

COMMENT CALCULER $\sqrt{2}$ EN FAISANT DU DÉCOUPAGE

Gilles DAMAMME

Maître de conférences, UNIVERSITE DE CAEN-NORMANDIE

LMNO

gilles.damamme@unicaen.fr

Résumé

Le but de cet atelier est de trouver une bonne approximation de $\sqrt{2}$ uniquement avec des découpages et quelques additions, sans utiliser la calculatrice.

Plus précisément, il s'agit de retrouver une démarche inspirée de l'algorithme d'Euclide.

INTRODUCTION

1. But de l'atelier

Le but de l'atelier était de trouver une bonne approximation de $\sqrt{2}$ uniquement avec des découpages et quelques additions, sans utiliser la calculatrice.

Mais il s'agissait aussi de retrouver une démarche inspirée par l'algorithme d'Euclide et qu'ont probablement fait les Grecs durant l'Antiquité (avec autre chose que du papier...).

Cette activité a été expérimentée deux années de suite avec des étudiants de L3 en histoire des mathématiques où elle servait de préliminaire à l'étude du texte d'Euclide sur l'incommensurabilité du côté d'un carré et de sa diagonale mais l'activité proposée peut tout à fait être adaptée pour des élèves de seconde ou troisième.

2. Expérimentation avec des étudiants

J'ai rappelé aux étudiants que le rapport de la longueur d'une feuille de format A3 (resp. A2, A1, A4 etc.) sur sa largeur est $\sqrt{2}$ et leur ai proposé d'effectuer l'algorithme d'Euclide à partir de deux bandes de papier, l'une de la taille de la longueur d'une feuille de format A3 et l'autre de la taille de la largeur, et de former par découpage des bandes de papier de plus en plus petites jusqu'à ce que l'une de ces bandes puisse (à peu près) mesurer la bande précédente et par suite toutes les autres bandes de papier. En appelant « unité » la mesure de cette plus petite bande et en remontant ensuite on peut calculer combien la largeur d'une feuille de format A3 mesure d'unités et combien la longueur de la feuille de format A3 mesure d'unités. En effectuant alors le rapport des deux entiers obtenus, on obtient une approximation de $\sqrt{2}$.

Cette activité a bien fonctionné les 2 années et les étudiants ont souvent trouvé de bonnes approximations de $\sqrt{2}$ (voir annexe) en général différentes selon les groupes de travail (les étudiants travaillaient par deux ou trois). Par contre, il ne leur apparaissait pas en faisant cette activité que $\sqrt{2}$ pouvait être irrationnel (même s'ils connaissaient déjà ce résultat). Néanmoins la 2^e année, en confrontant les résultats de chaque

groupe au tableau, certains étudiants ont remarqué une certaine régularité dans le nombre de bandes obtenues par découpages successifs et cela m'a permis quelques semaines plus tard de faire le parallèle avec le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ quand les fractions continues ont été évoquées en cours.

3. L'ATELIER DE TALENCE

1. Présentation

Pour l'atelier de Talence, c'était sensiblement la même activité que pour les étudiants de Licence 3 qui était proposée aux participants de l'atelier, à la différence qu'elle ne servait pas d'introduction à l'étude du texte d'Euclide. Suivaient deux autres activités, l'une de partage, et une autre de réflexion sur la réutilisation de l'activité avec sa propre classe. Voici la feuille qui était distribuée aux participants de l'atelier :

Activité 1 :

Prendre une feuille A3 et plier un côté de la feuille sur un côté perpendiculaire de façon à former un pli représentant la diagonale d'un carré de côté la largeur de la feuille A3.

Mesurer avec une bande de papier cette diagonale et comparer la longueur de la feuille A3 : Que remarque-t-on ?

On note A la longueur de la feuille A3 et B sa largeur : on découpe à l'aide de ciseaux sur deux feuilles A3 une bande de longueur A et une autre de longueur B.

À la bande de longueur A, on retranche autant de fois que possible la longueur B : on obtient ainsi une bande de longueur C et on réitère l'opération, la plus petite bande étant retranchée à chaque fois de la plus grande.

On continue ainsi de suite en notant à chaque fois les étapes jusqu'à ce qu'on obtienne une bande de papier qui mesure (éventuellement approximativement) la bande précédente.

On appelle "unité" le morceau final de bande lorsque qu'on arrête l'itération.

Combien d'unités mesure la longueur A (la diagonale d'un carré de côté B) et combien d'unités mesure la largeur B ?

En déduire une approximation de $\sqrt{2}$.

Remarque : on peut faire aussi l'activité avec une feuille A4, A2 et A1.

Activité 2 :

Partage des résultats et commentaires

A partir du partage précédent, quelles conjectures pouvez-vous faire ?

Peut-on trouver des triplets pythagoriciens où l'on ait deux fois le même entier ?

Activité 3 :

Comment adapter l'activité 1 à sa propre classe ? Préliminaires, notations, prolongement, etc.

2. Déroulement des activités

Comme c'était suggéré, les participants se sont regroupés en groupes de 2 ou 3 pour faire l'activité qui s'est bien déroulée, les participants obtenant des bonnes approximations de $\sqrt{2}$. Là encore, pendant le partage, il n'y a pas eu d'indices relevés aiguillant vers une **conjecture** de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. En effet, celle-ci est loin d'être évidente. Néanmoins, quand on fait une confrontation des différents résultats, on aboutit souvent à des approximations par des rationnels différents, ce qui peut laisser penser que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel précis, sinon on finirait par régulièrement tomber dessus. De plus, si on commence à observer les résultats obtenus par découpage, on s'aperçoit à partir du découpage de B par C (comme sur les deux copies montrées en exemple, mais ce n'était pas le cas sur toutes les copies...), que le découpage en deux morceaux (plus un reste) semble récurrent. En fait, plus on fait un découpage précis avec une feuille de plus en plus grande, plus cette régularité va apparaître et laisser conjecturer qu'elle peut se prolonger indéfiniment. Si les Grecs ne connaissaient pas les développements en fraction continue (ils apparaîtront 20 siècles après Euclide...) qui permettent d'aboutir à l'irrationalité de $\sqrt{2}$, ils possédaient des arguments géométriques (voir par exemple l'article de François Boucher cité en biographie, page 67) pour montrer que cet algorithme ne se termine pas et montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$, ou plutôt l'incommensurabilité du côté d'un carré et de sa diagonale. Néanmoins la preuve présentée dans les *Eléments* ne s'appuie pas sur ce genre d'argument.

Certains participants ont envisagé de faire cette activité avec leur propre classe. Il est à souligner à ce propos que lorsqu'on présente cette activité au collège (par exemple après l'étude du théorème de Pythagore) le fait que les élèves ne connaissent pas l'irrationalité de $\sqrt{2}$ leur donne un regard neuf sur cette question. Par contre il semble utile de faire une activité préliminaire pour montrer que le rapport de la longueur d'une feuille de format A3 sur sa largeur est $\sqrt{2}$. On peut par exemple par pliage faire coïncider la diagonale d'un carré construit à partir de la largeur d'une feuille A3 avec la longueur d'une autre feuille A3 pour « vérifier » que les mesures sont les mêmes et utiliser ensuite le théorème de Pythagore.

3. Conclusion

Le but de l'atelier était de calculer une approximation de $\sqrt{2}$ sans utiliser la calculatrice mais aussi sans utiliser le double décimètre ou un instrument de mesure graduée. À travers cette démarche on aborde une approche différente de $\sqrt{2}$, on introduit une dimension historique et on s'interroge sur la manière dont l'auteur (ou les auteurs) des *Eléments* pratiquaient le calcul. En effet les *Eléments* d'Euclide commencent par la géométrie et ensuite seulement on fait de l'arithmétique, et lorsqu'on fait de l'arithmétique, les nombres sont représentés par des lignes, ce qui laisse à penser que les Grecs alliaient probablement la géométrie et la pratique de calcul. Dans cet état d'esprit on peut à l'aide de la même pratique de découpage, calculer le PGCD de deux nombres en utilisant l'algorithme d'Euclide (en définissant au préalable une unité) : cette activité peut servir de préliminaires à celle présentée lors de l'atelier (à condition bien sûr de pouvoir disposer du temps pour faire ces activités).

III - BIBLIOGRAPHIE

Boucher François, Au fil des maths 551. *Petite enquête sur être ou ne pas être un rationnel*, p65-70

Euclide, Eléments. *Proposition 67, Livre X.*

IV - ANNEXE : COPIES ÉTUDIANTS, PHOTO

Exemples de productions d'étudiants :

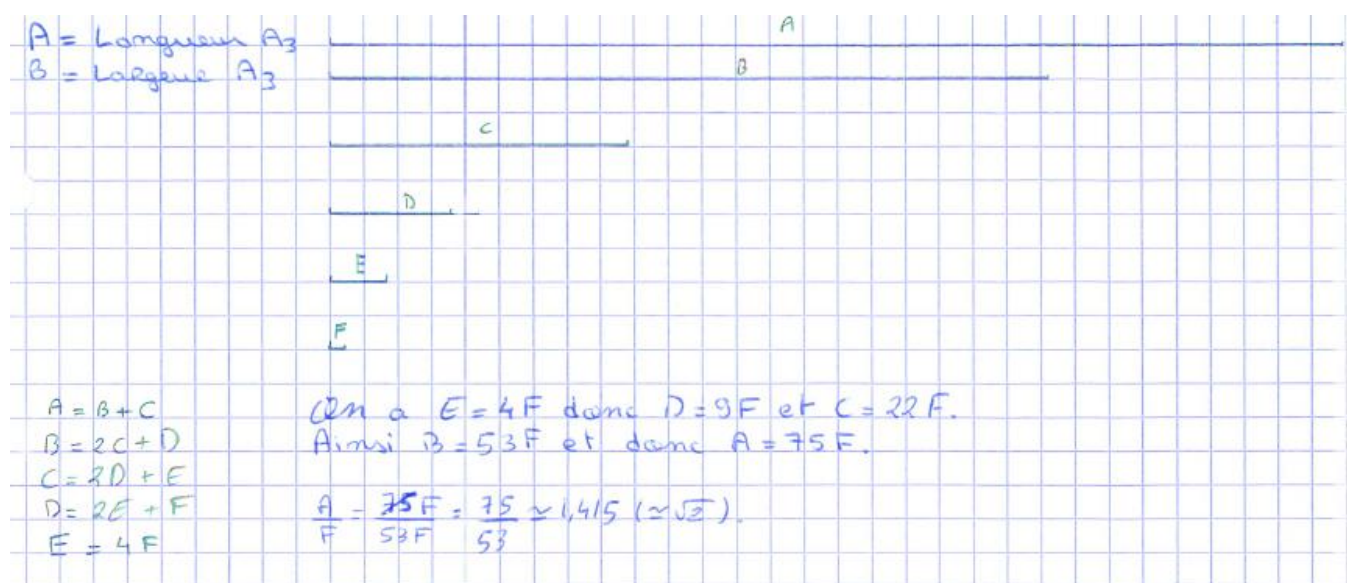


Figure 1. Copie 1

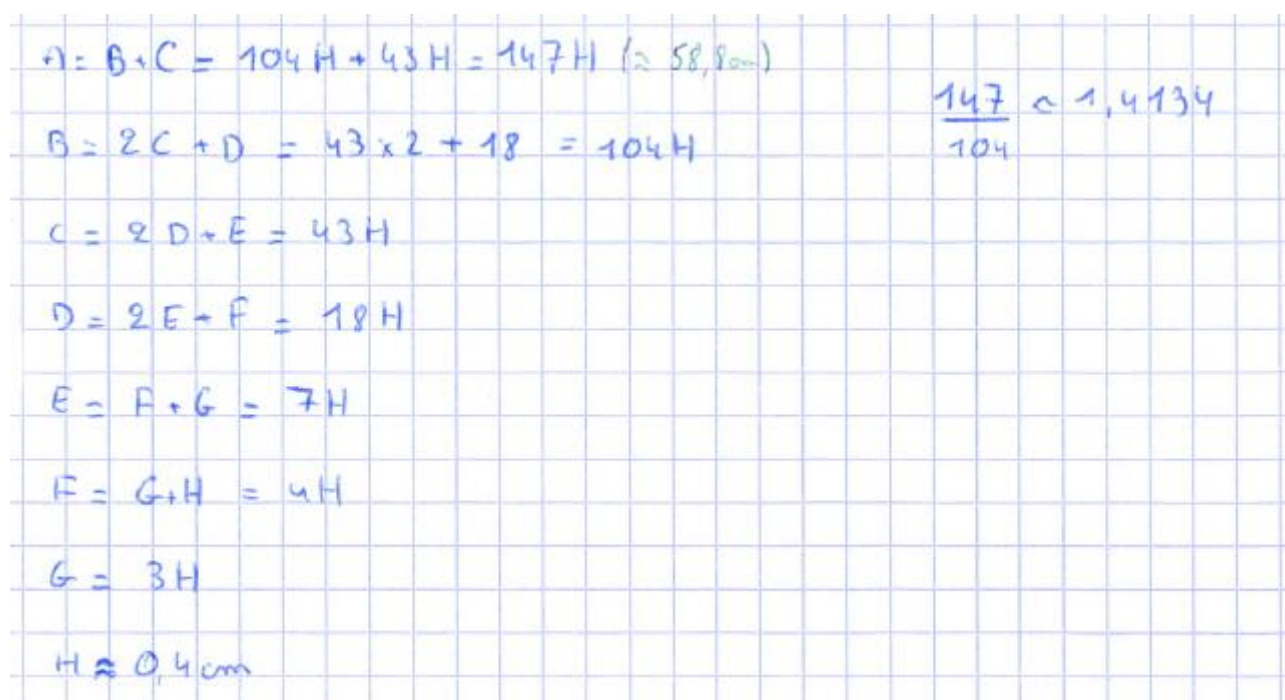


Figure 2. Copie 2



Figure 3. Étudiants lors de l'activité