir vendre ou acheter des objets à n'importe quel prix ? »

Les élèves ne disposent pas de la connaissance mathématique permettant la résolution experte du problème. L'objectif de cet atelier est de sensibiliser les enseignants sur le fait que les élèves peuvent tout de même produire des preuves variées en analysant des productions d'élèves issues de nos expérimentations.

II - ANALYSE DES PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

La preuve chez Balacheff

Les participants ont analysé une sélection de productions d'élèves et les ont catégorisés en lien avec la typologie des preuves de Nicolas Balacheff (1987), présentée au préalable.

Voici un tableau récapitulatif de ces types de preuve.

Preuves pragmatiques	Empirisme naïf	Vérification sur quelques exemples, une conjecture possible mais sans remise en question. La question de la validité n'est pas posée.
	Expérience cruciale	Exemples permettant une conjecture sur la relation entre les objets. La question de la généralisation est posée et mise à l'épreuve.
Exemple générique		"Explication des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus"[1].
Preuves intellectuelles	Expérience mentale	Utilisation d'un représentant considéré comme quelconque. La preuve montre une décontextualisation et l'analyse des relations entre les objets.
	Calcul sur les énoncés	Manifestation d'une construction intellectuelle fondée sur des théories. La preuve ne s'appuie pas sur l'expérience.

Figure 2. Typologie des preuves selon N. Balacheff (1987)

Productions d'élèves

Nous avons retenu et analysé quelques productions d'élèves afin de les catégoriser. Nous résumons ci-dessous ces éléments d'analyse. L'ordre des productions dépend du type de preuve convoqué.

L'élève fait des hypothèses sur des prix envisageables , il écarte des valeurs trop grandes. Il n'y a pas de raisonnement apparent.

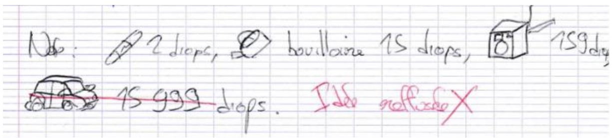


Figure 3. Production 1

Par une suite d'essais, il tente de trouver comment fabriquer différents prix. Il n'y a pas de conclusion apportée par les élèves.

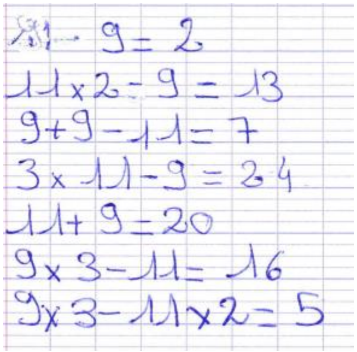


Figure 4. Production 2

Cette production semble témoigner d'une volonté de partitionner l'ensemble des entiers (multiples de 9, de 11 et certaines combinaisons linéaires de ces deux nombres).

Nous considérons qu'il s'agit d'une preuve de type exemple générique dans la mesure où 9 et 11, dans leur production, engendrent un ensemble de nombres.

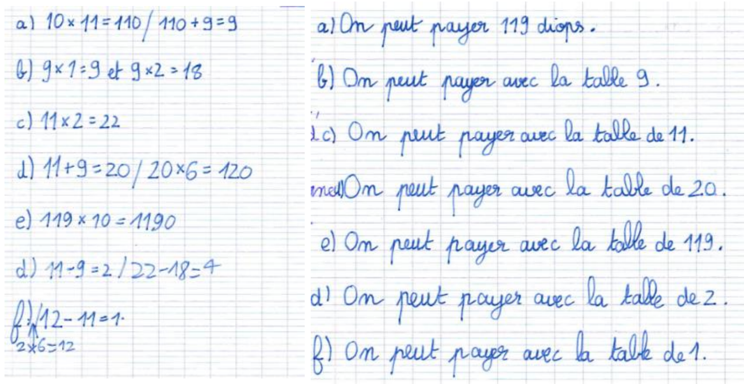


Figure 5. Production 5

L'élève tente de produire l'ensemble des nombres impairs supérieurs à 11 puis inférieurs à 9. Il réussit à produire une combinaison linéaire égale à 1. Mais il n'envisage pas de construire tous les nombres à l'aide de cette dernière composition .

Nous la qualifierions cette production d'exemple générique, nous repérons une référence aux nombres impairs et une structure commune dans les combinaisons linéaires (il ajoute 1 aux coefficients multiplicateurs des nombres 11 et 9 à chaque étape).

Nous constatons que l'élève ne cherche pas à produire les nombres pairs une fois déterminée une combinaison égale à 1. On peut faire l'hypothèse qu'il n'envisage pas des nombres pairs en partant des nombres impairs. Il semble nécessaire de faire verbaliser à l'élève les raisons pour lesquels il s'est arrêté là.

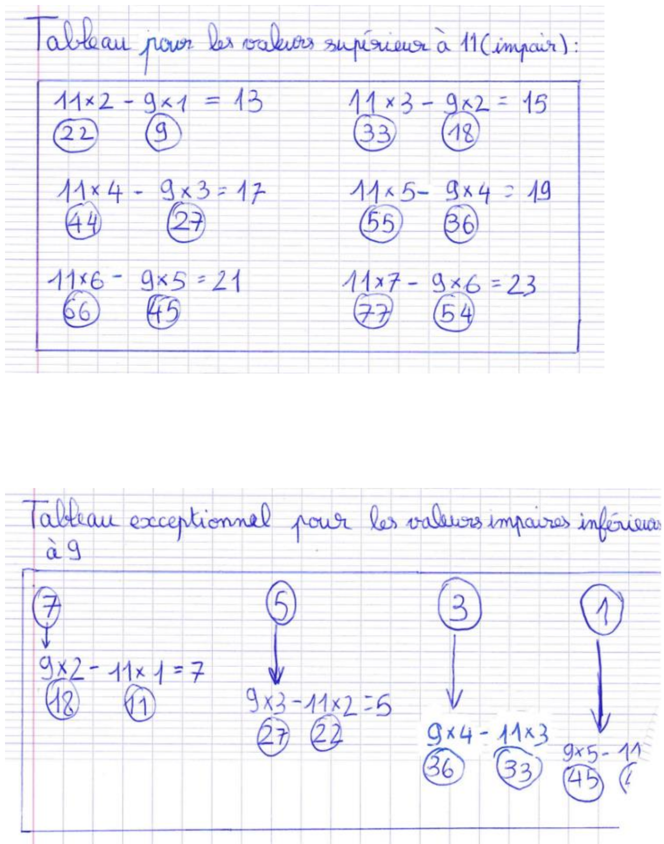
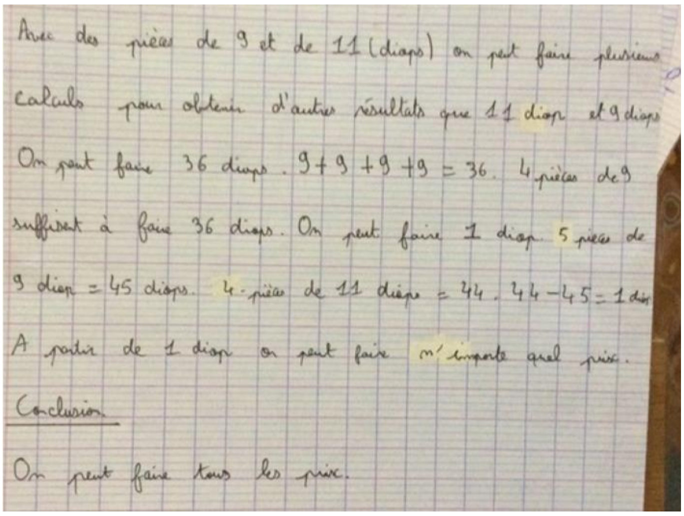


Figure 6. Production 7

L'élève détermine une combinaison égale à 1, il conclut que tous les prix sont possibles. Nous ne trouvons pas de justification de cette affirmation.

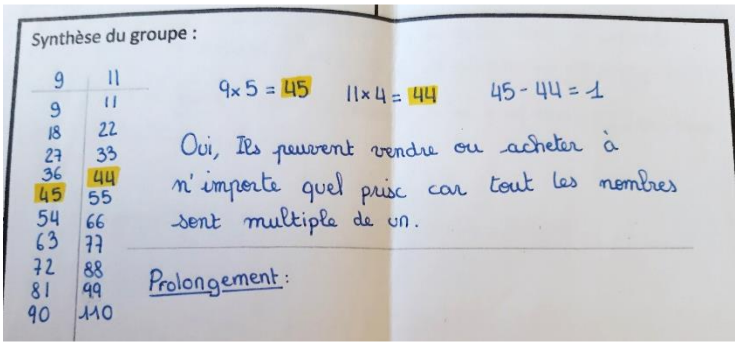
Nous choisissons de qualifier cette production d'expérience cruciale.



Avec des pièces de 9 et de 11 (diops) on peut faire plusieurs calculs pour obtenir d'autres résultats que 11 diop et 9 diops.
On peut faire 36 diops. 9+9+9+9 = 36. 4 pièces de 9 suffisent à faire 36 diops. On peut faire 1 diop. 5 pièces de 9 diop = 45 diops. 4 pièces de 11 diops = 44. 44−45 = 1 diop.
A partir de 1 diop on peut faire n'importe quel prix.
Conclusion
On peut faire tous les prix.

Figure 7. Production 17

L'élève fait la liste des multiples successifs de 9 et 11 pour repérer deux nombres dont l'écart est égal à 1. Il a identifié l'importance du nombre 1 et formule le fait que tous les autres se construisent comme le produit de « 1 » et de n'importe quel nombre. Il s'agit ici d'une preuve intellectuelle de type expérience mentale.



Synthèse du groupe :

9	11
9	11
18	22
27	33
36	44
45	55
54	66
63	77
72	88
81	99
90	110

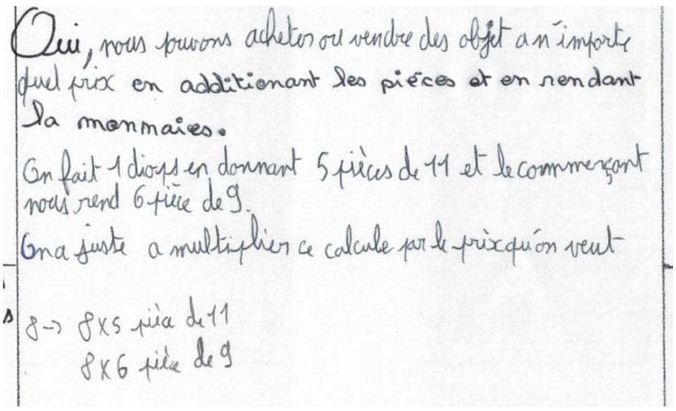
9×5 = 45 11×4 = 44 45 − 44 = 1

Oui, Ils peuvent vendre ou acheter à n'importe quel prisc car tout les nombres sont multiple de un.

Prolongement :

Figure 8. Production 9

L'élève rend compte d'une combinaison linéaire égale à 1 puis explique dans un langage naturel et non algébrique comment produire n'importe quel prix à partir de cette combinaison linéaire. Il s'agit selon nous d'une preuve intellectuelle de type expérience mentale.



Oui, nous pouvons acheter ou vendre des objet a n'importe quel prix en additionant les pièces et en rendant la monnaies.
On fait 1 diops en donnant 5 pièces de 11 et le commerçant nous rend 6 pièce de 9.
On a juste a multiplier ce calcule par le prix qu'on veut

8 → 8×5 pièce de 11
8×6 pièce de 9

Figure 9. Production 18

Les participants se sont impliqués dans l'analyse des productions élèves, ils ont constaté que délimiter les caractéristiques pour chaque type de preuve est parfois difficile. Les éléments de contexte sont souvent déterminants pour choisir d'associer une production d'élèves à un type de preuve. Ils ont pu constater la grande variété des productions d'élèves.

Institutionnalisation

L'institutionnalisation dépend du niveau d'enseignement et des éléments observés avec les élèves.
La question posée est alors de déterminer quelques critères pour produire une preuve.
Une institutionnalisation pourrait être, en regard avec les productions précédentes :

Bilan :

- Pour montrer qu'une conjecture est fausse, on peut produire un contre-exemple.
- Plusieurs exemples vérifiant la conjecture ne suffisent pas pour montrer qu'une conjecture est vraie.

CONCLUSION

Analyser les productions des élèves en fonction des types de preuve permet à l'enseignant de prendre conscience de la diversité des types de preuve existants au sein d'une même classe. Il peut ainsi confronter les élèves aux différentes productions afin de les sensibiliser aux différentes façons de prouver. Il est nécessaire de prendre en compte les preuves non intellectuelles pour accompagner l'évolution des processus de preuve des élèves. Il semble important de proposer ce type de problèmes ouverts à tout niveau de classe pour développer les capacités des élèves à prouver. C'est aussi l'occasion de construire des bilans dont l'objectif est de sensibiliser à la preuve en mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation (Proving Processes and Situations for Validation). *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147–176. http://www.jstor.org/stable/3482413

ANNEXES

Enoncé et son prolongement

L'île de Diophée a un système de monnaie particulier : les habitants n'utilisent que des pièces de 9 Diops et des pièces de 11 Diops.

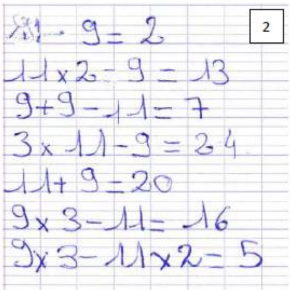
Ce système de monnaie permet-il de vendre ou d'acheter des objets à n'importe quel prix ?

Prolongement : Quelles valeurs entières peut-on choisir pour les deux pièces pour vendre ou acheter des objets à n'importe quel prix ?

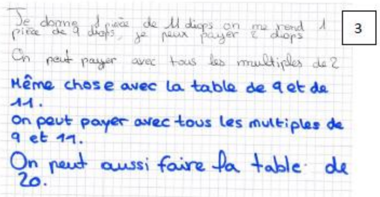
Productions d'élèves analysées au cours de l'atelier


Nb : 2 diops, bouilloire 15 diops, 159 diops
~~15 999~~ diops. 1 15 multiple X

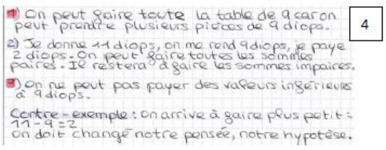
1


11 - 9 = 2
11x2 - 9 = 13
9+9 - 11 = 7
3x 11 - 9 = 24
11+ 9 = 20
9x 3 - 11 = 16
9x 3 - 11x2 = 5

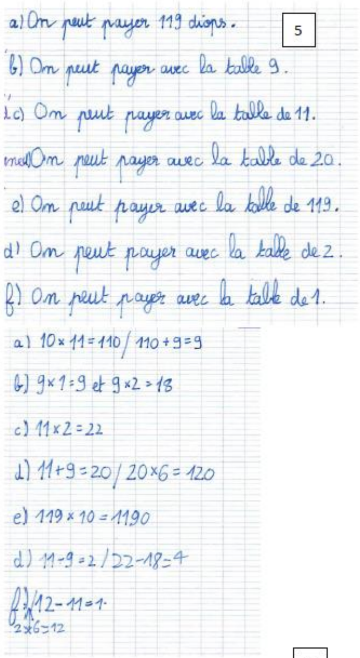
2


Je donne 1 pièce de 11 diops on me rend 1 pièce de 9 diops, je peux payer 2 diops
On peut payer avec tous les multiples de 2
Même chose avec la table de 9 et de 11.
On peut payer avec tous les multiples de 9 et 11.
On peut aussi faire la table de 20.

3

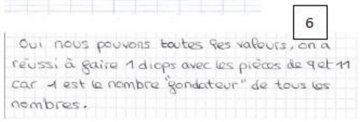

1) On peut faire toute la table de 9 car on peut prendre plusieurs pièces de 9 diops.
2) Je donne 11 diops, on me rend 9 diops, je paye 2 diops. On peut faire toutes les sommes paires. Il restera à faire les sommes impaires.
3) On ne peut pas payer des valeurs inférieures à 9 diops.
Contre-exemple : on arrive à faire plus petit : 11 - 9 = 2
on doit changé notre pensée, notre hypotèse.

4


a) On peut payer 119 diops.
b) On peut payer avec la table 9.
c) On peut payer avec la table de 11.
On peut payer avec la table de 20.
e) On peut payer avec la table de 119.
d) On peut payer avec la table de 2.
f) On peut payer avec la table de 1.

a) 10 × 11 = 110 / 110 + 9 = 9
b) 9 × 1 = 9 et 9 × 2 = 18
c) 11 × 2 = 22
d) 11 + 9 = 20 / 20 × 6 = 120
e) 119 × 10 = 1190
d) 11 - 9 = 2 / 22 - 18 = 4
f) 12 - 11 = 1
2 × 6 = 12

5


Oui nous pouvons toutes les valeurs, on a réussi à faire 1 diops avec les pièces de 9 et 11 car 1 est le nombre "fondateur" de tous les nombres.

6

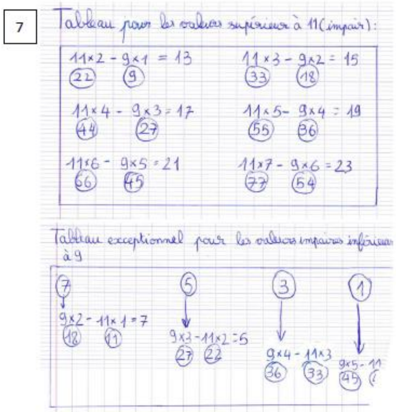
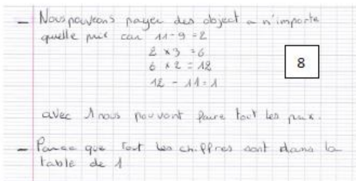


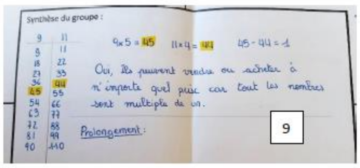
Tableau pour les valeurs supérieur à 11 (impair) :
11×2 - 9×1 = 13 (22) (9)
11×3 - 9×2 = 15 (33) (18)
11×4 - 9×3 = 17 (44) (27)
11×5 - 9×4 = 19 (55) (36)
11×6 - 9×5 = 21 (66) (45)
11×7 - 9×6 = 23 (77) (54)

Tableau exceptionnel pour les valeurs impaires inférieur à 9
7 : 9×2 - 11×1 = 7 (18) (11)
5 : 9×3 - 11×2 = 5 (27) (22)
3 : 9×4 - 11×3 (36) (33)
1 : 9×5 - 11 (45)

7


– Nous pouvons payer des object a n'importe quelle prix car 11 - 9 = 2
2 × 3 = 6
6 × 2 = 12
12 - 11 = 1
avec 1 nous pouvont faire tout les prix.
– Parce que tout les chiffres sont dans la table de 1

8


Synthèse du groupe :

9	11
9	11
18	22
27	33
36	44
45	55
54	66
63	77
72	88
81	99
90	110

9×5 = 45 11×4 = 44 45 - 44 = 1
Oui, ils peuvent vendre ou acheter à n'importe quel prix car tout les nombres sont multiple de un.
Prolongement :

9

• On a voulu trouver le chiffre 1 pour ensuite, réussir à faire TOUS les chiffres, nous avons procédé ainsi, pour réalisé le calcul :

$$\left.\begin{array}{l} 11 \times 5 = 55 \\ - \\ 9 \times 5 = 45 \end{array}\right\} 55 - 45 - 9 = 1$$

Nous conclusions, donc, que ce système de monnaie n'est pas pratiques mais permet de vendre et d'acheter des objets à n'importe quel prix.

10

Non on ne peux pas car si il faut acheté un chose a 3€ mais que tu as 11 ou 9 il y aura toujour + que se qui est demender. Et si tu veux ~~acheter~~ vendre un aubjet à 10 euro tu peux pas car tu n'a que 9 dieps donc il y a pas assé mais si tu donne 11 € alor qu'il ta ~~donné~~ demendé main bas sa va car tu lui aura donné plus donc il aura eu se que tu lui a demande + 1€ !!.

11

Oui. C'est pratique pour acheté des objets. Car si on va à la caisse pour payer, le vendeur devrait rendre de la monnaie de 1,2 dieps; pour faire juste, le prix, en temps normal, mais vu qu'il n'a que des pièces de 9 et de 11 dieps, il donnera plus que la somme donner, donc ça serait pratique car la monnaie rendue pourrait servir pour les prochains achats.

12

Oui, cela permet de acheter ou de vendre car si on donne n'importe quel prix, et qu'on l'additionne ou qu'on le soustrait. On arrivera toujours au prix auquel il est vendue. Si un objet est vendu 16 dieps.
Si on donne 8 pièces de 11 = 88.
Si le vendeur nous rend 8 pièce de 9 = 72
Cela fera 16. Si on a un objet est vendu 12 dieps.
Le client donne 6 pieces de 11 = 66
Le vendeur donne 6 pièce de 9 = 54 donc 12 dieps
Objet vendue a 13 dieps
~~Le~~ c 2 pièces de 11 et 1 pièce de 9 = 13 dieps

13

Synthèse du groupe :

On sait que notre système de numération est basé sur le 1. Si on trouve le 1, on peut trouver tous les autres nombres en multipliant.
Or, pour obtenir le 1, il faut faire (11×5) − (9×6) = 1
alors, pour obtenir le 9, par exemple, on fait :
((11×5) − (9×6)) × 9 = 9
Donc, on peut acheter des objets à n'importe quel prix avec des pièces de 9 et de 11.
Il y a aussi d'autres façons de trouver le 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 par exemple pour trouver le 4 on peut faire (11+11) − (9+9)

14

On a dû trouver si avec des pièces de 9 dieps et de 11 c'était possible de payer des objets à tout les prix. On a ~~[illegible]~~ d'abord chercher comment trouver des prix exact comme 9×2 = 18 ou 11×3 = 33 mais nous ne pouvons pas tout utiliser avec cette technique, alors nous avons trouvé comment faire 1

15

Oui, on peut acheter ou vendre à tous les prix car :
Exemple : si on achète un objet à 3 dieps on donne 4 pièces de 9 = 36 dieps et on nous rembourse 3 pièces de 11 = 3 dieps.
Exemple : si on achète un objet à 1 diep on donne 5 pièces de 9 = 45 dieps et on nous rembourse 4 pièces de 11 = 1 diep
Nous pouvons acheter tous les objets à tous les prix car à partir du nombre 1 on n'a juste a faire le calcul qui est de multiplier fois le nombre demander.

16

Problème Les Dieps

Avec des pièces de 9 et de 11 (dieps) on peut faire plusieurs calculs pour obtenir d'autres résultats que 11 diep et 9 dieps
On peut faire 36 dieps. 9 + 9 + 9 + 9 = 36. 4 pièces de 9 suffisent à faire 36 dieps. On peut faire 1 diep. 5 pièces de 9 diep = 45 dieps. 4 pièces de 11 dieps = 44. 44 − 45 = 1 diep
A partir de 1 diep on peut faire n'importe quel prix.

Conclusion

On peut faire tous les prix.

17

Oui, nous pouvons acheter ou vendre des objet a n'importe quel prix en additionant les pièces et en rendant la monnaies.
On fait 1 dieps en donnant 5 pièces de 11 et le commerçant nous rend 6 pièce de 9.
On a juste a multiplier ce calcule par le prix qu'on veut
8 → 8×5 pièce de 11
8×6 pièce de 9

18