UNE ACTIVITÉ AUTOUR DES NOMBRES DE SOPHIE GERMAIN

Thomas MEYER
Enseignant en lycée, IREM de Grenoble
Thomas.Meyer@ac-grenoble.fr

Résumé
Notre groupe IREM réfléchit à des activités favorisant l'apprentissage de la preuve par les élèves au lycée. Nous présentons ici une expérimentation menée auprès d'élèves de seconde autour d'une situation issue de l'arithmétique.

I - CONTEXTE

1. Notre Groupe IREM

À travers la modélisation et la résolution de problèmes, nous souhaitons permettre aux élèves de construire du sens autour de la notion de preuve en mathématiques. Nous voulons également que les élèves s'interrogent sur la validité de leur(s) solution(s), et donc, sur les arguments donnés pour prouver (Balacheff, 2017). Nous avons également pris le parti de choisir plus particulièrement des problèmes dont la résolution incite à utiliser l'algèbre et pour lesquels l'usage de la technologie est facilitant ou permet de palier à des connaissances qui ne sont pas encore acquises.

1.1. Raisonner, prouver, démontrer, l'apport de la technologie CAS

En mathématiques, la preuve est à la fois un *processus* et un *produit* (Gandit, 2008). C'est un processus qui vise à lever le doute, à valider, à établir la vérité, à convaincre le public concerné (en ce qui nous concerne, la classe), mais aussi à expliquer, tout ceci dans le cadre d'une rationalité propre aux mathématiques. Un travail d'écriture accompagne le processus car la preuve devra être communiquée et devient alors le produit de la résolution du problème. En classe, le processus de preuve a une durée de vie réduite, voire très réduite, et le produit final, la démonstration, est souvent montrée par le professeur (Gandit, 2009). Le programme de seconde (BO spécial n°1 du 22 janvier 2019) donne d'ailleurs une liste de démonstrations et précise que " […] le professeur expose avec précision, présente certaines démonstrations et permet aux élèves d'accéder à l'abstraction." On peut s'interroger sur cette phrase du programme : la présentation d'une démonstration est-elle suffisante pour permettre aux élèves d'accéder à l'abstraction ? On pourrait en effet comprendre qu'il suffirait de présenter la démonstration pour faire comprendre le processus. Ceci s'oppose à de nombreux travaux, comme ceux de Bruner cité par Barth (1985), qui précise : "Il est aussi important d'enseigner à un enfant comment il faut s'y prendre pour résoudre un problème que de lui enseigner le produit de cette résolution." Nous cherchons davantage à faire vivre le processus de preuve plutôt que le produit. En prenant appui sur un logiciel de calcul formel, nous développons ce que Michèle Artigue nomme l'intelligence du calcul (Artigue, 2019), avec ses deux facettes « automatisation et raisonnement. » (ibid.).

Les travaux de ICMI 17 soulignent aussi qu'il existe en général peu de changements dans les pratiques mathématiques par rapport à l'utilisation des systèmes CAS dans des situations papier/crayon, et que les questions liées à l'instrumentation (Rabardel, 1995) sont sous-estimées la plupart du temps. Nous considérons qu'il existe des problèmes que les élèves de seconde peuvent résoudre avec l'aide de la technologie CAS, mais qu'ils ne pourraient pas le faire dans un environnement papier-crayon.

Ainsi pour choisir le problème que nous présentons ci-après, nous avons étudié dans notre analyse a priori l'apport possible de la technologie CAS par rapport à sa résolution. De plus, nous avons pris en considération la genèse instrumentale des artefacts (calculatrices, ordinateurs avec Xcas, *https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~parisse/irem.html*) mis à la disposition des élèves, car nous avons conscience que le processus de transformation d'un artefact en un instrument, c'est-à-dire le processus d'instrumentation, demande du temps.

1.2. Un problème proposé aux élèves

Le théorème selon lequel, pour tout nombre entier naturel a différent de 1, $a^4 + 4$ n'est pas premier, a été énoncé par Sophie Germain[1].

Nous proposons l'énoncé suivant aux élèves de Seconde :

« Pour quelles valeurs de l'entier a, le nombre $a^4 + 4$ est-il premier ? »

Notre analyse a priori est la suivante :

Remarquons que la nature de l'entier a n'est pas précisée. Il est probable que les élèves se restreignent aux entiers naturels. Le questionnement ci-dessous se généralise facilement à tous les entiers relatifs en ajoutant -1 à l'ensemble solution.

Une approche expérimentale possible de cette question consiste à calculer numériquement quelques valeurs de $a^4 + 4$ pour les premiers nombres entiers naturels a. Les résultats de la somme donnent rapidement des nombres supérieurs à 1000, pour lesquels il n'est pas toujours évident de déterminer la primalité (par exemple, $15^4 + 4 = 50629$). L'idée est donc de recourir à l'utilisation de la fonction « isprime » de Xcas ou de rédiger un programme permettant de tester cette primalité. L'utilisation du tableur doit permettre rapidement d'obtenir un très grand nombre de résultats. Ces investigations numériques ne donnant que des nombres qui ne sont pas premiers, on peut en chercher la raison. Il n'est pas évident qu'un élève de seconde pense à faire le lien entre la primalité et sa décomposition en produit de deux facteurs dont un des deux est forcément égal à 1.

Il est également peu probable que les élèves trouvent la factorisation $a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2)\,(a^2 + 2a + 2)$. Il est important que l'enseignant se demande comment amener les élèves à ce raisonnement.

Nous envisageons les raisonnements suivants :

- Raisonnement par disjonction de cas (a est pair et a est impair)

Cas où ***a* est pair** : certains élèves pourront rédiger une preuve algébrique en écrivant $a = 2p$, p désignant un entier naturel.

[1] *https://hist-math.fr*

$(2p)^4+4 = 4 \times 4\, p^4+4$

$= 4\,(4p^4 + 1)$ sans ou avec l'étape intermédiaire $4 \times 4\, p^4+4 = 16\, p^4 + 4$

Alors, pour tout a pair, il existe un nombre entier naturel p tel qu'on puisse écrire $a^4 + 4$ sous la forme d'un multiple de 4, donc $a^4 + 4$ n'est pas premier.

On peut rencontrer ici une preuve utilisant les résultats connus sur la parité d'une somme ou d'un produit. Il faut alors être vigilant à l'argument « un nombre pair ne peut pas être premier », le contre-exemple à donner étant 2.

Cas où ***a* est impair** : Les élèves vont chercher si $(2p+1)^4+4$ est premier.

Ils pourront vouloir essayer de développer, mais, au-delà de la difficulté d'une telle tâche pour un élève de seconde, il leur sera alors impossible d'arriver à une conclusion en analysant la forme développée, $16p^4+32p^3+24p^2+8p+5$.

Il faudra alors les interroger sur ce qu'ils cherchent à faire. S'ils ont déjà étudié le cas où a est pair, il est envisageable qu'ils répondent que l'objectif est de factoriser, à condition qu'ils aient conjecturé que $a^4 + 4$ n'est pas premier. L'expérimentation numérique, si elle n'a pas encore été faite à ce moment-là, est indispensable pour augmenter le degré de conviction des élèves et leur donner ainsi un but vers lequel diriger leurs calculs. Il convient donc d'engager les élèves dans cette voie plutôt que de leur suggérer immédiatement de factoriser.

Pour la factorisation, il est possible d'utiliser la commande de Xcas qui permet de factoriser. On obtient :

$(2p+1)^4 + 4 = (4p^2+1)\,(4p^2+8p+5)$. Il suffira ensuite d'utiliser que « $4p^2+1 \neq 1$ et $4p^2+8p+5 \neq 1$ » équivaut à

« $(2p+1)^4 + 4$ n'est pas premier ».

Or p désignant un entier naturel, $4p^2+8p+5$ ne peut pas être égal à 1, car c'est forcément un nombre toujours plus grand que 5. Il reste à résoudre, dans l'ensemble des entiers naturels, l'équation $4p^2+1=1$, envisageable dès la classe de Seconde, qui a pour seule solution 0. Ainsi $(2p+1)^4 + 4$ n'est premier que pour $p = 0$, c'est-à-dire que, dans le cas où a est impair, $a^4 + 4$ n'est premier que si $a = 1$.

- Raisonnement à partir du cas général

Cette preuve utilise la factorisation de $a^4 + 4$. Comme mentionné plus haut, cette factorisation passe par l'utilisation du calcul instrumenté au niveau de la classe de Seconde. La façon dont on obtient cette factorisation sans calcul formel n'est d'ailleurs pas à aborder à ce niveau. Comme déjà dit, c'est la reconnaissance de la nécessité de factoriser qui est l'enjeu. Cependant on peut engager les élèves dans la preuve de l'égalité $a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2)\,(a^2 + 2a + 2)$ par développement du second membre.

Concernant la résolution des équations $a^2 - 2a + 2 = 1$ et $a^2 + 2a + 2 = 1$, il peut être envisagé un passage par le registre graphique, la parabole étant un objet connu des élèves de Seconde.

Le nombre a étant positif, le facteur $a^2 + 2a + 2$ est nécessairement différent de 1.

La résolution de l'équation $a^2 - 2a + 2 = 1$ amène 1 comme unique solution, le facteur $a^2 - 2a + 2$ est différent de 1 pour tout nombre a autre que 1.

Ainsi, aucun des deux nombres entiers dont le produit est égal à $a^4 + 4$ n'est égal à 1 pour tout nombre entier naturel a différent de 1. Ceci prouve ce théorème de Sophie Germain.

Une telle preuve n'est pas attendue d'un élève de Seconde, ni même de lycée, s'il ne dispose pas d'un environnement de calcul instrumenté.

Notons qu'il serait également possible d'obtenir la factorisation de $a^4 + 4$ en utilisant l'astuce de deux identités remarquables, en ajoutant et en enlevant $4a^2$, qui correspond à un procédé ad hoc souvent utilisé en mathématiques auquel des élèves de Seconde auront difficilement recours d'eux-mêmes.

- Réflexions complémentaires

Les objectifs poursuivis sont de donner du sens à l'algèbre, en mettant en avant le rôle de celle-ci comme outil de preuve, de travailler le sens du concept de nombre premier (sachant que les nombres premiers jouent un rôle central en cryptologie, mais aussi en calcul exact/formel et dans les codes de correcteurs d'erreurs en communications), de mettre en avant l'aspect expérimental nécessaire à la conjecture et de développer la planification de la preuve en sous-traitant certaines tâches à la machine : calculs numériques avec un tableur ou à l'aide d'un programme, factorisation à l'aide du calcul formel, résolution d'équations avec le calcul formel.

Dans l'énoncé donné aux élèves, le nombre considéré, $a^4 + 4$, est donné dans un registre algébrique. « a » possède le statut de variable dans l'ensemble des entiers.

Les élèves disposent de calculatrices et/ou d'un ordinateur avec un tableur, et une application de calcul formel (Xcas). Nous envisageons le cas où les élèves ne connaissent pas nécessairement le logiciel Xcas. Nous devrons donc leur montrer comment utiliser les commandes utiles, c'est-à-dire « est_premier » (ou « isprime » dans Xcas) et la factorisation, « factoriser » (ou « factor » dans Xcas), en passant par la calculatrice ou l'ordinateur. Nous pensons qu'apprendre à utiliser ces deux commandes, avec une calculatrice ou un ordinateur, peut se faire rapidement dans le cadre d'une séance sans entraver les autres apprentissages visés.

Les élèves sont supposés avoir déjà abordé en classe les nombres premiers et expérimenté un algorithme tel que le crible d'Eratosthène. Ils doivent se rappeler ce que signifie *nombre premier*. Nous nous attendons à ce qu'ils se remémorent qu'un nombre premier est un entier qui n'est divisible que par un et par lui-même. Il faut s'en assurer et si besoin rappeler cette définition. Nous observons que cette définition devrait orienter la pensée des élèves vers les critères de divisibilité et/ou la décomposition d'un nombre en un produit de facteurs. Par ailleurs, les élèves penseront peut-être qu'un nombre pair, hormis deux, n'est pas premier. En revanche, il n'est pas immédiat de savoir si un nombre impair est premier pour de grands nombres, par exemple au-delà de 101. Nous estimons que les élèves devraient pouvoir se souvenir de leurs tables de multiplication de 1 à 10, et qu'ils peuvent connaître les critères de divisibilité jusqu'à onze. Donc, il nous semble intéressant que les élèves puissent utiliser la commande "isprime" ou "est_premier" du logiciel Xcas pour de "grands" nombres afin de pouvoir affirmer qu'un nombre est premier ou non, s'ils ne disposent pas, dans leur calculatrice, d'un programme leur permettant de tester la primalité sans avoir à tâtonner. Mais l'information sur cette commande n'est pas à donner tout de suite aux élèves afin de ne pas influencer leur stratégie et inférer les connaissances qu'ils mettent en œuvre.

Les élèves de Seconde ne savent pas encore résoudre des équations du second degré par la méthode du discriminant, ils doivent se ramener à des équations de type « produit nul », de même pour des équations de degré supérieur à deux. Ils devront mobiliser des connaissances, comme les identités remarquables, leur permettant de factoriser un polynôme de degré supérieur à un, soit pour résoudre une équation, soit pour donner sa factorisation. La factorisation ne sera pas immédiate car il ne s'agit pas d'une forme usuelle. Pour ce faire, nous envisageons que les élèves se servent de la technologie du calcul formel car la réussite de la factorisation ne fait pas partie de nos objectifs. En revanche, l'identification de la nécessité de la factorisation devrait développer l'intelligence du calcul et contribuer à la construction du sens de la factorisation – bien au-delà du simple travail technique – nécessaire à la résolution du problème et lié au concept de nombre premier, mettant ainsi en évidence les valeurs pragmatique et épistémique de la factorisation.

2. Le stage « MathC2+ » dans l'académie de Grenoble

Conduit dans l'académie depuis plusieurs années, ce stage s'inscrit dans le cadre du programme national MathC2+ porté par la Société Mathématiques de France. Il se déroule au mois de juin, sur trois jours depuis 2022, et est organisé en partenariat avec l'INRIA, l'Université Grenoble Alpes et l'IREM de Grenoble.

Ce stage concerne tous les ans une cinquantaine d'élèves de seconde, venus de toute l'académie, particulièrement motivés par les mathématiques et ayant une appétence pour les sciences. Le fil rouge du stage est la découverte de l'activité de recherche et du métier de chercheur.

II - L'EXPÉRIMENTATION

Dans le cadre du stage MathC2+, quatre problèmes de recherche sont présentés aux stagiaires. Ils ont un premier temps pour s'approprier chacun d'entre eux avant d'en choisir un seul pour lequel ils devront proposer une preuve qui fera l'objet d'une présentation orale devant tous les participants. Il est possible que cette preuve ne soit pas totalement aboutie au moment de la présentation.

Nous restreignons cette présentation au problème présenté plus haut et ne nous étendrons pas sur le rôle des enseignants qui sont intervenus et qui ont eu tout le loisir d'interagir avec les stagiaires.

1. Étude de cas sur des nombres de Sophie Germain

Un tiers des stagiaires ont choisi de travailler sur le problème des nombres de Sophie Germain.

1.1. Organisation de la séquence

La séquence a été partagée en quatre phases. La première a eu lieu le jour de leur arrivée. Après présentation de l'énoncé, les stagiaires ont eu un quart d'heure pour se familiariser avec le problème et clarifier les points qui nécessitaient une reformulation.

Le lendemain, ont eu lieu la deuxième et la troisième phase. Pendant celles-ci, les stagiaires disposaient de quatre heures pour mener leurs recherches et préparer leur présentation orale à l'aide d'un diaporama. Lors de la phase de recherche, les élèves étaient disposés en groupes de trois ou quatre. Le troisième jour, la quatrième phase a eu la forme d'un mini-séminaire durant lequel chaque groupe de stagiaires a présenté le fruit de son travail (recherches et preuves - même partielles) à ses pairs, aux enseignants et aux chercheurs présents.

1.2. Productions d'élèves

- Appropriation et recherche.

Les élèves n'ont pas montré de difficulté pour s'approprier le problème. La recherche a démarré par des essais numériques et la conjecture (C1) « $a^4 + 4$ est premier si et seulement si $a = 1$ » est sortie en quelques minutes (Fig. 1 et Fig. 2).

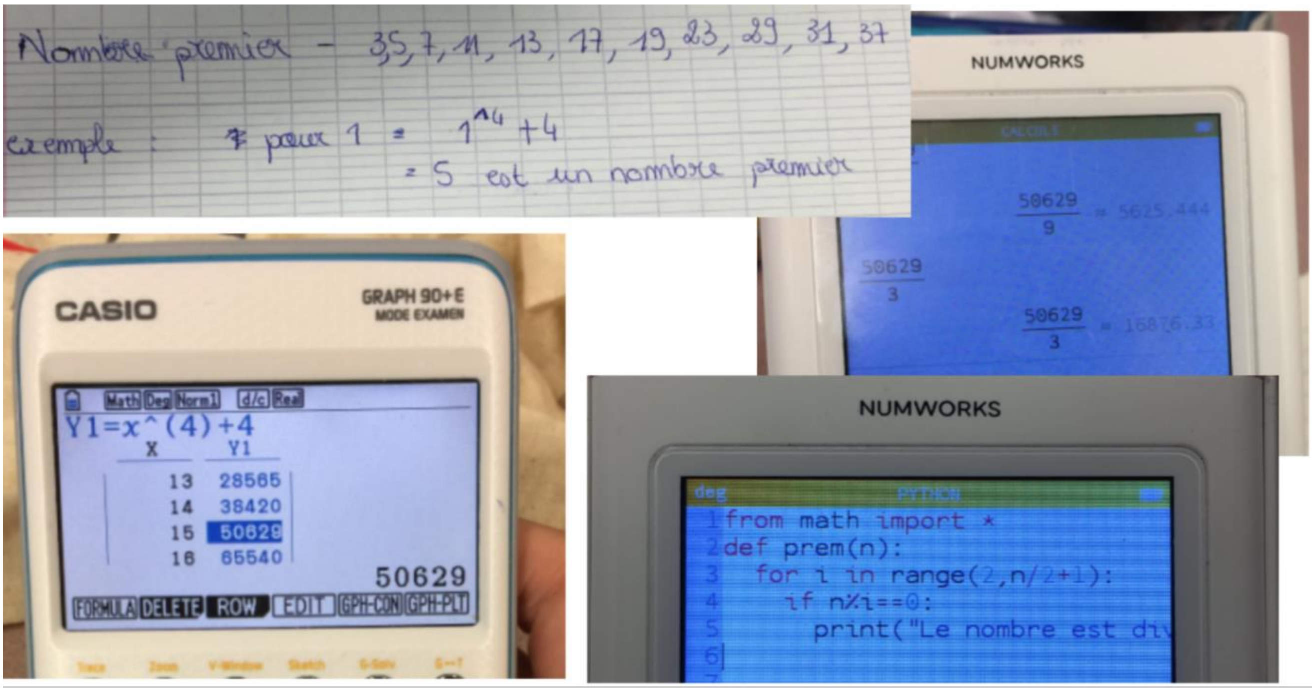

Figure 1. Productions de stagiaires lors de MathC2+

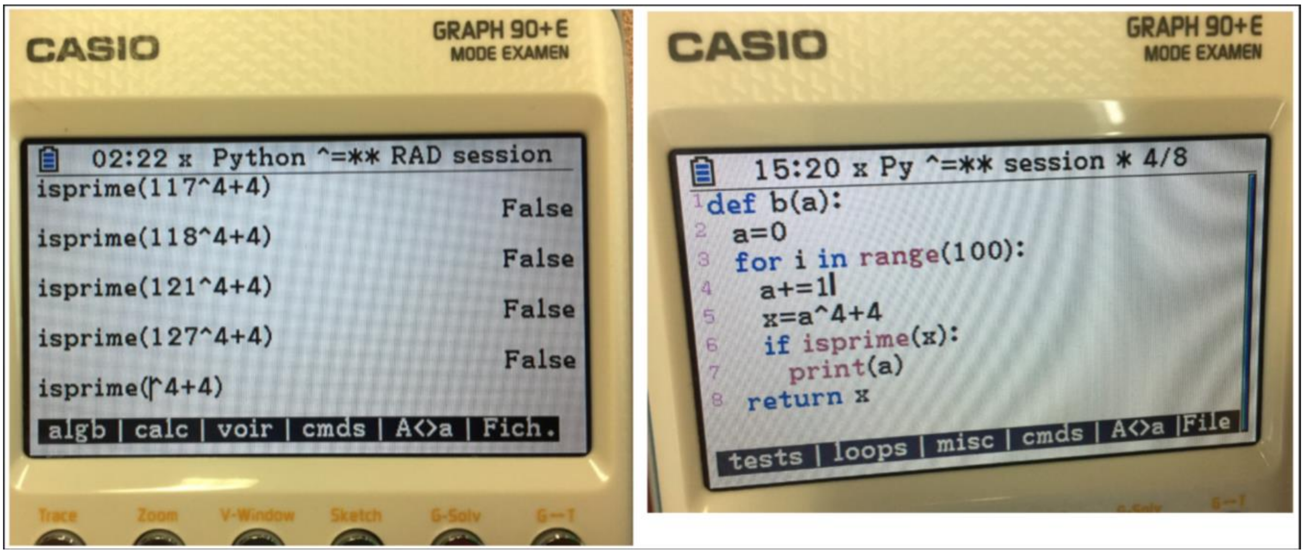

Figure 2. Tests de primalité instrumentés

- Preuves proposées

Le raisonnement par disjonction de cas a émergé rapidement. La preuve du cas « a pair » a été produite rapidement conformément à nos attentes dans l'analyse a priori.

En essayant de traiter le cas « a impair », deux nouvelles conjectures sont apparues : (C2) « Lorsque le chiffre des unités de a est 5, celui de $a^4 + 4$ est 9 » et (C3) « Lorsque le chiffre des unités de a est 1, 3, 7 ou 9, celui de $a^4 + 4$ est 5 ».

Notons que la démonstration de la conjecture (C3) permet d'affirmer que lorsque a est différent de 1, est impair et que son chiffre des unités est 1, 3, 7 ou 9, le nombre $a^4 + 4$ n'est pas premier (car divisible par 5 et supérieur à 5) mais que la démonstration de la conjecture (C2) ne permet pas de déterminer la primalité de $a^4 + 4$ lorsque le chiffre des unités de a est 5.

Les élèves n'ont pas réussi à aller plus loin dans l'élaboration de leur preuve. Le raisonnement à partir du cas général n'a pas été envisagé par les élèves. Par conséquent, les enseignants encadrant l'activité ont décidé d'orienter la recherche de la preuve vers le recours à Xcas afin d'obtenir la factorisation :

$a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2)\ (a^2 + 2a + 2)$ présentée. Une partie des stagiaires a su s'approprier ce résultat pour aboutir à la preuve algébrique exposée plus haut. D'autres stagiaires ont utilisé Xcas pour factoriser $a^4 + 4$ lorsque a est impair et ont réussi à achever leur preuve par disjonction de cas (Fig.3).

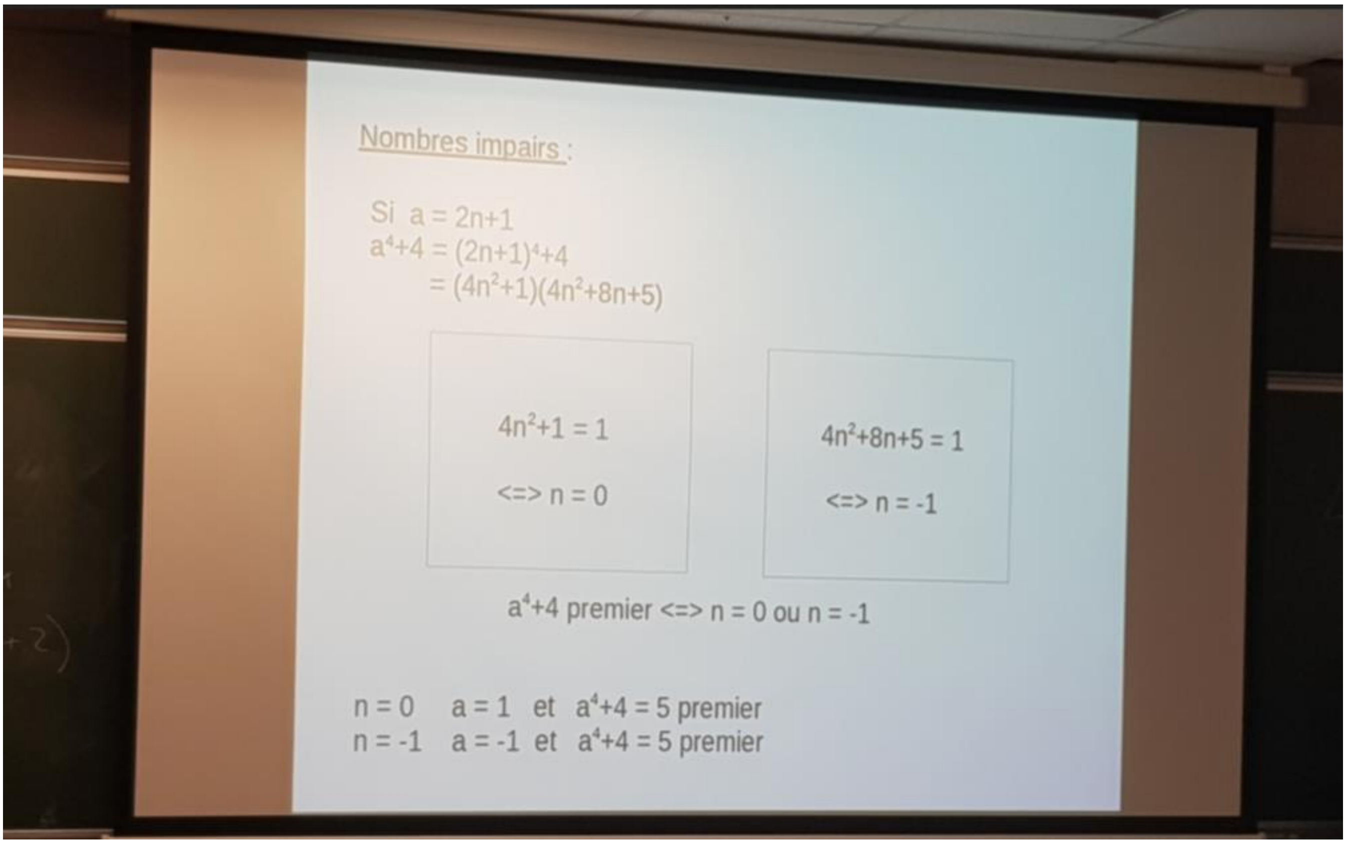

Figure 3. Preuve proposée par un stagiaire pour a impair.

Une fois la preuve rédigée, certains stagiaires ont souhaité se pencher sur la preuve des conjectures (C2) et (C3). Cela a poussé un des enseignants présents à les questionner sur l'écriture générique d'un nombre dont le chiffre des unités est 5 pour essayer de lever le blocage constaté plus haut. Ils ont finalement réussi à démontrer les conjectures (C2) et (C3) (Fig 4.).

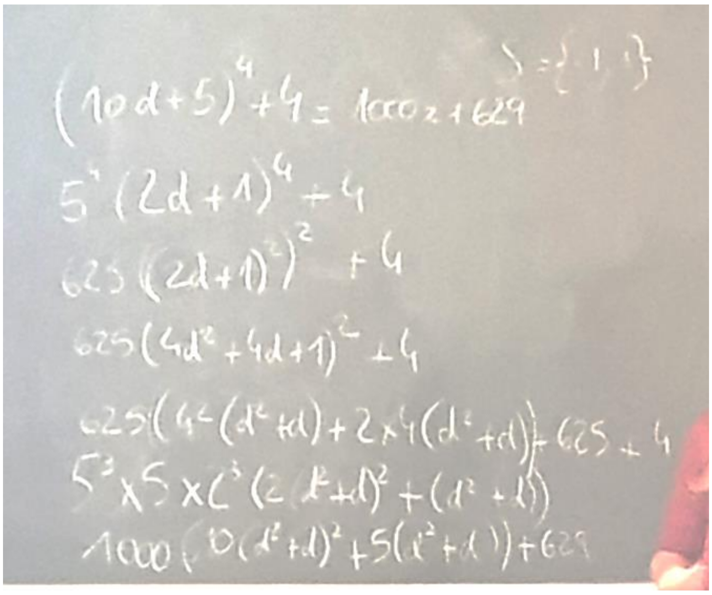

Figure 4. Preuve de la conjecture (C2) proposée par un stagiaire.

2. Analyse

Comme pressenti dans l'analyse a priori, les élèves ont commencé par des essais en utilisant leur calculatrice et ont rapidement formulé une conjecture pertinente pour résoudre le problème proposé. Ils se sont tous lancés dans une preuve pour le cas pair, qu'ils ont su rédiger correctement, puis se sont retrouvés en difficulté pour prouver le cas impair, qui a été un réel blocage. Les enseignants présents ont choisi d'intervenir pour relancer l'activité en repartant sur le cas général avec l'idée d'exploiter la factorisation pour justifier qu'un nombre est premier (Fig. 5). Cette idée n'est pas apparue chez les élèves (ce qui n'est pas surprenant en seconde). La factorisation n'a été utilisée que pour justifier que, lorsque a est pair, $a^4 + 4$ n'est pas premier car il est plus grand que 2 et divisible par 2.

$$\begin{gathered} p \geqslant 2 \text{ est premier} \\ \Longleftrightarrow \\ \forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, p = ab \Rightarrow (a = 1 \text{ ou } b = 1) \end{gathered}$$

Figure 5. Caractérisation de la primalité d'un entier naturel p.

L'intervention des enseignants a permis aux stagiaires de rédiger une preuve, soit en traitant le cas général, soit en se réappropriant la méthode pour traiter le cas « *a* impair ». Nous supposons que la connaissance des stagiaires sur la notion de primalité a été consolidée. Néanmoins, le contexte du stage n'ayant pas permis la mise en place d'une institutionnalisation des connaissances d'ordre I et II (Sackur et al., 2005), il n'est pas certain que les stagiaires puissent transposer la méthodologie mise en œuvre dans cette preuve (utilisation de la traduction en langage algébrique d'une définition pour effectuer une preuve) dans un autre contexte.

De plus les tâches de développement et de factorisation prennent ici tout leur sens.

III - CONCLUSION

Nous sommes conscients que cette expérimentation a pu être menée dans un contexte très favorable avec un public ayant une image positive des mathématiques et une envie de découvrir le monde de la recherche. Ils étaient de fait motivés pour résoudre le problème (indépendamment de celui-ci). Il nous semble néanmoins que cet énoncé peut être proposé en classe ordinaire de seconde en fin d'année scolaire. En effet, la notion de primalité, abordée dès le collège et retravaillée en seconde, permet aux élèves de s'approprier aisément l'énoncé. De plus, les premiers essais ne posent pas de difficulté majeure et conduisent rapidement à une conjecture pertinente.

Nous avons pu observer une activité mathématique des stagiaires très riche durant les 4 heures d'atelier. Ils ont cherché, conjecturé, prouvé, et ont été amenés à changer de stratégie pour arriver au résultat final. Il est donc nécessaire qu'un enseignant qui souhaiterait proposer cet énoncé à ses élèves prévoit un temps suffisamment long, quitte à envisager d'autres modalités, en demandant par exemple aux élèves de finaliser la rédaction de la preuve dans le cadre d'un devoir en temps libre.

IV - BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (2019). Intelligence du calcul, Diaporama présenté à la CII-Université, 18 janvier 2019, http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/dijon-artigue.pdf, consulté le 24/08/2020.

Balacheff, N. (2017). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. Séminaire national de didactique des mathématiques, Association pour la recherche en didactique des mathématiques (ARDM), Paris, France, pp.423-456. ⟨hal-02333720⟩

Barth, B.M. (1985). Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique. *Communication & langages*, 66(1), 46-58. DOI : https://doi.org/10.3406/colan.1985.3656

Gandit, M. (2009). Il est urgent de repenser l'enseignement de la preuve. In Actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF) 2009, Groupe de Travail n°3 : Rôle et place de l'arithmétique et de la géométrie dans la formation des élèves et des professeurs. Dakar, 6-10 avril 2009. http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT3/Gandit.pdf

Gandit, M. (2008). *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement : une ingénierie en formation.* (Doctoral dissertation, Grenoble 1).

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains*.

Sackur, C., Drouhard, J.-P., Assude, T., Paquelier, Y. et Maurel, M. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 25(1), 57–90.