LE PUZZLE DE LA DIVISION EUCLIDIENNE

Fabrice VANDEBROUCK
Université Paris Cité
IREMS de Paris
vandebro@u-paris.fr

Sylvie ALORY
Lycée Lafontaine
IREMS de Paris
alory.sylvie@free.fr

Benoît MARIOU
Université Paris 8
IREMS de Paris
benoit.mariou@univ-paris8.fr

Résumé
Dans plusieurs classes de terminale et plusieurs TD en L1 d'animateurs de notre groupe IREM, nous avons proposé aux élèves/étudiants de refaire la preuve de l'existence et l'unicité du couple (q, r) d'entiers tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Cette preuve est difficile. Les élèves/étudiants l'avaient déjà plus ou moins vue en classe selon les cas. Les modalités pour refaire la preuve étaient différentes (en groupe en classe ou bien en autonomie pendant un contrôle) mais il s'agissait toujours de remettre en ordre 15 arguments donnés en vrac. Que ce soit au secondaire ou au supérieur, l'exercice n'a pas été facile et il a mis à jour des difficultés des élèves/étudiants pour raisonner : mélange des arguments de l'existence et de l'unicité, difficultés d'enchainer plus de deux pas successifs du raisonnement, gestion et place de l'introduction des variables… Dans l'atelier, après avoir revu rapidement la preuve et fait une analyse *a priori* des difficultés attendues, on a donné à analyser une sélection de copies des élèves et des étudiants pour mettre à jour ces difficultés effectives à raisonner. Ce sont ces analyses qui sont relatées dans ce texte. Au-delà de cette preuve particulière, la modalité puzzle est une façon de faire raisonner les élèves sur des preuves dans les programmes du secondaire, avec diverses exploitations qui peuvent être faites en classe et des bénéfices pour les élèves. Un autre exemple de puzzle pour la classe de seconde est proposé à la fin de ce texte en ouverture. D'autres modalités sur d'autres preuves d'arithmétique ont été montrées en fin d'atelier – théorème de Bézout notamment - comme des vidéos des élèves eux-mêmes (faites à la maison avec leur smartphone) en train de faire la preuve et de l'expliquer en même temps, ces vidéos pouvant être réinterrogées en classe entière ou pas par le professeur.

Le groupe GLU de l'IREMS de l'université Paris Cité travaille depuis deux ans sur la démonstration à la liaison lycée-université. Nous rappelons le BO (programme de seconde) :

« *Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc.* ».

Le groupe GLU s'est penché sur le « etc. » du BO. Nous avons cherché à proposer d'autres modalités pour travailler la démonstration.

Au cours de ces deux années de travail, nous avons exploré différentes pistes :

- plan de la démonstration dégagé par le groupe classe puis rédaction de la démonstration en groupe ;
- étude d'une démonstration déjà écrite puis analyse de la structure de la démonstration (travail en binôme) ;
- démonstration faite par les élèves/étudiants sous forme de vidéos ;
- puzzle.

C'est cette dernière modalité, que nous avons appelée puzzle, que nous présentons ici. Nous demandons aux élèves de remettre dans l'ordre le texte d'une démonstration présentée par morceaux sous forme d'un puzzle. Nous proposons d'analyser dans cette communication les productions d'élèves de terminale option maths expertes, ainsi que des copies d'étudiants de L1 informatique sur le puzzle de la preuve de la division euclidienne. Dans la partie 1, nous classifions les erreurs de raisonnements observées dans ces copies. Dans la partie 2 nous fournissons une analyse de la structure de la preuve pour comprendre les difficultés observées par les élèves et les étudiants. Dans la dernière partie, nous fournissons quelques ouvertures sur l'intérêt de cette modalité puzzle dans les classes, ainsi qu'un autre exemple du même type réalisé en classe de seconde.

ÉTUDE DE COPIES D'ÉLÈVES ET D'ÉTUDIANTS

Nous avons proposé l'exercice du puzzle à des élèves de Terminale Spé maths dans l'option maths expertes. L'énoncé fourni aux élèves (le même qu'aux étudiants) est en annexe. La correction et la preuve remise en ordre sont données dans la partie 2. Cette preuve a été faite en classe en cours dialogué avec le professeur en classe de maths expertes au cours de l'année 2021/22. Le professeur a demandé aux élèves de réviser spécifiquement la partie sur la division euclidienne pour l'interrogation portant globalement sur de l'arithmétique. Les copies ont donc été recueillies à l'occasion de l'interrogation. Du côté des étudiants de L1, il s'agit d'une preuve qui a été réalisée pendant le cours magistral en amphi. Les étudiants n'ont pas eu de consigne particulière et le puzzle a été donné comme exercice au cours de l'examen de rattrapage de juin 2022. Les étudiants avaient à réviser le chapitre d'arithmétique (qui reprend le programme de maths expertes mais en approfondissant les congruences), mais aussi un chapitre sur les nombres complexes et le début de l'algèbre linéaire. Nous avons là aussi analysé comme matériel les copies des étudiants.

Lors de l'analyse des copies des élèves de terminale, nous avons repéré un certain nombre d'erreurs qui se répétaient. Nous avons ensuite retrouvé ces mêmes erreurs dans les copies des étudiants. Nous avons classé ces erreurs d'abord en trois catégories à partir des copies des élèves de terminales. Nous décrivons et illustrons dans un premier temps ces trois catégories avec les copies des élèves, puis nous les retrouvons sur les copies des étudiants.

1re catégorie : mélanges d'arguments sur l'existence et l'unicité

Les élèves associent assez bien les deux assertions « On montre l'unicité… » et « Soient (q1,r1) et (q2,r2) deux couples qui vérifient… ». Ils sont sans doute bien habitués en classe de terminale à mener des raisonnements d'unicité en introduisant deux objets qui vérifient la condition d'unicité souhaitée. On s'aperçoit qu'il en est de même pour démarrer la preuve d'existence mais dans une moindre mesure. Ces mélanges (ou pas) sont illustrés par les copies d'élèves ci-dessous.

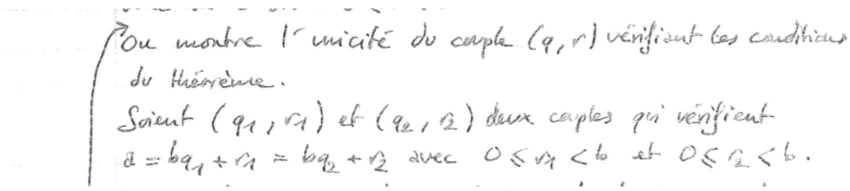

On montre l'unicité du couple (q, r) vérifiant les conditions du théorème.
Soient (q_1, r_1) et (q_2, r_2) deux couples qui vérifient
$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ avec $0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$.

Figure 1. Extrait de copie d'élève

Dans cette copie (Figure 1), l'unicité est bien introduite.

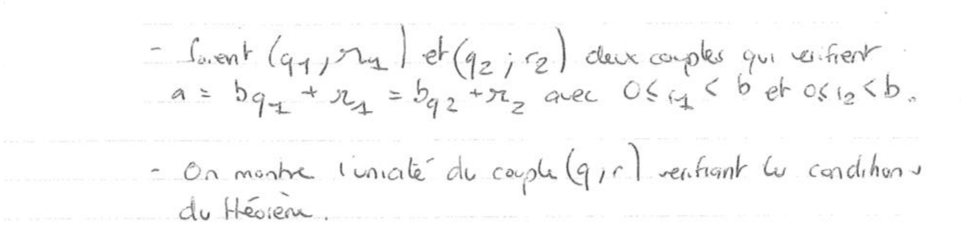

- Soient (q_1, r_1) et $(q_2 ; r_2)$ deux couples qui vérifient
$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ avec $0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$.
- On montre l'unicité du couple (q, r) vérifiant les conditions du théorème.

Figure 2. Extrait de copie d'élève

Dans cette copie (Figure 2), les deux assertions sont inversées mais d'un point de vue sémantique c'est tout à fait acceptable. Il est fréquent dans la vie courante de commencer quelque chose puis aussitôt après (et seulement là) de dire ce qu'on vient d'initier. On trouve la même inversion pour l'existence dans la copie ci-dessous (Figure 3). L'élève a remonté sa phrase « On montre l'existence… », assez haut pour que le lecteur comprenne, mais pas assez haut d'un point de vue de la rédaction usuelle des mathématiques.

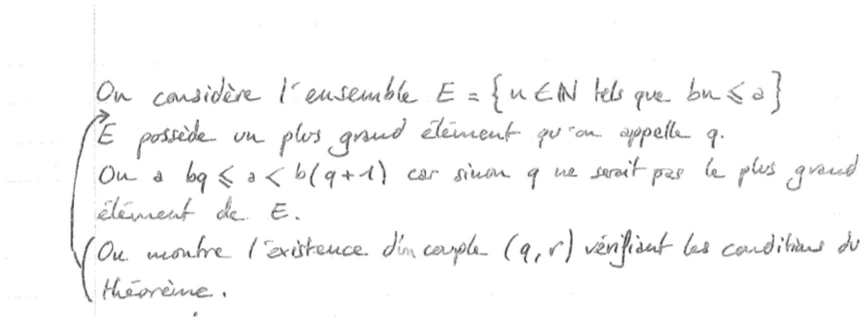

On considère l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N}$ tels que $bn \leq a\}$
E possède un plus grand élément qu'on appelle q.
On a $bq \leq a < b(q+1)$ car sinon q ne serait pas le plus grand élément de E.
On montre l'existence d'un couple (q, r) vérifiant les conditions du théorème.

Figure 3. Extrait de copie d'élève

Dans plusieurs copies on a toutefois des mélanges d'arguments pour l'existence et l'unicité. Soit la preuve de l'unicité est commencée avant que la preuve de l'existence ne soit terminée, soit l'inverse. C'est le cas dans les deux exemples ci-dessous (Figures 4 et 5).

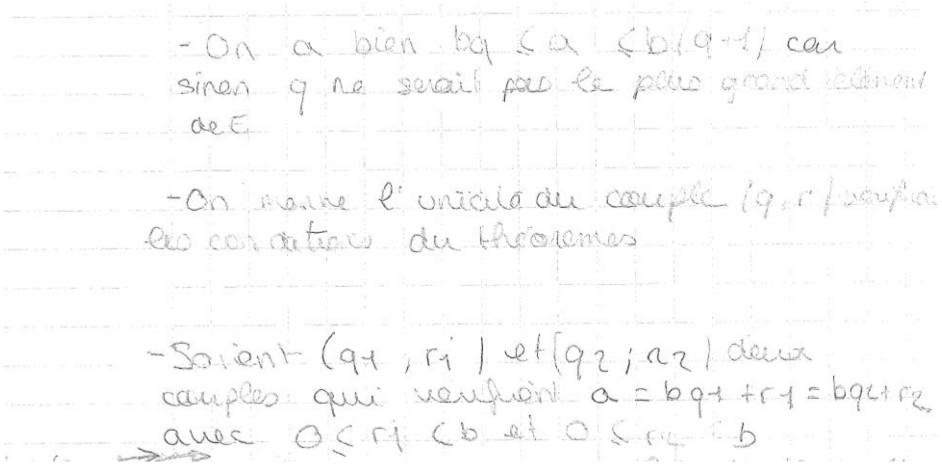

- On a bien $bq \leq a < b(q+1)$ car sinon q ne serait pas le plus grand élément de E
- On montre l'unicité du couple (q, r) vérifiant les caractères du théorèmes
- Soient $(q_1 ; r_1)$ et $(q_2 ; r_2)$ deux couples qui vérifient $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ avec $0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$

Figure 4. Extrait de copie d'élève

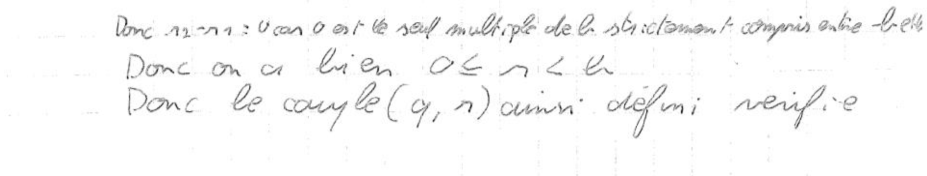

Donc $r_2 - r_1 = 0$ car 0 est le seul multiple de b strictement compris entre $-b$ et b
Donc on a bien $0 \leq r < b$
Donc le couple (q, r) ainsi défini vérifie

Figure 5. Extrait de copie d'élève

2e catégorie : l'introduction de variables après les avoir utilisées

Dans quelques copies, des objets sont manipulés alors qu'ils ne sont introduits qu'après. C'est faux du point de vue du raisonnement mathématique, mais cette fois cela ne tient pas non plus du point de vue du sens commun. Le lecteur ne peut pas comprendre. On observe surtout cette erreur pour l'introduction de *E*, *q* et *r* dans la preuve de l'existence. En effet, dans la preuve de l'unicité, comme on vient de dire plus haut, les élèves sont sans doute plus habitués à ces types de raisonnement, et les seules variables à introduire sont les deux couples qui sont généralement bien introduits d'emblée.

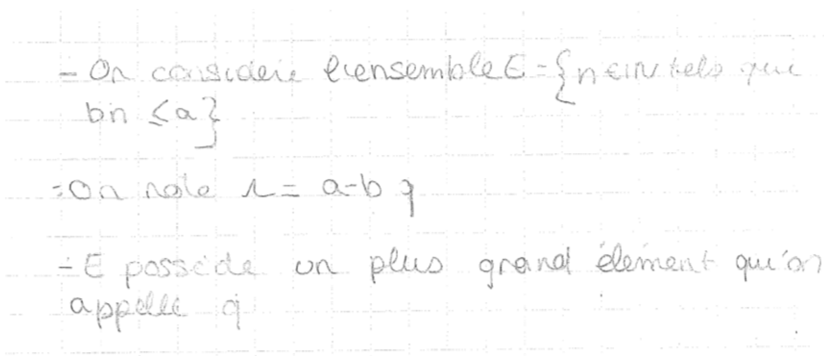
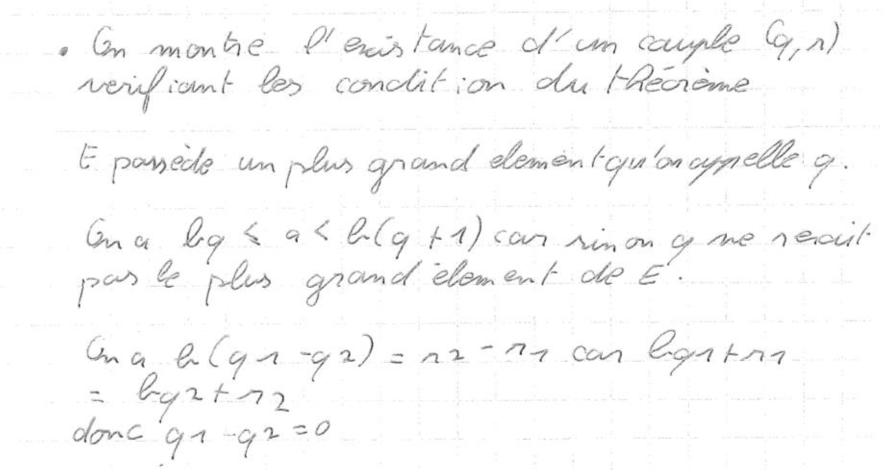

- On considère l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N}$ tels que $bn \leq a\}$
- On note $r = a - bq$
- E possède un plus grand élément qu'on appelle q

Figure 6. Extrait de copie d'élève

Dans cette copie (Figure 6), l'élève utilise q sans l'avoir introduit. On peut penser qu'il ne saisit pas que la phrase « On montre l'existence d'un couple (q,r) » n'introduit pas les variables, mais est une simple annonce du raisonnement qui va être développé et dans laquelle les variables sont muettes. Dans la copie suivante (Figure 7), l'élève parle cette fois de E sans l'avoir introduit, mais il y a un cumul d'erreurs avec un mélange avec l'unicité (*cf.* catégorie 1).


• On montre l'existance d'un couple (q,r) verifiant les condition du théorème

E possède un plus grand element qu'on appelle q.

On a $bq \leq a < b(q+1)$ car sinon q ne serait pas le plus grand élement de E.

On a $b(q_1-q_2) = r_2 - r_1$ car $bq_1+r_1 = bq_2+r_2$

donc $q_1-q_2=0$

Figure 7. Extrait de copie d'élève ge

3e catégorie : l'enchaînement logique des énoncés

La difficulté est souvent repérée dans l'unicité cette fois. Bien qu'amorcé correctement par beaucoup d'élèves, on voit dans un premier temps que l'enchaînement « $b(q_1\text{-}q_2)=r_2\text{-}r_1$ » donc « $r_2\text{-}r_1$ est un multiple de b », donc « $r_2\text{-}r_1=0$ » est souvent mal fait. On donne trois exemples ci-dessous (Figures 8, 9, 10).

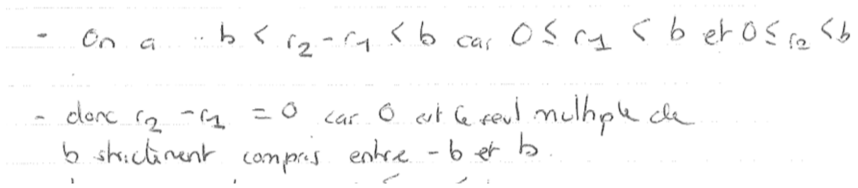
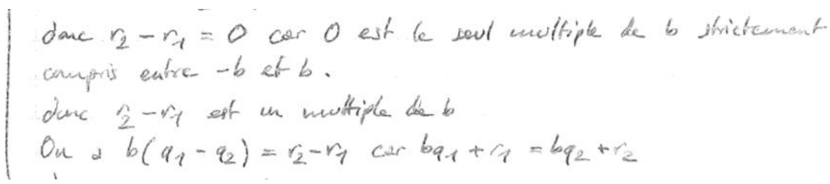

- On a $-b < r_2-r_1 < b$ car $0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$
- donc $r_2-r_1 = 0$ car 0 est le seul multiple de b strictement compris entre $-b$ et b.

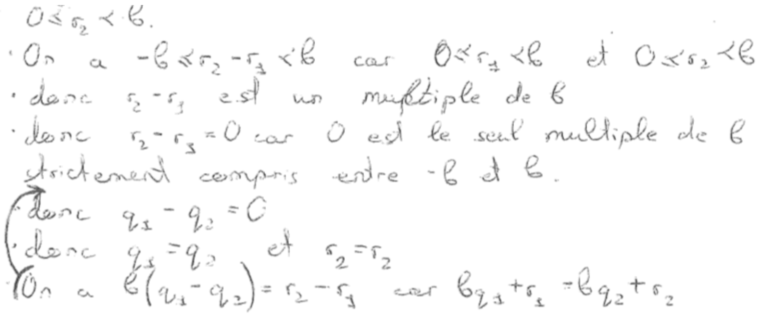
Figure 8. Extrait de copie d'élève


donc $r_2-r_1 = 0$ car 0 est le seul multiple de b strictement compris entre $-b$ et b.

donc r_2-r_1 est un multiple de b

On a $b(q_1-q_2) = r_2-r_1$ car $bq_1+r_1 = bq_2+r_2$

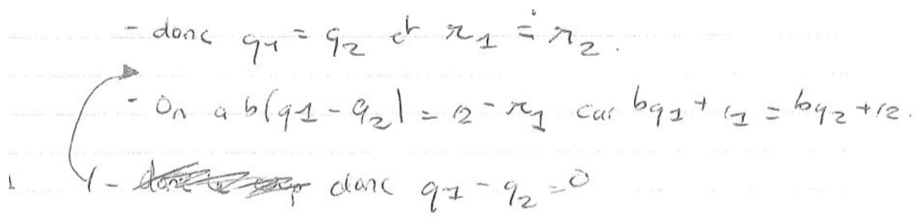
Figure 9. Extrait de copie d'élève



$0 \leq r_2 < b$.
· On a $-b < r_2 - r_1 < b$ car $0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$
· donc $r_2 - r_1$ est un multiple de b
· donc $r_2 - r_1 = 0$ car 0 est le seul multiple de b strictement compris entre $-b$ et b.
· donc $q_1 - q_2 = 0$
· donc $q_1 = q_2$ et $r_2 = r_2$
· On a $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ car $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$

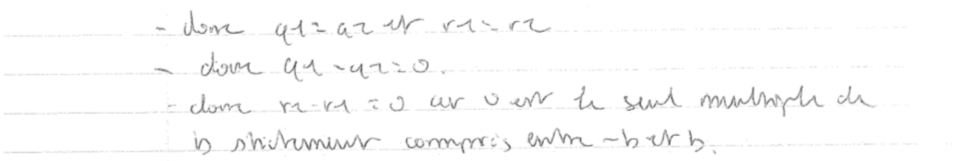
Figure 10. Extrait de copie d'élève

Dans la conclusion de l'unicité, on remarque dans un second temps et très souvent, que les arguments « donc q_1-q_2=0 » et « donc q_1=q_2 et r_1=r_2 » sont inversés. Cette erreur se superpose parfois à la précédente comme dans les deux copies ci-dessous (Figures 11 et 12).



- donc $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$.
- On a $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ car $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$.
- ~~donc~~ donc $q_1 - q_2 = 0$

Figure 11. Extrait de copie d'élève



- donc $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$
- donc $q_1 - q_2 = 0$.
- donc $r_2 - r_1 = 0$ car 0 est le seul multiple de b strictement compris entre $-b$ et b.

Figure 12. Extrait de copie d'élève

Les mêmes erreurs cumulées et mélangées chez les étudiants

Chez les étudiants (copies A à G), on retrouve les mêmes erreurs, mais souvent cumulées et encore plus mélangées. D'où notre choix initial d'identifier et de catégoriser les erreurs à partir des copies d'élèves qui sont globalement bien meilleures. On propose en exemple deux copies pour illustrer ces erreurs cumulées et mélangées, celle de l'étudiant C (Figure 13) et celle de l'étudiant F (Figure 14).

- Pour la copie de l'étudiant C : entremêlement des preuves d'existence et d'unicité (1re catégorie, inversion entre « donc q_1=q_2 et r_1=r_2 » et « donc q_1=q_2 » et raisonnement pour obtenir « r_2-r_1=0 » incorrect (3e catégorie).
- Pour la copie de l'étudiant F : entremêlement des preuves d'existence et d'unicité (1re catégorie), utilisation de variables q_1, q_2, r_1, r_2 avant de les introduire (2e catégorie et inversion entre « donc q_1=q_2 et r_1=r_2 » et « donc q_1=q_2 » (3e catégorie).

page 4/4

Exercice 1.

1. Soient $(q1, r1)$ et $(q2, r2)$ deux couples qui vérifient $a = bq1 + r1 = bq2 + r2$ avec $0 \leq r1 < b$ et $0 \leq r2 < b$.

2. On considère l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \mid bn \leq a\}$

3. E possède un plus grand élément qu'on appelle q.

4. On a $bq \leq a < b(q+1)$ car sinon q ne serait pas le plus grand élément de E.

5. On montre l'unicité du couple (q, r) vérifiant les conditions du théorème.

6. On a $b(q1 - q2) = r2 - r1$ car $bq1 + r1 = bq2 + r2$

7. ~~d~~ On note $r = a - bq$

8. donc $q1 = q2$ et $r1 = r2$

9. donc $q1 - q2 = 0$

10. On montre l'existence du couple (q, r) vérifiant les conditions du théorème.

11. On a $-b < r2 - r1 < b$ car $0 \leq r1 < b$ et $0 \leq r2 < b$

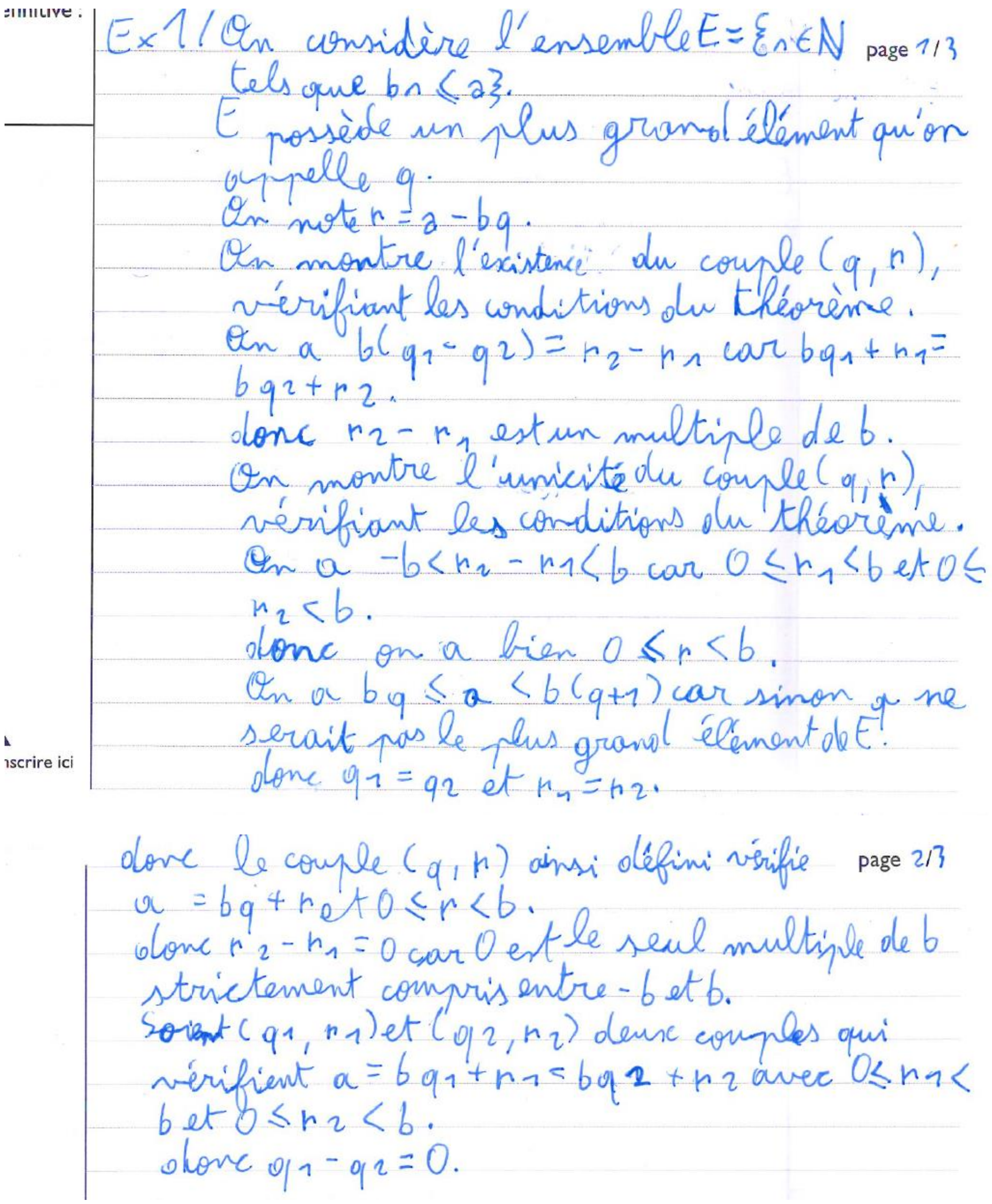
12. donc $r2 - r1 = 0$ car 0 est le seul multiple de b strictement compris entre $-b$ et b.

13. donc ~~re~~ $r2 - r1$ est un multiple de b.

14. donc on a bien $0 \leq r < b$

15. donc le couple (q, r) ~~vérifié~~ ainsi défini vérifie $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

Figure 13. Copie de l'étudiant C



Ex 1 / On considère l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N}$ tels que $bn \leq a\}$. page 1/3

E possède un plus grand élément qu'on appelle q.

On note $r = a - bq$.

On montre l'existence du couple (q, r), vérifiant les conditions du théorème.

On a $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ car $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$.

donc $r_2 - r_1$ est un multiple de b.

On montre l'unicité du couple (q, r), vérifiant les conditions du théorème.

On a $-b < r_2 - r_1 < b$ car $0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$.

donc on a bien $0 \leq r < b$.

On a $bq \leq a < b(q+1)$ car sinon q ne serait pas le plus grand élément de E.

donc $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$.

donc le couple (q, r) ainsi défini vérifie page 2/3

$a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

donc $r_2 - r_1 = 0$ car 0 est le seul multiple de b strictement compris entre $-b$ et b.

Soient (q_1, r_1) et (q_2, r_2) deux couples qui vérifient $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ avec $0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$.

donc $q_1 - q_2 = 0$.

Figure 14. Copie de l'étudiant F

ANALYSE LOGIQUE ET DIDACTIQUE DE LA DÉMONSTRATION

On présente ci-dessous une réponse correcte à l'exercice, afin de pouvoir analyser et commenter la structure de la démonstration qui était à reconstituer. À chaque assertion, on a associé un ou plusieurs commentaires, en respectant le code de style suivant :

- *Italique* : qui relève de l'aide au lecteur et pas, à proprement parler, de l'argumentation.
- <u>Souligné</u> : qui relève des propriétés mathématiques.
- **Gras** : qui relève de l'organisation du raisonnement et des arguments (stratégie de la preuve, introduction des objets, hypothèse temporaire …).

EXISTENCE		
(11)	On montre l'existence d'un couple (q,r) vérifiant les conditions du théorème	*annonce/balise*
(4)	On considère l'ensemble $E = \{ n \in IN \ / \ bn \leqslant a \}$	**définition/notation**
(13)	E possède un plus grand élément qu'on appelle q.	propriétés de b (non nul), de IN (archimédien) et de E (fini) & **définition/notation**
(14)	On note $r = a - bq$	**définition/notation**
(6)	On a $bq \leqslant a < b(q+1)$ car sinon b ne serait pas le plus grand élément de E	propriété de E
(2)	donc on a bien $0 \leqslant r < b$	calcul
(7)	donc le couple (q,r) ainsi défini vérifie $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.	*conclusion/balise*
UNICITÉ		
(10)	On montre l'unicité du couple (q,r)vérifiant les conditions du théorème	*annonce/balise*
(3)	Soient (q_1,r_1) et (q_2,r_2) deux couples qui vérifient $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ avec $0 \leqslant r_1, r_2 < b$	**introduction d'éléments génériques** & **hypothèse temporaire : début de sous-démonstration (indentation)**
(8)	On a $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ car $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$	calcul
(12)	donc $r_2 - r_1$ est un multiple de b	définition de la divisibilité
(1)	On a $-b < r_2 - r_1 < b$ car $0 \leqslant r_1 < b$ et $0 \leqslant r_2 < b$	calcul
(15)	donc $r_2 - r_1 = 0$ car 0 est le seul multiple de b strictement compris entre $-b$ et b	propriété de la divisibilité
(9)	donc $q_1 - q_2 = 0$	calcul & $b \neq 0$
(5)	donc $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$	calcul & **fin de la sous-démonstration** & *conclusion/balise*

On a choisi de distinguer les arguments où entrent en jeu les propriétés mathématiques des objets et les assertions qui contribuent à la structure logique et rédactionnelle du texte. Il s'agit d'un découpage qui s'apparente à celui introduit par V. BATTIE, entre dimension opératoire et dimension organisatrice (Battie, 2007 et ce volume d'actes).

Cette distinction est très intéressante dans le cadre de cet exercice de puzzle, qui met l'accent sur l'organisation de la démonstration. Les objets à définir et les calculs à mener sont donnés à l'élève/étudiant, les assertions et les idées sont correctes du point de vue des propriétés mathématiques et pertinentes du point de vue de la démonstration visée. Il n'y a plus qu'à les mettre en ordre !

L'analyse de la structure de la démonstration révèle plusieurs écueils, sources d'erreurs et d'errements compréhensibles dans les réponses des élèves/étudiants. Cela permet de mettre du relief sur les catégories d'erreurs identifiées dans la partie I.

1. La structure globale de la preuve

L'assertion à démontrer est du type *(A et B)*. La démonstration se décompose en deux parties bien distinctes : la preuve de *A*, la preuve de *B*.

Dans les copies, les erreurs consistant à mêler des assertions des deux demi-démonstrations pourtant indépendantes, sont assez fréquentes. Ce sont les plus graves dans le sens où, lorsque les démonstrations d'existence et d'unicité sont mélangées, le texte produit est extrêmement difficile à lire et interpréter.

2. La démonstration de l'existence

La démonstration de l'existence ne présente pas de complication, ni arithmétique (exceptée la justification du fait que l'ensemble *E* est fini – que nous avons occultée), ni stratégique (c'est une démonstration constructive d'existence). La difficulté est d'identifier et d'exhiber les objets appropriés. Dans le cadre de l'exercice, ceux-ci sont donnés.
Cependant, une contrainte de rédaction pèse encore, pas toujours respectée dans les copies : définir et nommer un objet avant de l'utiliser et de le manipuler (4 doit venir avant 13 qui doit précéder 14, par exemple).

On peut penser que le type de l'exercice favorise ce genre d'erreurs : lorsqu'on écrit son propre texte, l'incongruité d'utiliser un objet non défini apparaîtra plus sûrement que lorsqu'on réordonne des phrases déjà écrites par autrui. Comme on l'a déjà signalé plus haut, l'élève peut aussi ne pas comprendre que la phrase 11 est seulement une annonce/balise, donc qu'elle ne fait pas partie à proprement parler du raisonnement, et que les variables citées sont muettes (on aurait pu, du reste, ne pas nommer du tout le couple dans cette assertion). Parler de *q* et *r* après cette phrase ne fait donc pas sens, mais pour comprendre cela il faut que l'élève ait bien repéré le statut différent des différentes phrases du puzzle.

3. La démonstration de l'unicité

La démonstration de l'unicité est très différente. L'heuristique est limitée : les objets et les calculs s'imposent d'eux-mêmes (et ils sont donnés dans cet exercice.)

En revanche, l'assertion à prouver, d'une part n'est pas écrite, d'autre part a une forme évoluée. Il s'agit d'une implication, quantifiée universellement sur deux couples.

Il y aurait donc deux sous-démonstrations à ouvrir :

Je considère deux couples (génériques).	**sous-démonstration 1, but : montrer ∀**
Je suppose qu'ils ont tous les deux la propriété.	**sous-démonstration 2, but : montrer ⇒**
…	
Je conclus qu'ils sont égaux.	
J'en déduis que si les deux couples ont la propriété alors ils sont égaux.	**bilan sous-démo. 2**
J'en déduis que, pour toute parie de couples, s'ils ont la propriété alors ils sont	**bilan sous-démo. 1**

Figure 15. Structure de la preuve de l'unicité

La notion de sous-démonstration souligne qu'on a du matériel supplémentaire (objets génériques, hypothèses) dont on devra se décharger.

Traditionnellement (preuve d'injectivité par exemple), on n'ouvre qu'une sous-démonstration : on se donne des éléments génériques tels que... et on conclut que l'implication est vraie pour tous...

Dans l'exercice, l'assertion 3 correspond à ce début de sous-démonstration, qui se termine par l'assertion 5. Celle-ci ne clôt peut-être pas assez explicitement la démonstration. Notamment, on ne rappelle pas qu'il y avait une implication à prouver et on ne dit pas que le but est atteint ; c'est au lecteur de le remarquer (l'assertion 5 est une balise... implicite !).

Malgré toutes ces difficultés, la structure globale est dans l'ensemble bien restituée dans les copies ; peut-être parce qu'il n'y a pas beaucoup d'alternatives, peut-être parce que ce genre d'assertions est fréquemment traité dans les cours, peut-être aussi parce que cette démonstration a déjà été vue avant l'exercice.

4. Le corps de la preuve de l'unicité

Une dernière difficulté importante est posée par le corps de la preuve d'unicité, les assertions 3-8-12-1-15-9-5. L'assertion 3 pose plusieurs propriétés pour les nombres a, b, q_1, q_2, r_1, r_2. Elles permettent d'obtenir d'une part l'assertion 8 qui donne 12, d'autre part l'assertion 1.
Puis 12 conjointement à 1 permettent d'obtenir 15. Et il faut encore invoquer 8 pour obtenir, avec 15, l'assertion 9. Enfin, 15 et 9 permettent de conclure 5. On a ainsi la structure suivante (Figure 16) :

$$\begin{tikzcd}
3 \arrow[r] \arrow[dr] & 8 \arrow[r] & 12 \arrow[dr] & & 8 \arrow[dr] & & 15 \arrow[dr] & \\
& 1 \arrow[rr] & & 15 \arrow[rr] & & 9 \arrow[rr] & & 5
\end{tikzcd}$$

Figure 16. Complexité du raisonnement dans la preuve de l'unicité

Il en résulte une complication sérieuse : aucune des assertions 1, 15, 9, 5 ne découle exclusivement de celle qui la précède immédiatement dans le texte.

Un certain recul sur les propriétés en présence est donc attendu de la part de l'élève/étudiant : ce dernier doit être capable de chercher plus en arrière dans la démonstration les justifications de ces assertions.

L'assertion 8 est particulière : c'est un pas de déduction où on a répété « $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ » qui est déjà dans 3 ; initialement pour « aider » les élèves, mais cela a peut-être brouillé leur raisonnement.

Le cas de l'assertion 15 est le plus compliqué : après avoir tiré deux conséquences distinctes de l'hypothèse 3, on doit les considérer conjointement pour utiliser un théorème du type : *si (A et B) alors C.*

Ajoutons que l'assertion 1 pourrait se trouver avant le bloc 8-12 (à quelques majuscules près).

Dans certaines copies, on comprend donc que le paquet 3-8-12-1-15 est agencé de façon malheureuse.

Enfin, une erreur très fréquente consiste à inverser les deux dernières assertions 9 et 5. Le fait, déjà mentionné, que l'assertion 5 n'est pas une conclusion suffisamment explicite entre en jeu. Mais si l'on maîtrise la situation on ne se trompera pas. Et donc, l'erreur peut surtout s'expliquer par le fait que 9 découle directement de 5, tandis que pour conclure 5, 9 doit être associé à 15 (l'assertion 5 est équivalente à la conjonction de 9 et 15). Dans une situation où l'élève/étudiant perd un peu pied, on peut penser qu'il se raccroche à des déductions rassurantes, directes.

III - CONCLUSION ET OUVERTURE

L'exercice proposé en terminale a permis aux élèves de travailler à nouveau cette démonstration assez longue pour eux et qu'ils avaient trouvée difficile en cours. Le format puzzle permet à tous de se mettre à la tâche ce qui n'aurait pas été le cas si nous leur avions demandé de refaire la démonstration. Remettre en ordre les arguments les oblige à porter leur attention sur les articulations logiques. Les erreurs produites ont permis notamment de redire la nécessité d'introduire un objet avant de l'utiliser.

Notre analyse *a posteriori* (partie II) de la structure de la preuve, et plus localement de chacune des phrases, nous a amenés à relativiser la simplicité apparente de l'exercice et à comprendre mieux les erreurs des élèves et étudiants. Dans les prochaines expérimentations de ce puzzle, nous proposerons un autre découpage de sorte à minimiser certaines difficultés observées : par exemple mieux faire identifier aux élèves ce qui relève de balises/annonces et ce qui relève du raisonnement à proprement parler.

À titre d'ouverture nous montrons une modalité de puzzle qui a été proposée à des élèves en classe de seconde. Dans un premier temps, nous avons proposé à un groupe de 16 élèves, sous forme de puzzle, la démonstration de la propriété : *La somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.*

La propriété à démontrer était écrite au tableau sous la forme : « La somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7 ».

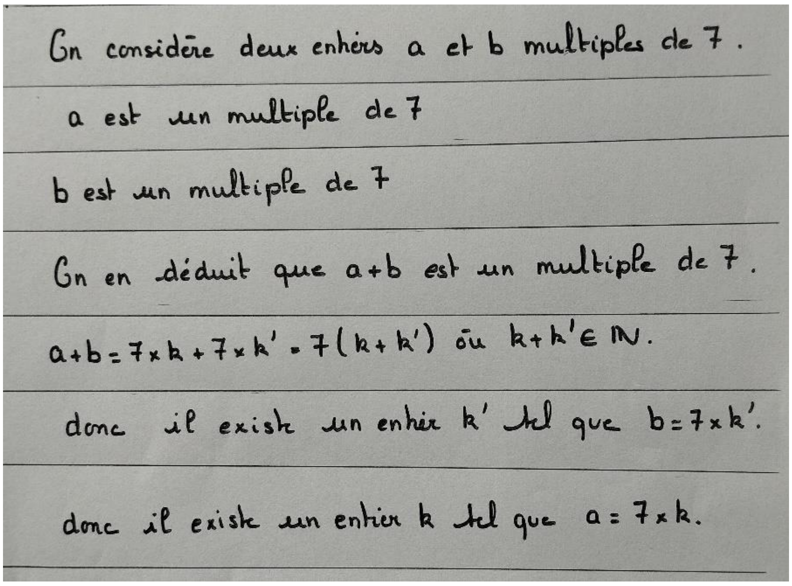


Figure 17. Exemple de puzzle en classe de seconde

Le choix a été fait de distribuer la démonstration dans le désordre et de demander aux élèves de découper les pièces du puzzle et de les remettre dans l'ordre en collant les pièces sur une feuille. Il nous semblait important, pour que les élèves s'impliquent, de ne pas leur demander de recopier dans l'ordre le texte, tâche qui les rebute. Les élèves pouvaient ainsi étaler devant eux les pièces et les bouger facilement jusqu'à ce qu'ils soient satisfaits de l'ordre avant de les coller. Cette modalité (différente de celle proposée en terminale) a permis à tous les élèves de s'impliquer. Le travail des élèves était focalisé sur la tâche principale : remettre en ordre la démonstration. Nous avons veillé à ce que chaque élève relise le texte qu'il proposait avant de le rendre. Une fois leur puzzle relevé, nous leur avons demandé de faire la démonstration de la propriété : *Soit n un entier naturel. Montrer que la somme de deux multiples de n est un multiple de n.*

D'autres modalités sur d'autres preuves d'arithmétique ont été montrées en fin de notre atelier – théorème de Bézout notamment – comme des vidéos des élèves eux-mêmes (réalisées à la maison avec leur smartphone) en train de faire la preuve et de l'expliquer en même temps ; ces vidéos pouvant être réinterrogées ou non en classe entière par le professeur. Les analyses de ces dispositifs relèveraient d'un autre texte.

BIBLIOGRAPHIE

Battie, V. (2007). Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse des raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, *27*(1), 9–44

ANNEXE : ÉNONCÉ FOURNI AUX ÉLÈVES ET ÉTUDIANTS

Exercice 1. (4 points)
Dans cet exercice on désire reconstituer la preuve du théorème d'existence et d'unicité de la division euclidienne (voir 1.3 du chapitre d'arithmétique) : Soit a un entier positif et b un entier positif non nul. Alors il existe un couple unique d'entiers (q, r) tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Reconstituer sur votre copie la preuve en utilisant dans le bon ordre les 15 items suivants (tous doivent être utilisés une seule fois et aucun autre argument n'est nécessaire). On commencera au choix par l'unicité ou par l'existence.

- On a $-b < r_2 - r_1 < b$ car $0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$
- donc on a bien $0 \leq r < b$
- Soient (q_1, r_1) et (q_2, r_2) deux couples qui vérifient $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ avec $0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$.
- On considère l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } bn \leq a\}$
- donc $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$
- On a $bq \leq a < b(q + 1)$ car sinon q ne serait pas le plus grand élément de E
- donc le couple (q, r) ainsi défini vérifie $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.
- On a $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ car $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$
- donc $q_1 - q_2 = 0$
- On montre l'unicité du couple (q, r) vérifiant les conditions du théorème
- On montre l'existence d'un couple (q, r) vérifiant les conditions du théorème
- donc $r_2 - r_1$ est un multiple de b
- E possède un plus grand élément qu'on appelle q.
- On note $r = a - bq$
- donc $r_2 - r_1 = 0$ car 0 est le seul multiple de b strictement compris entre $-b$ et b