ENTRÉE DANS LA PREUVE EN ARITHMÉTIQUE : UN EXEMPLE D'USAGE DE LA SITUATION DU PLUS GRAND PRODUIT

Laurianne FOULQUIER
Formatrice en mathématiques, INSPE BORDEAUX
CII Collège, Irem d'Aquitaine
laurianne.foulquier@u-bordeaux.fr

Aurélie ROUX
Formatrice en mathématiques, INSPE CLERMONT AUVERGNE
CII Collège, Irem de Clermont-Ferrand
aurelie.roux@uca.fr

Résumé

En didactique des mathématiques, des recherches variées se sont intéressées aux processus de preuves. Le rôle de l'enseignant dans la mise en œuvre de situations mobilisant la preuve y apparaît toujours comme fondamental. Toutefois, les leviers dont disposent les enseignants pour agir en classe ordinaire sont peu décrits.

Nous nous intéressons aux pratiques de classe favorisant l'émergence de premières preuves dans les activités des élèves. La géométrie pourrait apparaitre comme le domaine privilégié pour mener ce travail, cependant, de nombreux articles montrent les difficultés que peuvent avoir les élèves dans ce domaine, en particulier celle à entrer dans la géométrie théorique liée à la résistance à se détacher des formes et propriétés visuellement reconnues (Duval, 1995). Ainsi, nous nous sommes naturellement tournées vers l'arithmétique que nous jugeons loin d'être incongrue pour développer des activités de preuve.

À travers cet atelier, nous cherchons à présenter des travaux que nous avons conduits dans le cadre d'un master en didactique questionnant les façons d'aménager une entrée progressive des élèves dans les activités de preuve au collège. Pour ce faire, nous proposons un exemple d'exploitation d'une activité qui a déjà fait l'objet de plusieurs publications : le problème du *Plus grand produit* (Artigue (2004), Argaud et al. (2005), Douaire (1999)).

Les participants ont résolu le problème avant d'envisager les procédures possibles d'élèves de cycle 4. Après un échange sur les définitions associées à la notion de preuve, nous avons exposé les travaux de Balacheff proposant une typologie générale des types de preuves. Nous présentons ensuite une séquence d'apprentissage imbriquant des situations d'action, formulation, validation, issues de la *Théorie des Situations Didactiques* (Brousseau, 1998), en appui sur le problème du *Plus grand produit* visant à favoriser l'entrée dans la preuve. Cette séquence a été expérimentée dans plusieurs classes.

Enfin, les participants ont pu analyser des productions d'élèves issues de la situation de validation à l'aide de la typologie présentée.

L'objectif de notre atelier est d'outiller les enseignants afin qu'ils portent un autre regard sur les processus de preuve de leurs élèves.

Dans cet article, nous présentons les différentes parties de l'atelier et nous concluons avec quelques réactions de participants.

I - PRÉSENTATION DU PROBLÈME

1. Choix des énoncés

Le problème choisi est un problème ouvert qui demande un bagage mathématique modeste. Il s'agit, parmi les décompositions additives d'un entier donné, de trouver celle qui a le plus grand produit. Cette situation a fait l'objet de plusieurs publications qui en proposent une analyse *a priori* (Artigue (2004), Argaud et al. (2005), Douaire (1999)).

Voici la suite d'énoncés soumise aux participants :

> **Premier énoncé :**
>
> Je vous donne le nombre 7. Décomposer 7 sous forme d'une somme, effectuer le produit des termes de la somme.
>
> Le nombre 7 peut s'écrire de plusieurs façons comme somme d'entiers, trouver parmi ces sommes celle(s) dont le produit est maximum.
>
> **Deuxième énoncé :**
>
> Trouver la décomposition en somme du nombre 23 correspondant au plus grand produit.
>
> **Énoncé général :**
>
> Parmi les décompositions additives d'un entier donné, trouver celle qui donne le plus grand produit.

Le premier énoncé vise l'appropriation du problème. Le nombre 7 est un petit nombre entier, il permet éventuellement de prouver que le plus grand produit a bien été trouvé puisqu'il est aisé de dresser la liste exhaustive de toutes les décompositions additives de 7. Ce premier exemple peut permettre de constater que la commutativité joue un rôle pour économiser le nombre de décompositions, que les décompositions comprenant des termes 1 ou 0 ne permettent pas de « gagner ».

Dans le deuxième énoncé, le nombre 23 est proposé de façon à ce que certaines observations faites sur le premier exemple puissent être mises à l'épreuve. Le nombre 23 reste encore un petit nombre entier mais suffisamment grand pour ne plus permettre de réaliser rapidement la liste des décompositions additives possibles. 7 est congru à 1 modulo 3 alors que 23 est congru à 2 modulo 3 ; ce qui conduit, comme nous allons le voir plus loin, à des décompositions gagnantes différentes.

2. Résolution mathématique

Intéressons-nous à la résolution mathématique du problème et aux procédures possibles de résolution des élèves.

Soit $n \in \mathbb{N}$ le nombre choisi :

$- \, si\ n \equiv 0[3], i.e. \exists k \in \mathbb{N}\ tel\ que\ n = 3k\ alors\ la\ décomposition\ cherchée\ est\ 3^k \times 2^0.$

$- \, si\ n \equiv 1[3], i.e. \exists k \in \mathbb{N}\ tel\ que\ n = 3k+1\ alors\ la\ décomposition\ cherchée\ est\ 3^{k-1} \times\ 2^2$

$ou\ encore\ 3^{k-1} \times 4.$

$- \, si\ n \equiv 2[3], i.e. \exists k \in \mathbb{N}\ tel\ que\ n = 3k+2\ alors\ la\ décomposition\ cherchée\ est\ 3^k \times 2^1.$

En effet,

- la décomposition additive optimale ne peut pas contenir de zéro car le produit des termes serait nul,
- la décomposition additive optimale ne peut pas contenir de 1 car si l'on ajoute ce 1 à l'un des autres termes, le produit devient supérieur. Pour tout couple d'entiers $(n_1\ ;\ n_2)$, $n_1 \times n_2 \times 1 < n_1 \times (n_2+1)$.
- nous allons maintenant montrer la propriété suivante : tout nombre supérieur ou égal à 5 peut se décomposer en deux termes supérieurs à 1 dont le produit est supérieur à ce nombre.

  Soit n un nombre entier, $n \geq 5, n = (n-2) + 2$, or $2 \times (n-2) = 2n - 4 = n + (n-4)$.
  Or, $(n-4) \geq 0$, donc $n + (n-4) \geq n$.
  De cette propriété, il découle que seuls des termes égaux à 2 ou 3 subsistent. En effet, $4 = 2 + 2$ et $2 \times 2 = 4$.
  Dès que l'on a plus de deux facteurs égaux à 2, comme $2 \times 2 \times 2 = 8$ que $2 + 2 + 2 = 3 + 3$ et que $3 \times 3 = 9 > 8$; chaque trinôme de termes égaux à deux doit être remplacé par un binôme de termes égaux à 3.

La résolution mathématique du problème demande elle aussi un bagage mathématique modeste et accessible des élèves de cycle 4.

3. Procédures de résolution des élèves

Lorsque nous les avons questionnés, les participants ont proposé plusieurs procédures de résolution, nous complétons cette liste avec nos observations dans les classes. Il est naturel de verbaliser une stratégie en prenant appui sur des exemples numériques. On peut donc faire l'hypothèse que les élèves vont faire émerger des stratégies de leurs premiers tests numériques.

- Procédure 1 : faire la liste exhaustive de toutes les décompositions additives possibles. Cette stratégie est rapidement vouée à l'échec car trop coûteuse. En effet, même pour des « petits » nombres entiers, le nombre de décompositions additives possibles est rapidement important.
- Procédure 2 : décomposer le nombre en deux termes. Dans ce cas, la parité du nombre joue un rôle dans la conclusion portée. Si le nombre est pair, le produit obtenu avec deux termes correspond au carré de la moitié du nombre de départ. Si le nombre est impair, le produit obtenu avec deux termes correspond au produit du nombre entier égal à la partie entière de la moitié du nombre et du nombre entier suivant. Cette procédure n'est plus valide pour les entiers supérieurs à 8.
- Procédure 3 : prendre des nombres proches de la moitié pour des décompositions en deux termes, ou du tiers pour des décompositions en 3 termes...
- Procédure 4 : décomposer le nombre en le plus de termes possibles. Cette procédure permet de comprendre qu'il faut exclure la présence de termes égaux à 1 puisque 1 est élément neutre de la multiplication.
- Procédure 5 : décomposer le nombre avec des 2, 3 et 4 sans chercher à rendre maximal le nombre de termes égaux à 3.
- Procédure 6 : décomposer avec le plus de termes égaux à 3 sans terme égal à 1.

II - COMMENT ANALYSER LES PREUVES PRODUITES PAR LES ÉLÈVES ?

1. Qu'appelle-t-on preuve ?

Un échange autour des conceptions des participants a montré la nécessité de s'accorder sur une définition du terme « preuve » et de le distinguer de « démonstration » et « raisonnement ». Il n'y a pas eu consensus au sein des participants. Par ailleurs, des points de vue différents existent également dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques. Nous faisons le choix de considérer comme définition celle de Balacheff, à savoir « une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné » conduisant à un débat permettant de définir un système de validation commun aux différents interlocuteurs.

Depuis 2008, les documents officiels distinguent bien deux activités différentes, celles de preuve et de démonstration sans les définir. La question suivante a naturellement émergé parmi les enseignants présents : « Dans nos classes, prend-on encore le temps de travailler de manière explicite la preuve ? ».

2. La typologie de Balacheff

Les travaux de recherche de Balacheff s'intéressent aux processus de preuves et proposent une typologie de celles-ci. Il distingue deux grandes catégories, les preuves pragmatiques qui se situent dans l'action et se manifestent généralement par des théorèmes élèves non prouvés et les preuves intellectuelles nécessitant un changement de posture, exprimant la volonté de considérer les connaissances comme objets de débat et nécessitant une certaine décontextualisation. Le tableau ci-dessous reprend les différents types de preuve issus des travaux de Balacheff :

<table>
<tr><td rowspan="2">Preuves pragmatiques</td><td>Empirisme naïf</td><td>Vérification sur quelques exemples, conjecture possible mais sans remise en question.
La question de la validité n'est pas posée.</td></tr>
<tr><td>Expérience cruciale</td><td>Exemples permettant une conjecture sur la relation entre les objets.
La question de la généralisation est posée et mise à l'épreuve.</td></tr>
<tr><td>Exemple générique</td><td></td><td>« Explication des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus. »</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Preuves intellectuelles</td><td>Expérience mentale</td><td>Utilisation d'un représentant considéré comme quelconque.
La preuve montre une décontextualisation et l'analyse des relations entre les objets.</td></tr>
<tr><td>Calcul sur les énoncés</td><td>Manifestation d'une construction intellectuelle fondée sur des théories.
La preuve ne s'appuie pas sur l'expérience.</td></tr>
</table>

Pour Balacheff, la transition des preuves pragmatiques vers les preuves intellectuelles se caractérise par une évolution de la manière dont les exemples sont considérés, par la prise de conscience de la nécessité de les manipuler non pas pour eux-mêmes mais comme des représentants génériques d'une classe d'objets. La transition vers une preuve intellectuelle nécessite donc de ne plus rendre compte des actions sur des énoncés isolés mais de pratiquer un calcul sur des énoncés globaux de manière décontextualisée. La typologie proposée n'a pas pour objectif de classer les élèves en fonction des types de preuves qu'ils invoquent mais de chercher à caractériser les activités de ces derniers, les processus de preuve qu'ils mettent en œuvre et d'envisager des pistes possibles pour l'enseignant permettant d'accompagner les élèves pour une autonomie plus grande dans le cadre de la résolution de problèmes. Nous nous intéressons donc naturellement à ces leviers possibles pour l'enseignant.

III - COMMENT ENGAGER LES ÉLÉVES DANS LA PREUVE ? LE CHOIX DU TYPE DE SITUATION D'ENSEIGNEMENT

Afin d'engager les élèves dans des processus de preuve, le choix de la situation d'apprentissage est un élément essentiel. Les travaux de Balacheff s'inscrivent plus globalement dans une théorie socio-constructiviste des apprentissages, la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau (1998).

Dans cette théorie, les situations d'action désignent les situations qui permettent aux élèves d'élaborer de nouvelles stratégies et visent à les engager dans la construction de nouvelles « connaissances en actes ». Elles ne rendent pas nécessaire la formulation du modèle utilisé pour résoudre le problème posé.

Les situations de formulation sont des situations dans lesquelles l'action directe est empêchée et cet empêchement engendre la nécessité pour l'élève d'expliciter le modèle implicite de ses actions pour réussir. Cette formulation du modèle peut être de formes différentes : verbale (orale ou écrite), graphique, à destination d'autrui ou pour soi-même, ... Elles visent la construction progressive d'un langage compris de tous, qui « prenne en compte les objets et les relations pertinentes de la situation adéquate » et rend possible l'explicitation des actions et des modèles d'action. Les moyens d'emporter la conviction existent mais restent encore implicites.

Les situations de validation quant à elles s'inscrivent dans une perspective de preuve intellectuelle, elles doivent conduire les élèves à « réviser » leur opinion, remplacer leur théorie fausse par une théorie vraie. Le processus de validation est fondé sur la prise en charge de contradictions potentielles. Les situations de validation comprennent elles-mêmes des phases d'action ou de formulation puisque les élèves doivent encore agir ou formuler de nouvelles stratégies.

Balacheff s'intéresse à la question de la validation des énoncés, non pas du point de vue de leur logique mais de la façon dont les élèves questionnent ce qu'ils sont en train de faire.

Il distingue trois types preuves :

- preuves pour décider (du côté de l'action) ;
- preuves pour convaincre (aspects théoriques : je me suis déjà décidé, je cherche des arguments pour convaincre) ;
- preuves pour comprendre, savoir (du côté de l'axiomatique).

Dans la suite de l'atelier, nous nous intéressons donc à l'effet potentiel de l'articulation de situations d'action, de formulation et de validation sur les processus de preuves conduits par les élèves. Pour cela, nous présentons une séquence conçue en appui sur les travaux de Balacheff et ancrée en *Théorie des situations didactiques*, mise en place en classe de quatrième et exploitant le problème du *Plus grand produit*.

IV - UNE PROPOSITION DE SÉQUENCE

1. Descriptif

Ci-dessous un tableau récapitulant les différentes phases de cette séquence et leur articulation. Durant l'atelier, nous avons échangé avec les participants sur les raisons qui ont motivé nos choix.

<table>
<tr><th colspan="3">Séance 1</th></tr>
<tr><td>Action</td><td>- Dévolution : Présentation du problème pour 7.
- Relance avec le nombre 23.</td><td></td></tr>
<tr><td>Formulation</td><td>En groupe :
« Déterminer la méthode qui permet de trouver le plus grand produit pour n'importe quel nombre de départ. »
« Un membre de votre groupe sera choisi au hasard. Il sera opposé à un autre élève et devra appliquer votre méthode sur un nombre que je choisirai. Le gagnant sera celui qui obtiendra le plus grand produit. »
Duel puis retour en groupe.</td><td>Trois étapes :
- Étape 1, En groupe : se mettre d'accord « Vous devez trouver une méthode qui permet de déterminer pour n'importe quel nombre la ou les sommes qui correspondent au plus grand produit. Tout à l'heure, un membre de votre groupe sera choisi au hasard. Il sera opposé à un autre élève et devra appliquer votre méthode sur un nombre que je vous donnerai. Le gagnant sera celui qui obtiendra le plus grand produit. »
- Étape 2, duels : Un membre de chaque groupe affronte un membre d'un autre groupe.
Le professeur donne à chaque binôme une feuille sur laquelle est inscrit un nombre.
- Étape 3, retour en groupe : suite au duel, retour du représentant du groupe, révision de la procédure si besoin.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Séance 2</th></tr>
<tr><td colspan="2">Rappel du problème, distribution de 3 propositions de stratégies.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Validation</td><td>En groupe : « Pour chacune des stratégies, dire si elle est gagnante à tous les coups. Prouvez votre réponse. »</td><td>« Laisser toutes les pistes que vous avez tentées même si elles n'ont pas abouti. »
Chaque élève reçoit une feuille avec les trois productions à analyser.
Chaque groupe reçoit une seule feuille, collective, de travail.</td></tr>
<tr><td>Débat collectif sur les différents types de preuve.
Institutionnalisation : elle porte sur ce qu'est « prouver en mathématiques ».</td><td></td></tr>
</table>

Pour faire progresser les groupes dans la formulation d'une stratégie gagnante, l'enseignant peut jouer sur deux leviers, le choix des binômes constituant les duels (représentants de deux groupes qui ont envisagé des stratégies différentes) et le choix des nombres proposés dans les duels (choix d'un nombre congru à 0, 1 ou 2 modulo 3 selon les stratégies envisagées dans les groupes, de façon à pouvoir réfuter certaines d'entre elles).

À l'issue de la situation de formulation, l'enseignant analyse les productions de façon à conduire en séance 2 la situation de validation, s'appuyant sur la recherche des méthodes permettant de gagner à coup sûr. La situation de validation inclut une situation de formulation mais également une situation d'action puisqu'on peut jouer de nouveau pour éprouver la validité de la méthode ou pour l'invalider. On vise ici les preuves pour savoir, mais les preuves pour décider et pour convaincre continuent de vivre.

Le débat collectif conduit à l'issue du travail de groupe s'inscrit dans la continuité du travail sur la preuve. Durant la situation de validation, les élèves sont certes amenés à se poser la question de la validité mathématique. Cependant, on n'attend pas d'eux qu'ils soient tous capables d'accéder à cette validation.

2. Comment choisir les productions dont on cherche à assurer la validité ? Exemples

Nous avons soumis aux participants des productions issues de la situation de formulation et avons échangé sur les raisons pour lesquelles nous avons choisi ces productions en particulier. Notre objectif ici est d'éclairer les enseignants sur la façon de sélectionner les stratégies des élèves dont on veut prouver la validité en phase 2. Certains arguments sont retranscrits dans le tableau ci-dessous.

<table>
<tr>
<td>

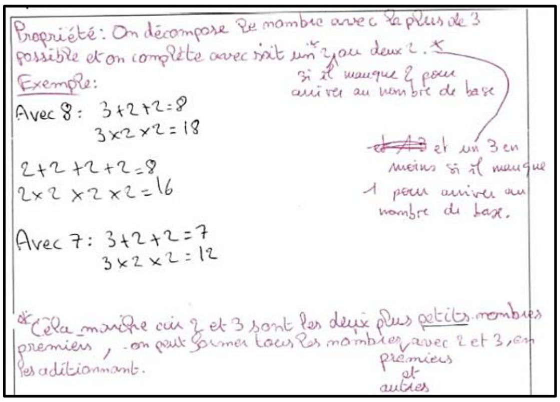
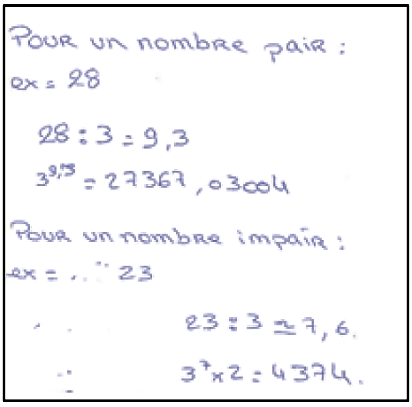
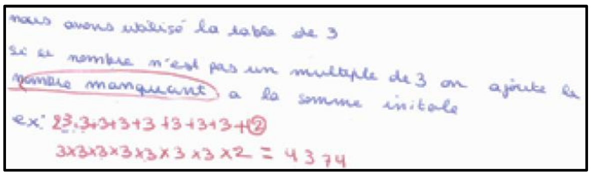
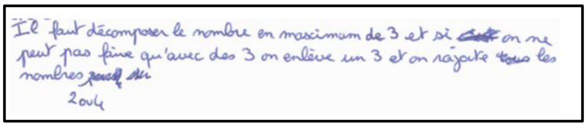


Figure 1. Stratégie 1

</td>
<td>Production aboutie : la stratégie est la bonne. Il y a clairement une tentative de preuve, les arguments convoqués, même s'ils sont mathématiques, ne sont pas appropriés, nous la classons dans expérience mentale.</td>
</tr>
</table>

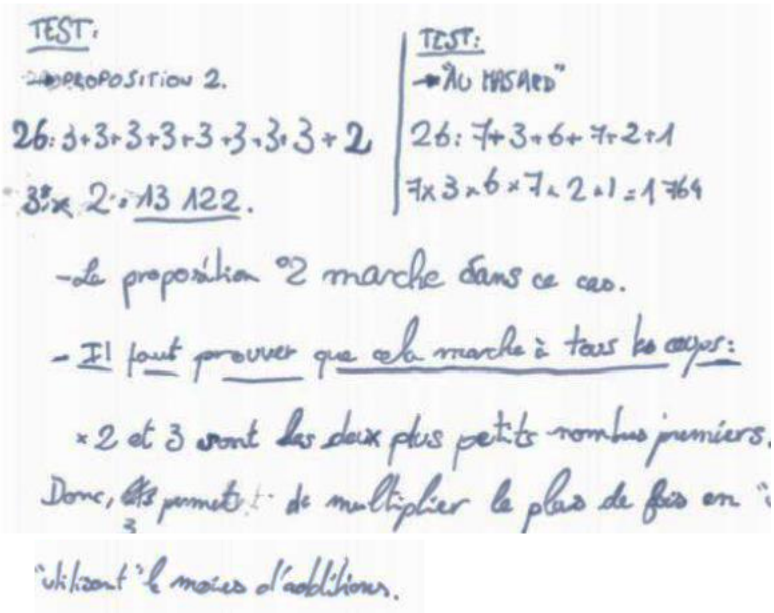
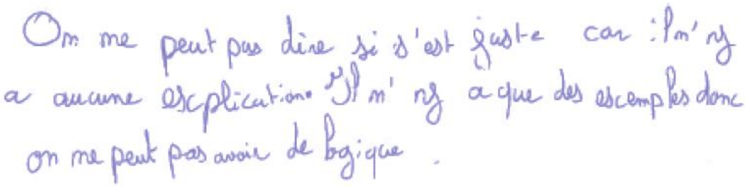
 Pour un nombre pair : ex = 28 28 : 3 = 9,3 $3^{9,3}$ = 27367,03004 Pour un nombre impair : ex = 23 23 : 3 ≃ 7,6. $3^7 \times 2$ = 4374. *Figure 2. Stratégie 2*	Stratégie erronée : les élèves choisissent deux nombres, l'un pair et l'autre impair et proposent deux stratégies différentes selon la parité des nombres. Certes le critère de parité est cité mais aucune transformation des nombres ne montre la généricité des exemples. Les méthodes sont implicites. Les lecteurs doivent analyser les transformations faites sur les nombres de départ pour comprendre la stratégie. Nous considérons que cette preuve est de type empirisme naïf.
 nous avons utilisé la table de 3 si le nombre n'est pas un multiple de 3 on ajoute le nombre manquant a la somme initale ex : 23 = 3+3+3+3+3+3+3+2 3×3×3×3×3×3×3×2 = 4374  Il faut décomposer le nombre en maximum de 3 et si on ne peut pas faire qu'avec des 3 on enlève un 3 et on rajoute ~~tous~~ les nombres ~~[illegible]~~ 2 ou 4 *Figure 3. Stratégie 3* *Figure 4. Stratégie 4*	Stratégie non aboutie, valide dans certains cas seulement : cette méthode ne fonctionne pas pour les nombres congrus à 1 modulo 3. On note une absence de tentative de preuve par les auteurs de ces formulations.

Bien que ce ne soit pas l'enjeu de la phase de formulation, nous remarquons déjà la présence de premiers types de preuves.

Les stratégies 1 à 4 ont été discutées dans les groupes d'élèves pendant la phase de validation, nous avons alors proposé aux participants d'identifier les types de preuves produits lors de cette situation de validation à l'aide de la typologie présentée. Nous faisons l'hypothèse que ce travail peut faire évoluer le regard porté par les enseignants sur les productions de leurs élèves et leur faire prendre conscience de la nécessité d'analyser les processus de preuve dans la classe.

Voici la consigne donnée aux participants : « Vous trouverez ci-dessous quelques productions d'élèves réalisées dans la situation de validation. Pour chacune de ces productions d'élèves, analysez le type de preuve engagé en appui sur la typologie proposée par Balacheff. »

Nous présentons dans ce tableau les types de preuve que nous associons à ces productions :

Concernant la stratégie 1  TEST : → PROPOSITION 2. 26 : 3+3+3+3+3+3+3+3+2 $3^8 \times 2 = 13\ 122$. TEST : → "AU HASARD" 26 : 7+3+6+7+2+1 7×3×6×7×2×1 = 1 764 – La proposition n°2 marche dans ce cas. – Il faut prouver que cela marche à tous les cas : × 2 et 3 sont les deux plus petits nombres premiers. Donc, ils permettent de multiplier le plus de fois en utilisant le moins d'additions. *Figure 5. Production 1*	La production 1 montre une réelle volonté de décontextualisation après avoir testé la stratégie sur un exemple dont il est dit qu'il est choisi au hasard. Nous considérons qu'il s'agit d'une preuve de type expérience mentale.
Concernant la stratégie 2  On me peut pas dire si s'est juste car : Il n'y a aucune escplication. Il n'y a que des escemples donc on me peut pas avoir de logique. *Figure 6. Production 2*	La production 2 comporte un discours « méta » sur la preuve, évoquant le statut des exemples dans la recherche d'une preuve. Nous envisageons cette preuve comme une preuve de type expérience mentale.
Concernant la stratégie 3	La production 3-A comporte un argument lié à la propriété de la multiplication (existence d'un élément neutre égal à 1). La présence du nombre 26 644 semble montrer une référence implicite à un contre-exemple permettant de réfuter la stratégie 3.

Ex : 28 = 3+3+3+3+3+3+3+3+3+1 = 3×3×3×3×3×3×3×3×3×1 = 19 683 < 26 644 Cette stratégie ne marche pas car on obtient pas le nombre le plus grand quand on multiplie car multiplier par 1 ne sert à rien. *Figure 7. Production 3-A* La proposition 3 est juste sauf que elle peut aussi être fausse si ce n'est pas un multiple de 3 et que le nombre manquant est 1. ex ~~3~~ 25 : 3+3+3+3+3+3+3+3+1 = 25 3×3×3×3×3×3×3×3×1 = 6561. 3+3+3+3+3+3+3+4 = 25 3×3×3×3×3×3×3×4 = 8748. *Figure 8. Production 3-B*	Cette preuve nous semble relever d'une expérience mentale. La production 8 met en exergue un contre-exemple bien choisi. Par ailleurs, elle fait référence à une propriété arithmétique des nombres (multiples de 3). Nous l'identifions comme une preuve intellectuelle de type expérience mentale.
Concernant la stratégie 4 17 = 3+3+3+3+3+2 3×3×3×3×3×2 = 486 Cette technique marche mais pour les nombres en dessous de 4 cette technique ne marche pas. car ex : 4 : 3+1 = 3×1 = 3 en faisant cette technique on obtient 3 or, le plus grand nombre que l'on peut trouver avec 4 est 4. 4 = 2+2 = 2×2 = 4 *Figure 9. Production 4*	La première partie de la production 4 relève davantage d'une preuve empirique de type empirisme naïf. Un seul exemple sur lequel la stratégie 4 est mise en fonctionnement est proposé. La seconde partie de la production fait référence à un contre-exemple pour des nombres inférieurs à 4. Nous la considérons du type expérience mentale car aucun argument mathématique n'est avancé pour prouver que 4 est bien le plus grand produit pour le nombre 4 choisi au départ.

3. Importance de l'explicitation des connaissances en jeu

À l'issue de cette situation, il est improbable que l'enseignant rencontre la résolution présentée dans le premier paragraphe de cet article mais ce n'est pas l'enjeu. Dans cette séquence, l'institutionnalisation ne porte pas sur la résolution du problème. Elle s'appuie sur les productions d'élèves et les échanges collectifs pour faire émerger des règles de débat et de preuve en mathématiques. Par exemple, elle fait référence à la possibilité d'utiliser un contre-exemple pour prouver qu'une affirmation est fausse, à la nécessité de faire appel à des « propriétés » mathématiques pour prouver qu'une affirmation est vraie, aux différents statuts des exemples dans une preuve. Ce bilan pourra prendre la forme d'une affiche avec une première partie contextualisée prenant en compte les différentes preuves produites par les élèves et une seconde partie décontextualisée mettant en avant quelques règles déjà évoquées plus haut.

Nous avons proposé une trace écrite qui a pu être améliorée grâce aux échanges avec les participants :

Il semble qu'une stratégie permettant de gagner à tous les coups consiste à décomposer en une somme comprenant le maximum de termes égaux à 3 et sans terme égal à 1. Cette stratégie semble fonctionner pour tous les nombres plus grands que 4.

Des arguments pour justifier cette stratégie :

Le nombre 1 ne permet pas d'augmenter le produit obtenu (multiplier un nombre par 1 ne change pas ce nombre).

Si la somme comprend un terme égal à 5, ce nombre 5 peut se décomposer en 3+2. Or, 3 x 2 = 6 et multiplier par 6 donne un résultat plus grand que de multiplier par 5.

Si la somme comprend un terme égal à 6, ce nombre 6 peut se décomposer en 3+3. Or, 3 x 3 = 9 et multiplier par 9 donne un résultat plus grand que de multiplier par 2 x 4 = 8

On peut ainsi répéter ce procédé…

Comment prouver en mathématique ?

Pour montrer qu'une affirmation mathématique est fausse, on peut parfois trouver un contre-exemple.

Pour montrer qu'une affirmation mathématique est vraie, il ne suffit pas de trouver plusieurs exemples qui « fonctionnent bien » c'est-à-dire pour lesquels l'affirmation mathématique est vérifiée.

Pour montrer qu'une affirmation mathématique est vraie, il faut articuler entre elles des propriétés générales et construire un raisonnement valable pour tous les nombres.

V - CONCLUSION

Dans ce travail, nous proposions d'analyser les processus de preuve en utilisant la typologie de Balacheff comme un modèle. Cette dernière a été plus ou moins opérationnelle pour nous car l'analyse des productions montre de fréquentes imbrications entre les types de preuve. Il nous a été nécessaire de prendre des décisions pour classer le travail global de chaque groupe dans un type de preuve. De plus, nous n'avons travaillé qu'avec des productions recueillies en fin de séquence sans noter les évolutions dans le processus de preuve des élèves au cours des séances. Une autre étude aurait pu s'attarder à analyser ces évolutions au fur et à mesure des débats dans les groupes. Cependant, notre travail permet de prendre conscience qu'il existe dans les activités des élèves d'autres preuves que les preuves intellectuelles qui méritent l'attention de l'enseignant. Apprendre à prouver est un travail de longue haleine, il faut donc que les élèves soient placés dès la sixième dans des situations d'apprentissage dont l'objectif est le travail sur la preuve et non celui sur la démonstration.

L'attitude de preuve n'est pas innée, elle s'entretient et se développe. **Un travail plus ambitieux depuis le cycle 3 nous paraît indispensable dans cet objectif.**

BIBLIOGRAPHIE

Argaud, H., Boët, J., & Bouculat, N. (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes cours moyen (première année)* (ERMEL). Paris (France) : Hatier.

Artigue, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives. *Repères IREM*, n° 54, 23-39.

Balacheff, N. (1987b). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147–176. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01619264/document

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. *Didactique des mathématiques* (1970-1990). Grenoble : La Pensée Sauvage

Douaire, J., & Hubert, C. (1999). Vrai ? faux ? on en débat ! de l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3. *Didactiques des disciplines*. Paris (France) : INRP, Institut national de recherche pédagogique.

Margolinas, C. (2003). Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques d'enseignement des mathématiques. *Construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement*. Bordeaux (France),1-17.

VI - ANNEXE : DOCUMENT DISTRIBUÉ AUX PARTICIPANTS

Aux pages suivantes, se trouve le document papier distribué à chaque participant de l'atelier.

Atelier « Entrée dans la preuve en arithmétique : un exemple d'usage de la situation du plus grand produit »

Rappel : Les élèves sont en groupe. Chaque groupe a rédigé une méthode censée permettre de trouver le plus grand produit pour n'importe quel nombre de départ entier. L'enseignant a récupéré les productions et en a choisi certaines pour construire l'énoncé distribué aux élèves dans la situation de validation.

Consigne distribuée aux élèves dans la situation de validation :

« Pour chacune de ces propositions de stratégies gagnantes faites dans la classe, dire si elle est gagnante à tous les coups. Prouver votre réponse. Laisser toutes les pistes que vous avez tentées même si elles n'ont pas abouti. »

Stratégie 1

Propriété : On décompose le nombre avec le plus de 3 possible et on complète avec soit un 2 ou deux 2.* si il manque 2 pour arriver au nombre de base

~~et 4 3~~ et un 3 en moins si il manque 1 pour arriver au nombre de base.

Exemple :

Avec 8 : $3+2+2=8$
$3\times2\times2=18$

$2+2+2+2=8$
$2\times2\times2\times2=16$

Avec 7 : $3+2+2=7$
$3\times2\times2=12$

*Cela marche car 2 et 3 sont les deux plus petits nombres premiers, on peut former tous les nombres avec 2 et 3, en les additionnant. premiers et autres

Stratégie 2

Pour un nombre pair :
ex = 28

$28 : 3 = 9,3$
$3^{9,3} = 27367,03004$

Pour un nombre impair :
ex = 23

$23 : 3 \simeq 7,6$
$3^{7}\times 2 = 4374.$

Stratégie 3

nous avons utilisé la table de 3

si le nombre n'est pas un multiple de 3 on ajoute le nombre manquant a la somme initale

ex : 23 = 3+3+3+3+3+3+3+2

3×3×3×3×3×3×3×2 = 4374

Stratégie 4

Il faut décomposer le nombre en maximum de 3 et si ~~c'est~~ on ne peut pas faire qu'avec des 3 on enlève un 3 et on rajoute ~~tous~~ les nombres ~~[illegible]~~ [illegible]

2 ou 4

Vous trouverez ci-dessous quelques productions d'élèves réalisées dans la situation de validation.

Consigne : Pour chacune de ces productions d'élève, analyser le type de preuve engagé en appui sur la typologie proposée par Balacheff.

Concernant la stratégie 1

TEST :

→ PROPOSITION 2.

26 = 3+3+3+3+3+3+3+3+2

$3^8 \times 2 = 13\,122$.

TEST :

→ "AU HASARD"

26 = 7+3+6+7+2+1

7×3×6×7×2×1 = 1764

- La proposition n°2 marche dans ce cas.
- Il faut prouver que cela marche à tous les coups :

× 2 et 3 sont les deux plus petits nombres premiers.

Donc, ils permettent de multiplier le plus de fois en utilisant le moins d'additions.

Concernant la stratégie 2 On ne peut pas dire si s'est juste car : il n'y a aucune explication. Il n'y a que des exemples donc on ne peut pas avoir de logique.
Concernant la stratégie 3 Production 3-A Ex : 28 = 3+3+3+3+3+3+3+3+3+1 = 3×3×3×3×3×3×3×3×3×1 = 19 683 < 26 644 Cette stratégie ne marche pas car on obtient pas le nombre le plus grand quand on multiplie car multiplier par 1 ne sert à rien. Production 3-B La proposition 3 est juste sauf que elle peut aussi être fausse si ce n'est pas un multiple de 3 et que le nombre manquant est 1. ex 25 : 3+3+3+3+3+3+3+3+1 = 25 3×3×3×3×3×3×3×3×1 = 6561. 3+3+3+3+3+3+3+4 = 25 3×3×3×3×3×3×3×4 = 8748.

Concernant la stratégie 4

$17 = 3+3+3+3+3+2$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 = 486$

Cette technique marche mais pour les nombres en dessous de 4 cette technique ne marche pas.

car ex : 4 : $3+1 = 3 \times 1 = 3$
en fesant cette technique on obtient 3
or, le plus grand nombre qu'on peut trouver avec 4 est 4.

$4 = 2+2$
$= 2 \times 2 = 4$