NOMBRES, OPÉRATIONS ET PROBLÈMES RÉCRÉATIFS : HISTOIRE(S) PARFAITE(S) ET FIGURÉE(S) POUR ENSEIGNER L'ARITHMÉTIQUE EN CYCLE 3

Marc MOYON
INSPÉ DE L'ACADÉMIE DE LIMOGES, UNIV. LIMOGES, CNRS
XLIM, UMR 7252
marc.moyon@unilim.fr

Résumé
Cette contribution a pour objectif d'afficher quelques exemples de ce qui pourrait, dans l'histoire et l'épistémologie des mathématiques, être introduit pour travailler l'arithmétique dès la fin de l'école primaire et tout au long du collège (voire du lycée). L'histoire des mathématiques, quelle que soit l'époque, quelle que soit la culture, quelle que soit la langue, nourrit les enseignants et permet en particulier de construire des ressources pédagogiques originales à tous les niveaux de l'enseignement des mathématiques, comme le montrent les nombreux travaux des IREM, de la commission inter-IREM « histoire et épistémologie » et ceux du groupe international HPM (history and pedagogy of mathematics). Même si les sources historiques peuvent paraître difficiles d'accès pour un élève de cycle 3, elles offrent néanmoins de nombreuses opportunités pour travailler le concept de nombres, les opérations élémentaires et le raisonnement arithmétique. Il s'agit ici de le démontrer à partir de trois exemples principaux : les nombres figurés et polygonaux, les abaques à jetons à partir de comptabilités médiévales, la duplication égyptienne et le code binaire.

I - INTRODUCTION

Si l'on s'intéresse aux documents officiels disponibles pour le cycle 3 afin de comprendre comment l'arithmétique et ses raisonnements peuvent être entendus et définis dans le champs scolaire[1], il est difficile de trouver une définition précise de l'arithmétique, en tant que chapitre des mathématiques de l'école. Le terme est néanmoins très souvent employé pour caractériser des problèmes faisant intervenir les quatre opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division. Une étude des principaux dictionnaires (mathématiques) disponibles s'est montrée nécessaire[2]. Le Lionnais fournit une longue description dans son dictionnaire dont les passages suivants sont extraits :

D'abord limitée [..] *à des procédés de calcul combinant des entiers naturels par des opérations élémentaires,*

[1] L'ensemble des ressources sont disponibles sur https://eduscol.education.fr/251/mathematiques-cycle-3.

[2] Deledicq et Launay (2021) n'ont aucune entrée pour « arithmétique » dans leur *Dictionnaire amoureux des mathématiques*. Le *Dictionnaire des mathématiques* de la collection "Encyclopaedia Universalis" (coordonné par J.-L. Verley) n'a pas plus d'entrée « arithmétique » et sa lecture ne m'a pas permis de dégager une caractérisation simple de la discipline.

> *l'arithmétique s'est ensuite donnée pour but l'étude des relations des nombres rationnels entre eux et avec des opérations.* […] *L'arithmétique a le privilège d'avoir passionné les mathématiciens les plus éminents en même temps qu'elle n'a cessé d'attirer les amateurs. Cette séduction tient, pour beaucoup, dans ce dernier cas, au fait que des problèmes très difficiles, parfois non résolus, ont souvent des énoncés simples qui peuvent être compris à partir d'une formation mathématique presque inexistante. (Bouvier, Georges et Le Lionnais, 1993, p. 63)*

Enfin, Busser et Hauchecorne (2021) rédigent une notice dans leur *Dictionnaire décalé des mathématiques* :

> *Quel joli mot, un tantinet désuet, et dont la racine grecque nous rappelle ses débuts dans l'Antiquité. Les Grecs se posaient déjà de nombreux problèmes de son ressort.* […] *De nos jours, on préfère parler de théorie des nombres.* […] *Dans le sens commun, l'arithmétique concerne les opérations sur les nombres entiers positifs et leurs propriétés. (Busser et Hauchecorne, 2021, pp. 13-14)*

Le CNRTL (Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales) définit l'arithmétique comme « la science qui a pour objet l'étude de la formation des nombres, de leurs propriétés et des rapports qui existent entre eux[3] ». Si le terme 'arithmétique' est « un tantinet désuet », la discipline qu'il représente a une longue histoire, depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours où les mathématiciens et amateurs éclairés s'intéressent toujours aux problèmes anciens non résolus[4] et à de nouvelles questions. Il ne peut donc pas s'agir ici de brosser cette histoire même à grands traits, mais plutôt de lever le voile sur certains épisodes sélectionnés qui permettent d'en dégager quelques intérêts pour l'enseignement d'aujourd'hui, et d'illustrer l'universalité et l'interculturalité des questions sur les nombres (ici, entiers positifs) et leurs opérations.

C'est dans ce contexte qu'il faut entendre : « La mise en perspective historique de certaines connaissances (numération de position, apparition des nombres décimaux, du système métrique, etc.) contribue à enrichir la culture scientifique des élèves. » Voilà, le décor est planté. Il s'agit, d'après les instructions officielles – ici, le programme de cycle 3, cycle de consolidation[5] – d'« enrichir la culture scientifique des élèves ». Nous ne saurions être en accord avec ce point de vue que si la science (les mathématiques pour ce qui nous concerne) elle-même, et sa pratique, font intégralement partie de ladite « culture scientifique ». En effet, il est évident que la culture scientifique ne peut être envisagée indépendante de la science et nous insisterons, ici comme ailleurs, sur l'importance d'une telle culture scientifique pour les élèves, mais aussi pour les enseignants (Moyon, 2012).

Aussi, nous ne formulerons pas ci-après des recommandations sur le comment et le pourquoi intégrer l'histoire des mathématiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : la littérature sur

[3] https://www.cnrtl.fr/definition/arithmétique.

[4] Le meilleur exemple est probablement la démonstration d'Andrew Wiles en 1994 du fameux théorème de Fermat, clôturant ainsi plus de 3 siècles de recherche.

[5] Programme de cycle, 2020 ; BO n°31 du 30 juillet 2020.

le sujet est plurielle et généreuse[6]. Il ne s'agit pas plus d'une nouvelle étude empirique, au sens défini par Jankvist (2009b) et repris par Guillemette (2011), comme il en existe de nombreuses[7] :

> [Jankvist] *entend par études empiriques, les recherches allant de la petite étude qualitative à la grande étude quantitative qui, par l'expérimentation et l'emploi de tests, questionnaires, entrevues ou d'une méthodologie quelconque, discutent et élaborent des conclusions à partir de données recueillies sur le terrain. (Guillemette, 2011, p. 11)*

La seule ambition de cette contribution est donc de décrire des exemples documentés issus de l'histoire des mathématiques, accompagnés d'une large bibliographie, qui seraient propices aux travaux et autres réflexions arithmétiques en cycle 3 (voire en cycle 4 et au lycée). Mais nous ne ferons pas état d'analyses didactiques ou de « données recueillies sur le terrain », en dehors de certaines références bibliographiques. Aussi, nos exemples ne doivent pas être vus comme des incontournables ou des modèles : il faut les envisager comme des jalons illustrant une longue histoire, des épisodes historiques ayant laissé des traces (images, textes, artefacts…) qui nourrissent à la fois les réflexions pédagogiques et didactiques de tout enseignant, et les réflexions mathématiques des élèves lorsqu'elles sont opportunément utilisées en classe[8]. Il est donc indispensable de considérer ces exemples à leur juste valeur : des ressources (voire des supports) pour des situations d'apprentissage (à construire) variées et nombreuses permettant aux élèves d'apprécier le rôle des mathématiques dans le développement des sociétés (Fauvel et van Maanen, 2000, pp. 1-29). Reprenant la classification de Jankvist (2009a), nous pensons que ces exemples sont adaptés à une « approche par modules d'apprentissages » plutôt que nourrir des anecdotes ou des petites capsules historiques dont les valeurs didactiques restent discutables : l'histoire illustre un sujet mathématique central, incluant éventuellement l'utilisation de sources primaires.

Les manuscrits originaux[9] sont propices à un travail très intéressant, à l'image de la table de multiplication (en numération romaine) de la figure 1. L'observation est alors essentielle pour formuler des hypothèses (Que représente le document ? Comment est-il organisé ? Comment peut-on le comprendre ?...). Les élèves sont alors amenés à analyser le document, pour formuler des hypothèses et, le cas échéant, conclure. L'observation est nécessairement active : les élèves ne peuvent pas se limiter à la seule description visuelle du document. En effet, s'agissant de documents mathématiques, les comprendre implique de percer (tous) les secrets des nombres et des opérations, explicites comme implicites. C'est la voie à suivre pour que les élèves testent leurs hypothèses et justifient leur conclusion. Le document historique peut être le point de

---

[6] Voir la récente synthèse rédigée par Chorlay, Clark et Tzanakis (2022).

[7] Guillemette (2011) approfondit l'étude du cadre méthodologique employé dans les études empiriques analysées par Jankvist (2009b).

[8] Nous laissons ici aux lecteurs les éventuelles exploitations pédagogiques. Cette contribution n'a pas pour objet de construire des séances clés en main ou une quelconque ingénierie didactique. Au mieux, nous renvoyons à la littérature de référence, laissant le soin aux professionnels de l'enseignement et de la formation des enseignants de tirer un bon parti de ces ressources, de ces (nouveaux) éclairages.

[9] Les références des manuscrits seront systématiquement données ainsi que les liens (entre crochets droits) qui y donneraient accès, lorsque cela est possible.

départ d'un apprentissage (séance d'introduction) ou, au contraire une tâche finale ; cela dépend du document et du contrat didactique pensé par l'enseignant.

Figure 1 : Table de multiplication dans le De institutione arithmetica, *Boèce – Londres, British Library, ms. Harley 549, fol. 14r°, 12ᵉ s. [https://www.bl.uk/fr-fr/collection-items/boethius-de-institutione-arithmetica]*

Enfin, si l'enseignant fait le choix d'une lecture de textes anciens, alors Fried (2007) montre l'importance d'une double lecture : en tant que mathématicien (comprendre le texte, le raisonnement, en donner une écriture moderne pour s'assurer de la bonne compréhension) bien sûr, mais aussi en tant qu'historien (se plonger dans l'époque de la source, éviter les anachronismes, situer la source dans la longue histoire des mathématiques notamment)[10].

[10] Pour Fried (2007), la lecture de l'historien est dite "diachronique" tandis que celle du mathématicien est "synchronique" ; les deux lectures étant complémentaires. L'histoire est l'élément clé d'un enseignement qui inculquerait le sens de l'activité mathématique ayant des aspects à la fois non historiques et historiques afin d'avoir une vision plus complète des mathématiques elles-mêmes. À partir de la lecture de Diophante et Euler, Barbin (2022) met en évidence trois niveaux de lecture en fonction de l'objectif (épistémologique, culturel ou épistémique) et des pratiques pédagogiques (utiliser, introduire ou intégrer l'histoire des mathématiques en classe).

À travers les différents exemples proposés dans cette contribution[11], il s'agit, entre autres : (1) de donner à voir les mathématiques d'avant (les contenus, les écritures), mettant en lumière l'évolution progressive de la discipline (aussi bien dans le fond que dans la forme) ; (2) d'accéder à des sujets et problèmes variés ; (3) d'approfondir la compréhension des mathématiques ; (4) d'humaniser les mathématiques ; (5) de montrer que les mathématiques existent dans divers contextes et milieux.

Finalement, de manière générale, dans le cadre de l'éducation mathématique (ici, de l'arithmétique), l'histoire est plutôt envisagée comme un outil et non comme un objectif en soi. En effet, l'intention et l'ambition d'un enseignant (de mathématiques) à l'école, au collège ou au lycée est bien l'enseignement/l'apprentissage des mathématiques et non celui de l'histoire des mathématiques. Ainsi, l'enseignant de mathématiques (y compris le professeur des écoles) se doit de mettre les concepts propres à la discipline au centre de sa réflexion (et de celle des élèves), s'aidant de l'histoire et de l'épistémologie pour mieux les interroger ou/et les contextualiser.

II - DES NOMBRES FIGURÉS AUX PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES : LES NOMBRES POLYGONAUX

Les nombres figurés sont des nombres qui peuvent être représentés par un ensemble de points disposés dans des configurations géométriques particulières[12] : il s'agit alors d'une collection de points à compter. Les nombres figurés sont intéressants pour l'enseignement des mathématiques pour deux (au moins) raisons majeures. D'abord, ils offrent naturellement aux enseignants l'opportunité de travailler le fameux triptyque « manipuler, verbaliser, abstraire » à partir des points et des représentations géométriques. Ils permettent ensuite de faire le lien entre l'arithmétique (les nombres) et la géométrie[13].
Les nombres polygonaux, quant à eux, sont des nombres figurés particuliers où les 'configurations géométriques' correspondent à des polygones réguliers. De nombreux mathématiciens ont largement développé l'étude des nombres figurés en général, ou des nombres polygonaux et pyramidaux en particulier[14].

1. Les nombres polygonaux : quelques repères historiques

Au moins depuis l'*Introduction arithmétique* (figure 2) du néo-pythagoricien[15] Nicomaque de Gérase (1er/2e s. ap. J.C.) dans lequel l'auteur expose largement les nombres figurés et leurs propriétés (chapitres VII à XX du livre II), ils sont largement traités dans de nombreux textes d'arithmétique, souvent au sein

---

11 Les trois parties suivantes peuvent être lues de manière indépendante.

12 Voir d'autres exemples de représentations spatiales dans Schwer (2018).

13 En représentant les nombres ainsi, il est possible, par exemple, de distinguer les nombres pairs des impairs, de caractériser les nombres premiers, de visualiser et manipuler la notion de divisibilité d'un nombre. Les nombres figurés permettent en particulier de travailler le lien entre un nombre et une de ses représentations spatiales, « un pilier des mathématiques » qui invite à visualiser les nombres dans l'espace. Voir, à ce sujet, la note du conseil scientifique de l'Éducation Nationale n°5, février 2022.

14 Alors que je rédige cette contribution, le magazine *Tangente* publie un dossier spécial (n°215, décembre 2023) consacré aux nombres figurés, et notamment au travail du mathématicien Francesco Maurolico (1494-1575). J'en conseille la lecture.

15 Pythagore (6e s. av. J.C. ?) pourrait être à l'origine des nombres figurés.

d'un chapitre dédié. Diophante (3e s. ap. J.C. ?) y consacre même un court livre composé de cinq propositions (dont la dernière est incomplète) avec son *De polygonis numeris*[16].

L'*Introduction arithmétique* de Nicomaque[17] est d'une grande importance dans l'histoire des mathématiques, notamment grâce aux traductions en arabe et en hébreu dont elle bénéficie (Hofstetter, 2021). Au 8e s., Ḥabīb ibn Bahrīz produit une version à partir d'une traduction, perdue, du grec vers le syriaque. Cette nouvelle traduction est commentée et modifiée, dans le cadre de son enseignement, par al-Kindī (m. 870)[18]. Thābit Ibn Qurra (m. 901) réalise une autre traduction au 9e s. Ibn Ṭāhir al-Baghdadī (m. 1037), quant à lui, développe aussi pleinement et de manière originale ce chapitre dans son important traité d'arithmétique *al-Takmila fī l-ḥisāb* [le complément en calcul][19]. Encore au 14e s., l'*Introduction arithmétique* fait l'objet d'une traduction en hébreu[20] par l'érudit originaire d'Arles Qalonymos ben Qalonymos (m. après 1329). La connaissance précise du corpus néo-pythagoricien va permettre aux mathématiciens des pays d'Islam, en Orient comme nous venons de le voir mais aussi en Occident, de réaliser des développements originaux sur les nombres polygonaux et les progressions arithmétiques. Par exemple, les nombres polygonaux sont généralisés à un ordre quelconque et étendus grâce à une interprétation combinatoire à l'aide des coefficients binomiaux[21]. Parmi les auteurs de l'Occident musulman (Maghreb et al-Andalus), on peut citer Ibn Munᶜim (m. 1228) ou encore Ibn al-Bannā (m.1321) qui produisent, dans leur ouvrage respectif le *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul] pour le premier et le *Rafᶜ al-ḥijāb* [Lever du voile] pour le second, d'importants développements sur les nombres figurés et les propriétés arithmétiques qu'ils permettent de démontrer (Djebbar, 2000, 2004). Enfin, très récemment, Djebbar (2022) a montré tout l'intérêt du *Kitāb al-iqtiṣār* [Livre de l'essentiel] d'Abū l-Ṣalt (m. 1134), encore inédit.

En latin, Boèce (m. 524) est sans aucun doute le représentant de la tradition néo-pythagoricienne le plus important et le plus répandu. Le *De institutione arithmetica* [Institution arithmétique] (figure 3) fournit des extraits significatifs des développements sur les nombres figurés.

---

16 La première édition grecque a été réalisée par C. G. de Bachet de Méziriac avec une traduction latine, en même temps que celles des six livres des *Arithmétiques* alors connus (Diophante d'Alexandrie, 1621). Après l'édition critique de P. Tannery (Diophante d'Alexandrie, 1893-95), P. Ver Ecke traduit le texte en français en 1959 (Diophante d'Alexandrie, 1959) et enfin, F. Acerbi en donne une nouvelle édition (Diophante d'Alexandrie, 2012) qui est aujourd'hui l'édition de référence (avec une traduction italienne).

17 La traduction française de référence reste celle de Janine Bertier ; (Nicomaque de Gérase, 1978).

18 Dans toute la suite du texte, je précise, après la première occurrence d'un auteur, sa date de mort à l'aide de l'abréviation m. (lorsqu'on la connaît), ou sa période d'activité.

19 Saidan (1997) résume les éléments nouveaux d'al-Baghdadī alors qu'il s'interroge à propos de « l'influence grecque sur l'arithmétique arabe ».

20 Voir l'étude séminale de Freudenthal et Lévy (2004) pour la tradition hébraïque.

21 Cette nouvelle extension dépasse le cadre de la présente contribution, voir (Rashed, 1983).

*Figure 2 : (à gauche) Copie du Livre II de l'*Introduction arithmétique *de Nicomaque de Gérase, Paris, BnF, Grec 2762, fol. 49v°, faisant apparaître en marge des nombres figurés. [https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b107221294] (à droite) Copie du* Fiqh al-ḥisāb *[La science du calcul] d'Ibn Munᶜim*[22]*, ms. Rabat BG 416 Q, p. 300.*

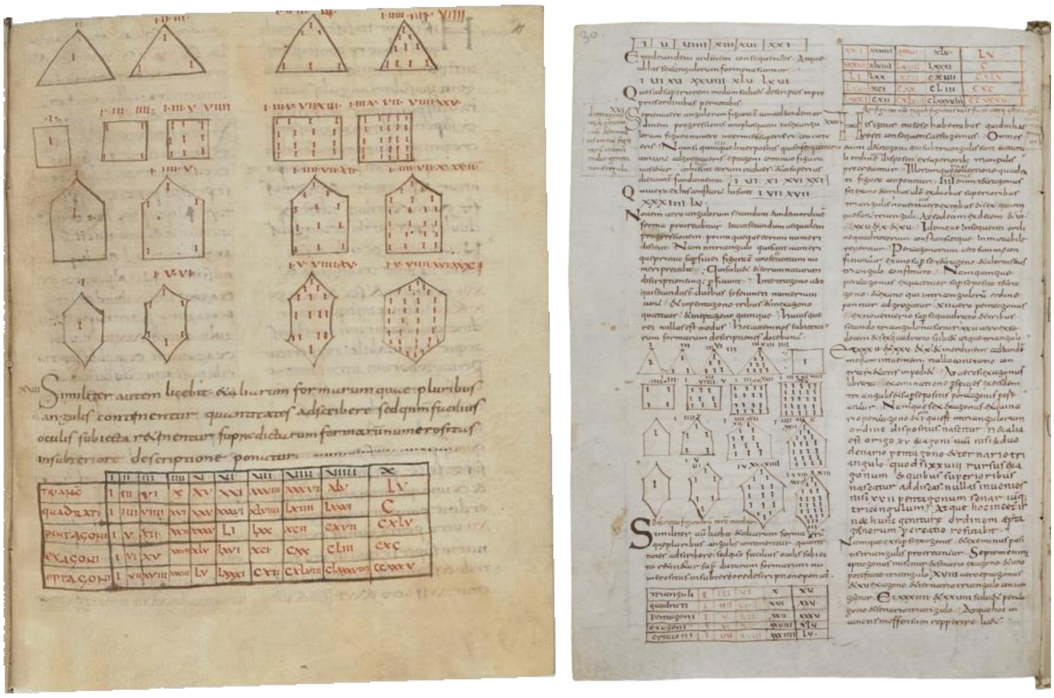


Figure 3 : Figures des nombres polygonaux dans des copies de la tradition boécienne avec tableau de correspondance (voir tableau 1). (à gauche) Paris, BnF, ms. lat. 10251, fol.41r° (manuscrit, 9e-10e s.) [https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b105422015] (à droite) Bibliothèque de l'abbaye de Saint-Gall (Suisse), cod. Sang. 248, p. 30 (parchemin du milieu du 9e siècle) [https://www.e-codices.unifr.ch/fr/list/one/csg/0248]

Pour éviter tout problème de lecture et pour montrer explicitement l'intérêt d'une telle représentation tabulaire, le tableau 1 ci-dessous reprend (en chiffres indo-arabes) les nombres polygonaux des manuscrits

[22] Je remercie Ahmed Djebbar de m'avoir donné une copie de cette page.

de la figure 3 et celui de la figure 2 (à droite). Il s'agit des dix premiers termes des suites des nombres polygonaux (à partir des nombres triangulaires).

Tableau 1 : Tableau des premiers nombres polygonaux. Les lignes vertes ne sont écrites que dans la figure 2 (à droite); la figure 3 ne fait apparaître que les lignes noires.

	1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
Triangle	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Carré	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagone	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Hexagone	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagone	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
[Octogone]	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
[Ennéagone]	1	9	25	46	75	111	174	204	261	325
[Décagone]	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

2. La formation des nombres polygonaux

La formation des nombres polygonaux n'est pas simple pour les élèves. Pour mieux comprendre, suivons le vieil adage « une image vaut mieux qu'un long discours » et observons ce que le mathématicien et ingénieur des travaux publics de l'État Émile Fourrey (m. 1959) a représenté dans ses *Récréations arithmétiques* au début du 20e siècle (figure 4).

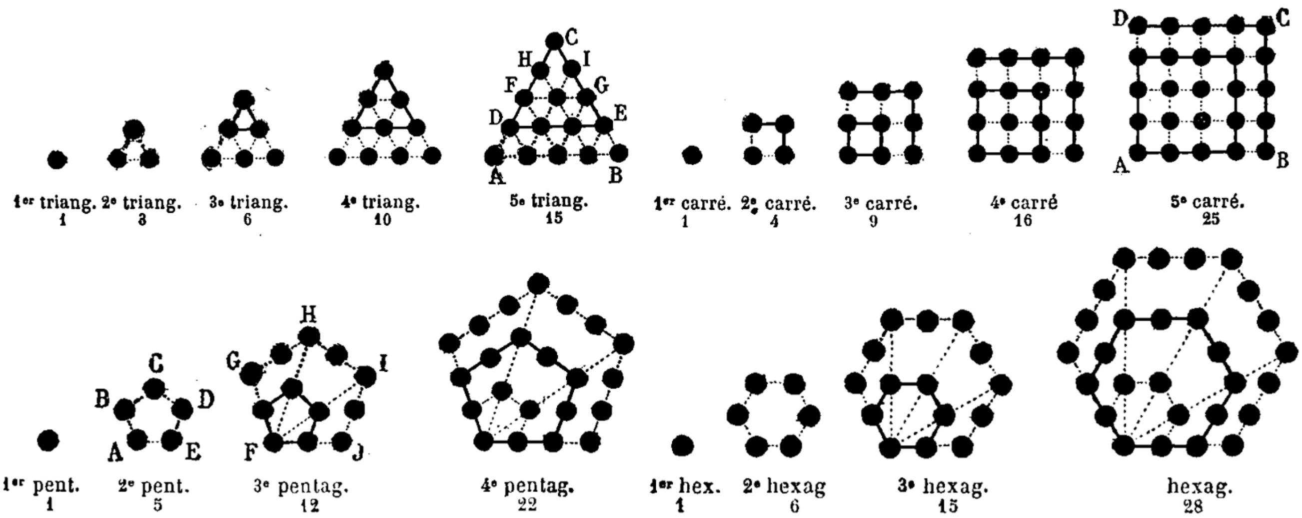


Figure 4 : La construction des nombres polygonaux dans Fourrey (1901, pp. 56-64)

Chaque nombre polygonal est obtenu à partir du précédent en ajoutant un « gnomon », c'est-à-dire une figure qui, ajoutée à la précédente, forme une nouvelle figure semblable à la précédente. Il s'agit de transformer le polygone en un nouveau polygone (semblable), avec un point de plus sur chacun de ses côtés. Prenons l'exemple des nombres hexagonaux (figure 5).

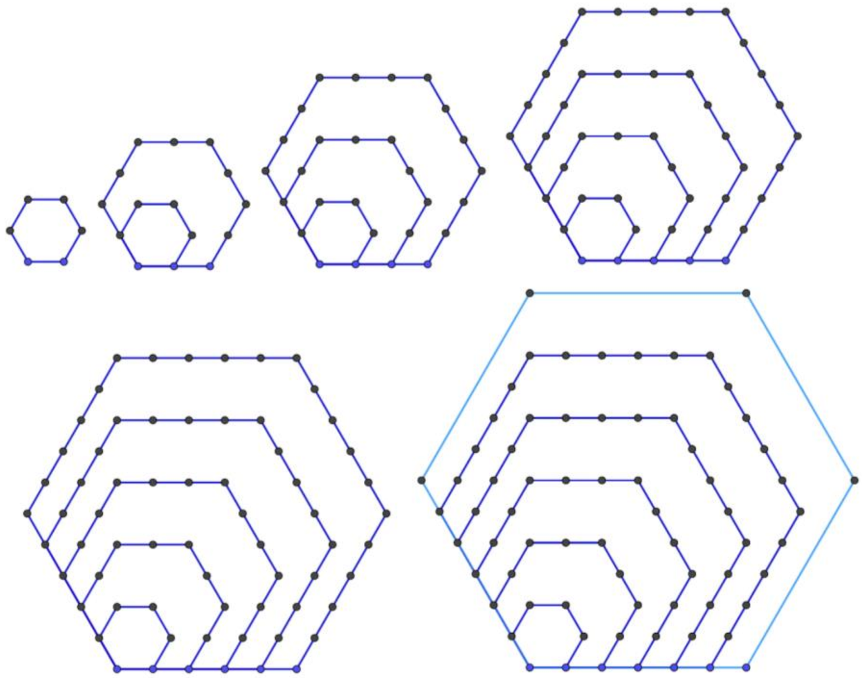


Figure 5 : Formation des nombres hexagonaux (6 ; 15 ; 28 ; 45 ; 66 ; 91)

Ainsi, par exemple, les nombres triangulaires correspondent aux nombres {1 ; 1+2 ; 1+2+3 ; 1+2+3+4 ;…} et le n-ième nombre triangulaire est : 1+2+3+4+…+n ; c'est-à-dire la somme des n premiers entiers. Le gnomon, soit la différence entre deux nombres consécutifs, est une simple ligne (la 'base' du nouveau triangle) ; la suite des gnomons correspond alors à la suite des nombres entiers à partir de 2.

Les nombres carrés sont les nombres {1^2 ; 2^2 ; 3^2 ; 4^2 ; 5^2 ;…}={1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ;…}, c'est-à-dire la suite des nombres carrés et le n-ième terme est n^2. Le gnomon est ici une équerre – construit sur deux (= 4 – 2) côtés contenant respectivement 2 points et 1 seul – ; la suite des gnomons correspond alors aux nombres impairs successifs à partir de 3 : {1 ; 3 ; 5 ; 7 ;… ; $2k$-1 ; …}.

Considérons les nombres pentagonaux. Ce sont les nombres {1 ; 1+4 ; 1+4+7 ; 1+4+7+10 ; …}, soit la suite {1 ; 5 ; 12 ; 22 ; …}. Le gnomon à l'ordre n est alors construit sur trois (= 5 – 2) côtés (ce qui complète le pentagone à partir du nombre précédent) de n points. Mais, comme ces côtés se rencontrent en 2 points : le gnomon compte $3n$ – 2 points.

Considérons enfin les nombres hexagonaux. Ce sont les nombres {1 ; 1+5 ; 1+5+9 ; 1+5+9+13 ; …}, soit la suite {1 ; 6 ; 15 ; 28 ; …}. Le gnomon à l'ordre n est alors construit sur quatre (= 6 – 2) côtés de n points. Mais, comme ces côtés se rencontrent en trois (= 6 – 3) points : le gnomon compte $4n$ – 3 points.

De manière générale[23], considérons un nombre k-polygonal (polygone à k côtés). Son gnomon à l'ordre n est construit sur (k-2) côtés contenant chacun n points, se coupant en (k-3) points. Le gnomon compte alors $n(k-2)-(k-3)$ points. C'est donc la suite de nombres {1 ; k – 1 ; $2k$ – 3 ; $3k$ – 5 ;…}. Aussi, on remarque

[23] La lecture de ce paragraphe (niveau lycée) n'est pas nécessaire pour comprendre la suite de la contribution, on peut s'en dispenser en première lecture. Il nous semble que les premiers exemples avec les représentations géométriques et le tableau 1 permettent d'une part de comprendre suffisamment les nombres polygonaux et d'autre part de mettre en place des séances de travail en classe de mathématiques, à partir de diverses manipulations.

que la suite des gnomons des nombres (k+2)-polygonal est {1 ; k + 1 ; 2k + 1 ; 3k + 1 ; …; (n-1)k + 1 ; …} : il s'agit de l'expression d'une suite arithmétique de raison k. Aussi la suite des nombres (k+2)-polygonaux est (1 ; k+2 ; 3k+3 ; 6k+4 ; ... ; n+$\frac{1}{2}$n(n-1)k ; …) correspondant aux sommes partielles de la suite arithmétique précédente (avec n le rang du nombre (k+2)-polygonal). On retrouve facilement les nombres du tableau 1 précédent avec k = 1 pour les nombres triangulaires (1 + 2 = 3), k = 2 pour les nombres carrés (2+2 = 4), k = 3 pour les nombres pentagonaux…

3. Quelques propriétés arithmétiques élémentaires

> *Cette représentation des nombres entiers à travers des figures géométriques usuelles (nombres triangulaires, nombres carrés, nombres oblongs) a facilité l'établissement de règles arithmétiques entre ces nombres, par la seule considération de la disposition de leurs unités. (Chambon, 2020, p. 62)*

Dans cette partie, nous nous proposons de révéler quelques-unes de ces propriétés arithmétiques que les nombres polygonaux permettent de montrer[24]. Pour démontrer de façon plus académique – c'est-à-dire avec la rigueur que le programme de mathématiques exigerait –, le calcul littéral sera utile au collège, et au lycée, le raisonnement par récurrence peut être intéressant.

Parmi les propriétés les plus élémentaires, citons « la différence des carrés de deux nombres consécutifs est égale à la somme de ces deux nombres » (proposition 1) ou encore « la somme de deux nombres triangulaires consécutifs est égale à un carré » (proposition 2). Les figures 6 et 7 dévoilent explicitement ces énoncés pour un cas général (à condition d'accepter les implicites des points de suspension).

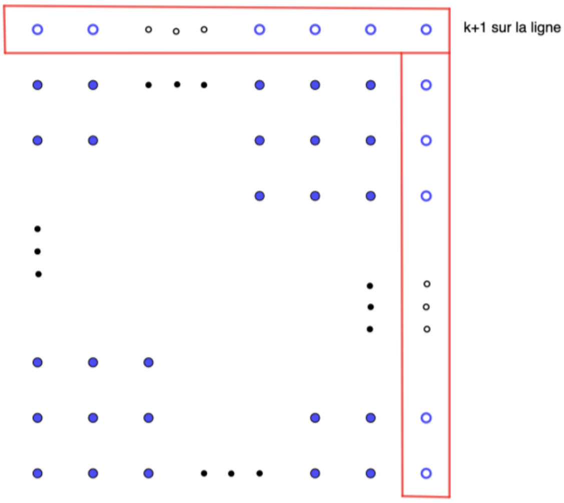


Figure 6 : Illustration de la proposition 1 : le gnomon (équerre) rouge est exactement la différence entre le grand carré (construit sur k+1) et le petit carré (construit sur k), donc, $C_{k+1} - C_k = (k+1) + k$ pour tout k entier, si C_k est le nombre carré d'ordre k (i.e. k^2).

[24] Bien d'autres propriétés peuvent être montrées et des problèmes résolus, nous avons limité ici (par contraintes éditoriales) notre choix aux plus simples. Certaines des propriétés les plus élémentaires sont énoncées et facilement démontrables au collège à condition d'accepter d'utiliser le calcul littéral. L'observation des nombres figurés et/ou polygonaux permet de faire travailler l'intuition chez les plus petits (avant l'introduction du calcul littéral) et de penser des dispositifs de remédiation (au moment de l'introduction de la lettre, par exemple).

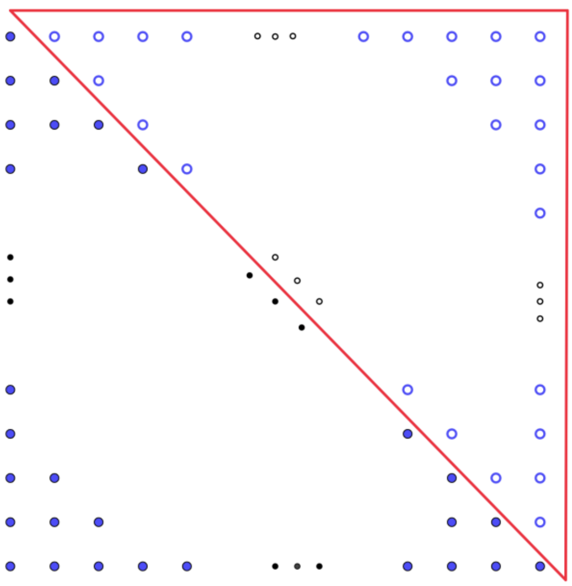


Figure 7 : Illustration de la proposition 2 : $T_k + T_{k-1} = k^2$ *pour tout* k *entier, si* T_k *est le nombre triangulaire d'ordre* k.

3.1. La somme des entiers

Si l'on considère un arrangement et une bonne combinaison (figure 8) du nombre triangulaire d'ordre n (pris deux fois), on observe qu'il produit le nombre rectangulaire ou oblong (n ; n+1).

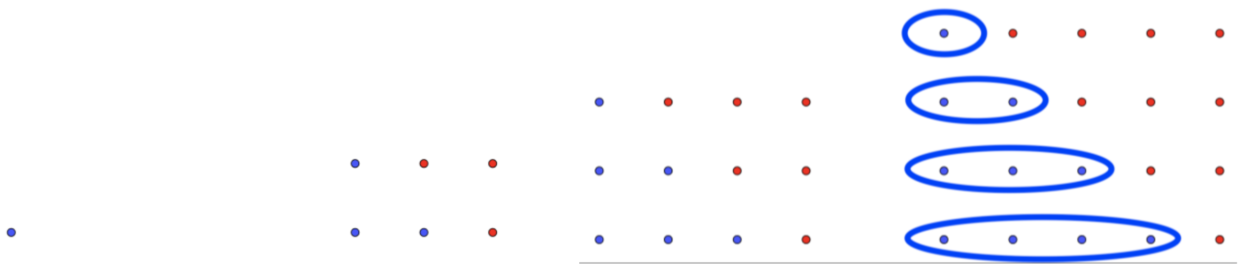


Figure 8 : Combinaison de nombres triangulaires (d'ordre 1, 2, 3 et 4)

Or, il a été montré précédemment que le nombre triangulaire d'ordre n correspond à la somme des n premiers nombres entiers (ce qui se vérifie visuellement sur la figure 8, les points entourés en bleu).

Ainsi, on a :

$$2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) = n \times (n + 1)$$

Ou encore,

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

L'exemple avec le nombre triangulaire d'ordre 4 donne :

$$(1 + 2 + 3 + 4) = \frac{4 \times (5 + 1)}{2} = 10$$

3. *La somme des impairs*

Prenons maintenant la suite des nombres carrés (figure 9). Il a été précédemment expliqué que chaque nombre carré d'ordre n est construit à partir du nombre carré d'ordre n-*1* en ajoutant un gnomon (équerre) correspondant à (2n-1).

À l'aide du calcul littéral, on peut écrire : $n^2 = (n-1)^2 + (2n-1)$.

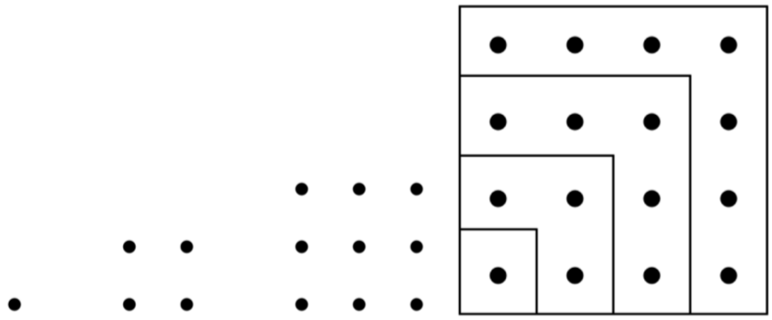


Figure 9 : Premiers nombres carrés (1; 4; 9; 16)

Mais, à partir de l'observation des nombres polygonaux carrés, on obtient en réalité une décomposition de chaque nombre carré en somme de nombres impairs. Autrement dit :

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$$

Ainsi, on retient que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

L'exemple avec le nombre carré d'ordre 4 donne :

$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

III - LA DIVISION EUCLIDIENNE : LE QUOTIENT ET LE RESTE À PARTIR D'ANCIENNES MONNAIES

La division euclidienne apparaît dans les programmes de l'école, du collège et même du lycée avec notamment, l'étude des congruences. De nombreuses activités (notamment la « course à 20 » de Brousseau et ses variantes) existent pour travailler le sens et la technique de cette opération fondamentale où il est nécessaire de comprendre le résultat, constitué de deux nombres : le quotient et le reste.

Dans cette partie, il s'agit de construire le sens du quotient et du reste d'une division euclidienne grâce à la manipulation d'anciennes monnaies, à partir de l'exploitation d'archives historiques de comptabilités médiévales des villes ligériennes (Orléans, Tours, Blois)[25].

[25] Plusieurs animateurs IREM (moi-même, Vincent Beck d'Orléans, Sylviane Schwer de Paris-Nord et Agnès Gateau de Dijon) ont été impliqués, aux côtés d'historiens médiévistes, dans le projet CorMéCoULi [https://cormecouli.univ-tours.fr]. Une mallette

1. Contexte : les monnaies de compte

Les comptabilités médiévales des villes d'Orléans, Tours et Blois (comme d'autres villes françaises) sont en livres (parisis ou tournois), sous et deniers avec les conversions suivantes : 1 livre (£)=20 sous/sols (s) et 1 sou= 12 deniers (d). En outre, les comptes sont rédigés à l'aide de la numération romaine[26] (Moyon, à paraître). Les archives sont intéressantes à observer et à comprendre : elles sont propices à la rédaction de véritables problèmes arithmétiques et divers autres calculs[27].

Considérons un exemple, avec l'énoncé de la figure 11 qui décrit l'achat de bombardes (figure 10). Il s'agit d'une quittance de paiement (en livres tournois) à Pierre de Fosse pour l'achat de deux bombardes : l'une est grosse et pèse 614 (*vi*^{c} *xiiii*) livres (la livre est à la fois une unité de monnaie et une unité de masse), l'autre – moyenne – pèse 140 (*vii*^{xx}) livres. D'après le texte, les bombardes s'achètent à 3 (*iii*) sous et 4 (*iiii*) deniers la livre de poids. Ainsi, les deux bombardes coûtent 125 (*vi*^{xx}*v*) livres, 13 (*xiii*) sous et 4 (*iiii*) deniers. Cette somme est à la fois inscrite en première ligne et en marge de la dernière ligne (figure 11).

Figure 10 : Siège d'Orléans (1428-1429), avec une bombarde au premier plan.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Siege_orleans.jpg

pédagogique a été élaborée à partir de ces comptabilités ; les matériaux pédagogiques sont téléchargeables sur https://www.centre-sciences.org/ressources/cormecouli-corpus-medieval-des-comptabilites-urbaines-ligeriennes.

[26] Même si ce n'est pas le propos de la présente contribution, j'attire l'attention du lecteur sur l'écriture de la numération romaine, notamment avec l'utilisation des exposants. La lecture et la compréhension de ces nombres peuvent être féconds tout au long du cycle 3.

[27] Dans ce cadre, la mallette pédagogique du projet susmentionné propose plusieurs problèmes additifs et multiplicatifs, plongés dans leur contexte historique des comptabilités des villes médiévales (défense de la ville, réparation, gestion des ordures, achats de matériel divers, organisation de banquets et fêtes religieuses…).

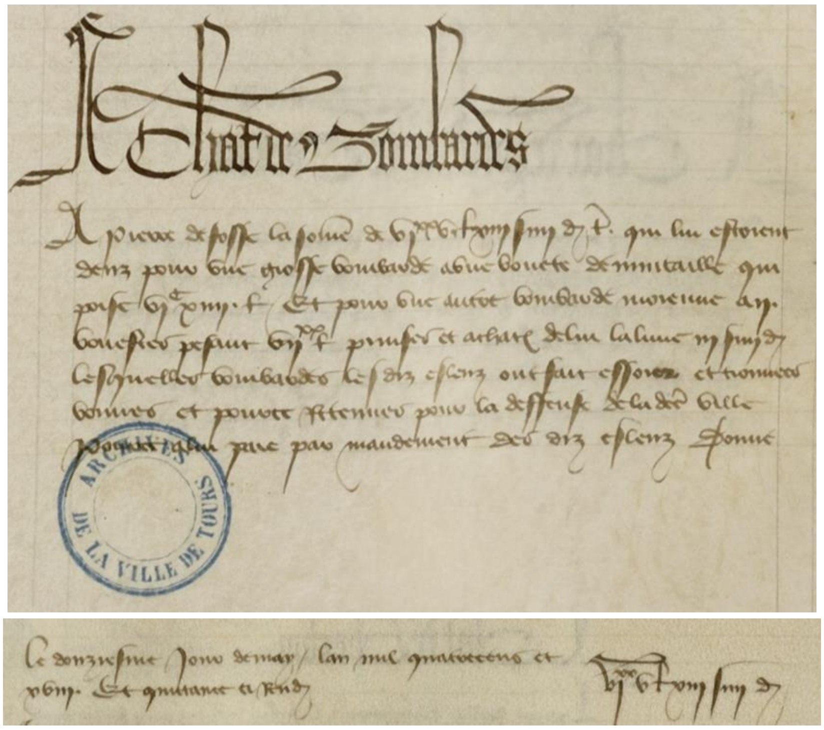


Figure 11 : « Achats de bombardes », extraits des fol. 45r° et fol. 45v° du manuscrit CC17 de Tours, © https://cormecouli.univ-tours.fr/FRAC037261-CCR017_091 (pièce datée de 1417-1418)

Le calcul du coût des deux bombardes est pédagogiquement intéressant car il implique le calcul de deux produits avec des nombres complexes (au sens de l'enseignement primaire, à savoir un nombre composé d'unités diverses, comme ceux en heures/minutes/secondes), respectivement 614 (140) par 3s. 4d. Une addition est alors nécessaire pour ajouter le prix des deux bombardes : 2 262 sous et 3 016 deniers. Une conversion[28] est ensuite nécessaire pour avoir une somme en livres (125), sous (13) et deniers (4). Cette conversion impose le calcul de divisions euclidiennes, en enregistrant à la fois le quotient et le reste. En effet, pour savoir combien 3 016 deniers font en livres/sous/deniers, divisons 3 016 par 240 (nombre de deniers dans une livre, 20 × 12) :

$$3\,016 = 240 \times 12 + 136$$

Comme 136 ≥ 12, je divise 136 par 12 (nombre de deniers dans 1 sou) :

$$136 = 12 \times 11 + 4$$

Ainsi, 3 016 deniers sont égaux à 12 livres, 11 sous et 4 deniers (*).

De même, pour 2 262 sous :

$$2\,262 = 113 \times 20 + 2$$

2 262 sous sont égaux à 113 livres et 2 sous (**).

[28] Bien sûr, une conversion peut être menée avant l'addition pour le prix de chaque bombarde, mais dans ce cas-là, une nouvelle conversion peut se révéler nécessaire avec la somme finale (c'est ici le cas).

L'addition de (*) et (**) donne bien la somme voulue : 125 livres, 13 sous et 4 deniers.

Ce type d'exercices est séduisant car il est planté dans un contexte historique vivant, réel, sans enrobage scolaire pseudo-réaliste. Le traitement des nombres complexes implique la manipulation de diverses unités dans un même système[29]. Ces exercices invitent les élèves à effectuer de nombreuses opérations sans s'en rendre réellement compte ; elles sont nécessaires pour vérifier les comptes, à l'image des officiers comptables royaux.

2. L'abaque à jetons

Pour faire les calculs (somme, différence, produit, division) sur les nombres précédents, les officiers de la comptabilité utilisaient des abaques à jetons : les jetons (ou *gects* en ancien français) (figure 12) représentent les nombres sur une table de compte, ou seulement un tapis. « Jeter » est alors synonyme de calculer. L'intérêt pédagogique des abaques à jetons a d'ores et déjà été démontré (Daval et Tournès, 2018). En outre, les abaques font traditionnellement partie du matériel pédagogique, même avant la mise en place d'un enseignement systématique du calcul pour toutes et tous. En effet, dans la seconde édition du *Dictionnaire* de Ferdinand Buisson (en 1911), Carlo Bourlet précise :

> *Si indispensable qu'il nous semble aujourd'hui, le calcul ne s'est introduit qu'assez tard et difficilement dans l'enseignement populaire. Il se borna pendant des siècles à l'usage des* abaques […] *Il existait quelques livres ou livrets à leur usage dès le seizième siècle […] On trouve aussi, sous le nom d'Antoine Cathalan, une* Arithmétique et manière d'apprendre à chiffrer et à compter par la plume et par les gects en nombre entier et rompu *(fractions), Lyon, 1555. (Bourlet, 1911, p. 1259)*

L'abaque, et notamment l'abaque à jetons, est particulièrement adapté aux calculs arithmétiques élémentaires[30]. Les additions et soustractions se font sans obstacle réel ; la multiplication et la division sont plus complexes à manipuler aujourd'hui mais ne posaient pas de difficultés insurmontables aux comptables médiévaux[31]. À ce titre, il est opportun de penser l'introduction d'un abaque à jetons dans les classes : là encore, il offre des manipulations qui peuvent remédier à certaines difficultés des élèves (problème des retenues notamment, le passage d'un ordre à un ordre supérieur, le 'cassage' pour la soustraction…). L'introduire dans un contexte historique est encore mieux : les comptabilités médiévales se présentent alors comme un cadre idéal.

Figure 12 : Jeton de compte r°/v° avec un maître d'abaque (rechenmeister)*, Nuremberg, avant 1601.*
Diamètre : 29,6mm, masse : 3,99g

---

[29] Il faut néanmoins veiller à ce que ce type d'exercices n'induise pas chez l'élève une conception erronée du nombre décimal, comme deux entiers juxtaposés (deux nombres entiers séparés par une virgule).

[30] À la suite du projet CorMéCoULi, une présentation du travail « Numérations, calculs et grandeurs : utilisation de l'abaque pour rendre visible les concepts communs » a été réalisée par Beck et Schwer au colloque de la Copirelem (Marseille, juin 2023).

[31] Certains ouvrages consacrés aux calculs avec les jetons expliquent même comment extraire des racines carrées.

Dans l'ouvrage imprimé d'Étienne de la Roche (m. 1530), en marge, sont représentés (figure 14) les jetons d'un abaque[32]. On observe les différentes unités décimales (*nombre* pour unité, *dizeine* = dizaine, *centeine* = centaine et *millier*) afin de mener les calculs en base 10, comme on est habitué à le faire aujourd'hui. En plus de ces lignes, on peut observer des espaces pour les *deniers* (sous les nombres), les *sous (solz)* (à gauche) et les livres (à droite). Ce type d'abaque est donc prévu pour une utilisation double : calcul sur la monnaie de compte (livres, sous, deniers) et calcul sur la numération décimale. La manipulation des jetons se fait de la même manière dans les deux systèmes, à condition de respecter les bases de conversion, à savoir 12 deniers pour 1 sous, et 20 sous pour 1 livre.

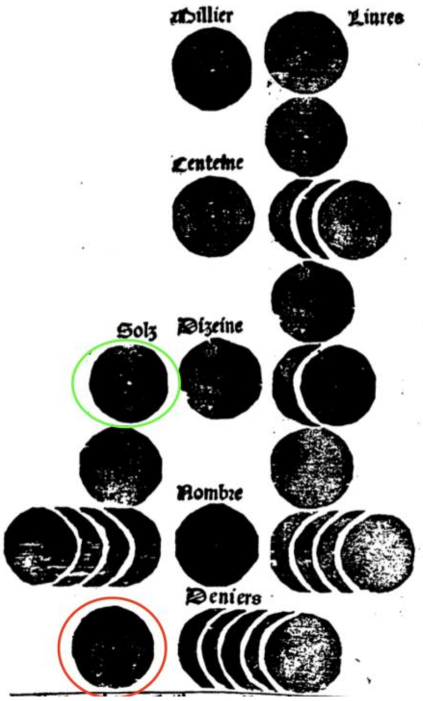


Figure 13 : Détail de l'abaque chez Étienne de la Roche (1538)

En effet, là où l'abaciste utilise la quinaire (1 jeton pour 5, i.e. la moitié de 10 ; 1 jeton pour 50, i.e. la moitié de 100…) posée dans l'espace intermédiaire (entre les lignes de l'unité et de la dizaine, entre celles de la dizaine et de la centaine…)[33], il utilise pour les deniers, de la même manière, un jeton pour 6 deniers (la moitié d'un sou) dans l'espace rouge de la figure 13, et un jeton pour 10 sous (la moitié d'une livre) dans l'espace vert de la figure 13 (il utilise aussi la quinaire pour 5 sous). C'est l'opération de réduction. Ainsi, si l'abaciste est amené à poser deux jetons dans l'espace rouge (12 deniers), c'est en fait 1 jeton dans les sous qu'il posera. De même, dès qu'il est invité à poser deux jetons dans l'espace vert (20 sous), c'est 1 jeton dans les unités de livres qu'il posera. C'est l'opération de conversion.

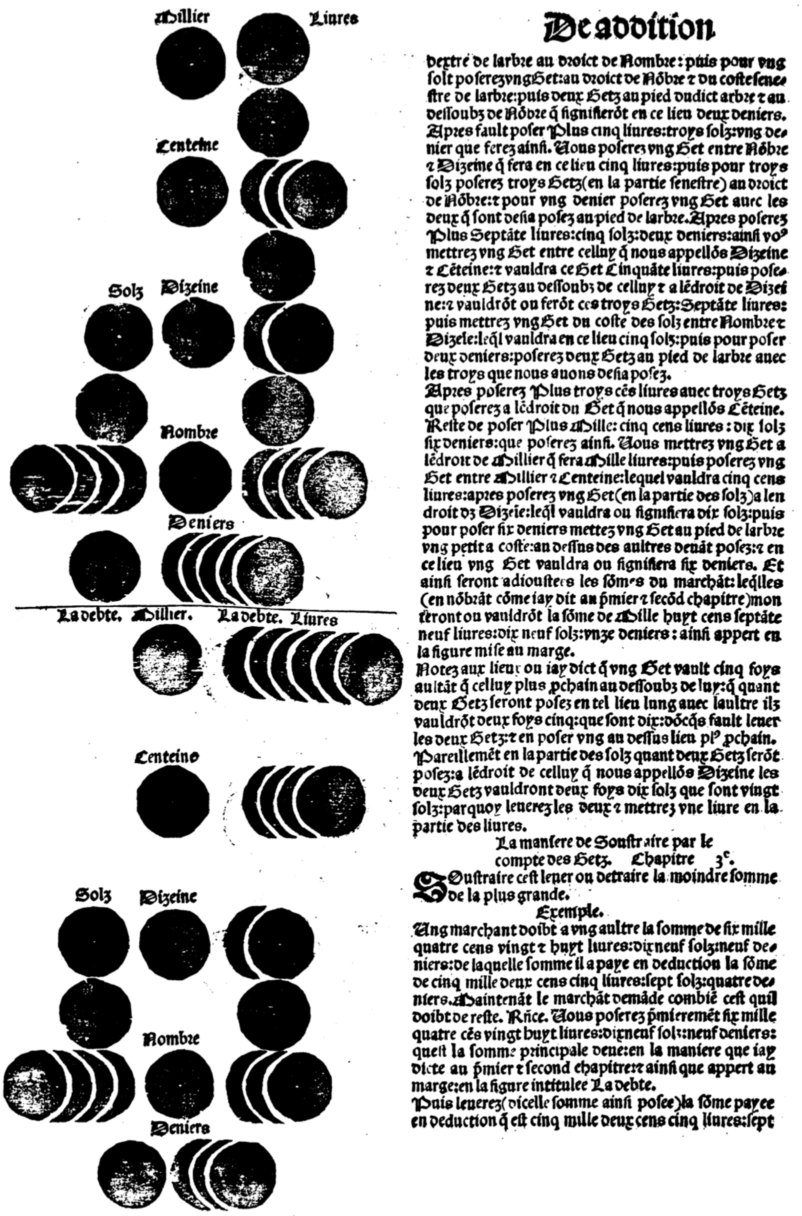
Par exemple, dans la figure 13, si l'abaciste pose 1 denier de plus, il arrivera à 12 ($6 + 5 \times 1 + \mathbf{1}$) deniers, donc à 2 (1+1) jetons dans l'espace rouge : il a alors en réalité 1 sou de plus. En cascade, il obtient 1 quinaire de plus (4+**1** sous), ce qui lui donne 2 quinaires (10 sous), et donc 2 (1+1) jetons dans l'espace vert, c'est-à-

[32] De nombreux autres livres sont imprimés à partir du 15e siècle. Nous ne discutons pas ici cette abondante littérature. Voir, par exemple, (Schärlig, 2022).

[33] L'utilisation de la quinaire permet de réduire largement le nombre de jetons à utiliser pour un calcul et donc gagner en visibilité.

dire 1 livre de plus ! C'est exactement la matérialisation des retenues dans nos algorithmes actuels : ainsi, les jetons permettent de manipuler le concept de retenue.

Nous considérons alors l'abaque à jetons comme un manipulatif[34], à savoir un matériel concret utilisé pour l'apprentissage de concepts mathématiques. Les deux opérations de réduction et de conversion sont grandement facilitées par la manipulation des jetons. Néanmoins, il est ensuite strictement nécessaire de verbaliser ce que sont, en termes arithmétiques, ces deux opérations, et ainsi amener les élèves vers les situations plus abstraites des algorithmes opératoires usuels.



De addition

dextre de larbre au droict de Nombre: puis pour vng solt poserez vng Get: au droict de Nōbre & du coste senestre de larbre: puis deux Getz au pied dudict arbre & au dessoubz de Nōbre q̄ signifierōt en ce lieu deux deniers. Apres fault poser Plus cinq liures: troys solz: vng denier que ferez ainsi. Vous poserez vng Get entre Nōbre & Dizeine q̄ fera en ce lieu cinq liures: puis pour troys solz poserez troys Getz (en la partie senestre) au droict de Nōbre: & pour vng denier poserez vng Get auec les deux q̄ sont desia posez au pied de larbre. Apres poserez Plus Septāte liures: cinq solz: deux deniers: ainsi vo⁹ mettrez vng Get entre celluy q̄ nous appellōs Dizeine & Cēteine: & vauldra ce Get Cinquāte liures: puis poserez deux Getz au dessoubz de celluy & a lēdroit de Dizeine: & vauldrōt ou ferōt ces troys Getz: Septāte liures: puis mettrez vng Get du coste des solz entre Nombre & Dizeie: leq̄l vauldra en ce lieu cinq solz: puis pour poser deux deniers: poserez deux Getz au pied de larbre auec les troys que nous auons desia posez.
Apres poserez Plus troys cēs liures auec troys Getz que poserez a lēdroit du Get q̄ nous appellōs Cēteine. Reste de poser Plus Mille: cinq cens liures: dix solz six deniers: que poserez ainsi. Vous mettrez vng Get a lēdroit de Millier q̄ fera Mille liures: puis poserez vng Get entre Millier & Centeine: lequel vauldra cinq cens liures: apres poserez vng Get (en la partie des solz) a lendroit dz Dizeie: leq̄l vauldra ou signifiera dix solz: puis pour poser six deniers mettez vng Get au pied de larbre vng petit a coste: au dessus des aultres deuāt posez: & en ce lieu vng Get vauldra ou signifiera six deniers. Et ainsi seront adioustees les sōmes du marchāt: leq̄lles (en nōbrāt cōme iay dit au p̄mier & secōd chapitre) monteront ou vauldrōt la sōme de Mille huyt cens septāte neuf liures: dix neuf solz: vnze deniers: ainsi appert en la figure mise au marge.
Notez aux lieux ou iay dict q̄ vng Get vault cinq foys aultāt q̄ celluy plus p̄chain au dessoubz de luy: q̄ quant deux Getz seront posez en tel lieu lung auec laultre ilz vauldrōt deux foys cinq: que sont dix: dōcq̄s fault leuer les deux Getz: & en poser vng au dessus lieu pl⁹ p̄chain. Pareillemēt en la partie des solz quant deux Getz serōt posez: a lēdroit de celluy q̄ nous appellōs Dizeine les deux Getz vauldront deux foys dix solz que sont vingt solz: parquoy leuerez les deux & mettrez vne liure en la partie des liures.

La maniere de Soustraire par le compte des Getz. Chapitre 3[e].

Soustraire cest leuer ou detraire la moindre somme de la plus grande.

Exemple.

Vng marchant doibt a vng aultre la somme de six mille quatre cens vingt & huyt liures: dixneuf solz: neuf deniers: de laquelle somme il a paye en deduction la sōme de cinq mille deux cens cinq liures: sept solz: quatre deniers. Maintenāt le marchāt demāde combiē cest quil doibt de reste. R̄nce. Vous poserez p̄mieremēt six mille quatre cēs vingt huyt liures: dixneuf solz: neuf deniers: quest la somme principale deue: en la maniere que iay dicte au p̄mier & second chapitre: & ainsi que appert au marge: en la figure intitulee La debte.
Puis leuerez (dicelle somme ainsi posee) la sōme payee en deduction q̄ est cinq mille deux cens cinq liures: sept

Figure 14 : « La manière de faire tous comptes par les getz », dans (Étienne de la Roche, 1538)

[34] Voir l'étude de Carbonneau, K. J., Marley S. C. et Selig J. P. (2013) sur l'effet de la manipulation à l'aide de « manipulatifs », notamment avec les mises en garde nécessaires pour que la manipulation soit efficace sur l'apprentissage.

IV - DE L'ÉGYPTE À *L'INITIATION MATHÉMATIQUE* DE CHARLES-ANGE LAISANT

1. Le Papyrus Rhind et la duplication

Dans l'Égypte du Moyen Empire[35] (à l'époque de la construction des pyramides), la multiplication est réalisée par les scribes à l'aide de la seule utilisation des doubles. Cette opération s'appelle la duplication[36]. Elle consiste en la décomposition d'un nombre en somme de puissances entières positives ou nulle de 2. Si tous les entiers admettent bien une telle décomposition, elle n'est pas nécessairement unique[37]. Si les scribes égyptiens manipulaient ce résultat, d'aucun ne l'avait ni énoncé comme propriété, ni démontré.

Dans le problème #32 du papyrus de Rhind[38], le scribe Ahmès doit déterminer la quantité qui, si on l'augmente de son tiers et de son quart, on obtient 2. Au cours de la résolution[39], le scribe est amené à effectuer le produit de 12 par 12 (figure 15).

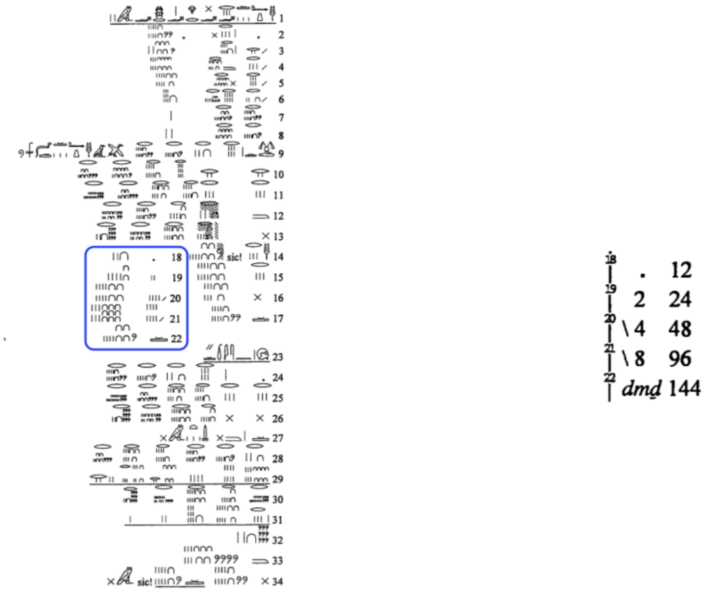


Figure 15 : Problème #32 du papyrus Rhind faisant apparaître une multiplication (lignes 18 à 22) : texte (à gauche) et transcription (à droite) extraits de Imhausen (2003, 216).

[35] Pour une présentation complète des mathématiques égyptiennes, voir Michel (2014).

[36] Ce procédé est aussi utilisé pour la division (Ritter, 2000, p. 126). Par ailleurs, « dans la mesure où il convient assez bien au calcul sur abaque, il est attesté et enseigné jusqu'au 16e siècle de notre ère » (Caveing, 1994, p. 253).

[37] Voir (Caveing, 1994, pp. 253-258) pour le « 'théorème fondamental' de l'arithmétique égyptienne » : « Soit la série non-limitée des puissances croissantes de 2 : $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^k, \dots$, tout entier naturel ou bien figure dans la liste des termes de cette série, ou bien est la somme de termes qui y figurent ».

[38] Le papyrus de Rhind tient son nom de son acheteur, l'avocat écossais Alexander Henry Rhind, en 1858. Il est aujourd'hui conservé au British Museum : https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10058.

[39] Dans cet exemple, il n'est pas difficile de reconnaître les hiéroglyphes de l'opération (numération décimale additive : le bâton représente l'unité, l'anse la dizaine et la corde enroulée la centaine). D'après mon expérience personnelle, dès la première année du cycle 3, un élève peut comprendre les lignes 18 à 22, en expliquant que le signe transcrit par *dmḏ* peut signifier « somme » ou « total ».

Revenons sur les quatre premières lignes (tableau 2 ci-dessous).

.	12	On considère 12, un des deux facteurs du produit (souvent le plus grand des deux).
2	24	On double 12.
4	48	On double 24.
8	96	On double 48.

Tableau 2 : Explication des premières lignes du produit de 12 par 12

Il faut maintenant expliquer la cinquième ligne, appelée « somme » (tableau 3).

.	12	On considère 12, le nombre de départ.
2	24	On double 12, on obtient 24.
\ 4	48	On double 24, on obtient 48.
\ 8	96	On double 48, on obtient 96.
somme	144	On calcule 144 comme la somme de 48 et 96, en prenant la ligne du 4 et du 8 (marquées à l'aide de \)

Tableau 3 : Explication du produit de 12 par 12

Mathématiquement, Ahmès utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition. Exprimée ici en termes modernes, on a :

$$12 \times 12 = (4 + 8) \times 12 = 4 \times 12 + 8 \times 12 = 48 + 96$$

Par ailleurs, en doublant systématiquement à chaque ligne, le scribe arrive à formuler une décomposition du multiplicande en somme de puissance de 2 (tableau 4).
Ainsi, $12 = 2^2 + 2^3 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3$. Et, 1 1 0 0 est alors l'écriture de 12 en base 2 (ou en notation binaire).

1	2^0
2	2^1
4	2^2
8	2^3
16	2^4
…	$2^{\cdots}$

Tableau 4 : Premières puissances de 2

Le procédé utilisé par le scribe égyptien pour multiplier deux nombres peut être résumé ainsi : il s'agit de décomposer l'un des deux nombres (souvent le plus petit, le multiplicande) comme une somme de puissances de deux[40], doubler l'autre nombre (le multiplicateur) en fonction de la puissance de 2 correspondante, et utiliser ensuite implicitement la distributivité pour calculer une somme. Aussi, les

[40] D'autres exemples existent où la décomposition est réalisée à l'aide d'un autre nombre que 2 (ou ses puissances) – comme 10, par exemple – mais ils ne sont pas nécessairement génériques mais plutôt adaptés aux problèmes proposés. Voir des exemples dans Imhausen (2016, 86-88).

égyptiens n'avaient besoin de connaître que la table de multiplication par 2 ; toutes les autres sont inutiles (tableau 5). L'intérêt historique rejoint ici l'intérêt pédagogique[41], à savoir, « son double caractère de généralité et de relative simplicité comparativement à l'acquisition laborieuse par la mémoire de la table de multiplication nécessaire au système décimal » (Caveing, 1994, p. 253).

\ .	3	On considère 3, le nombre de départ.
2	6	On double 3, on obtient 6.
\ 4	12	On double 6, on obtient 12.
somme	15	5 = 1+4, donc $3 \times 5 = 3 + 12 = 15$

Tableau 5 : Calcul du produit de 3 par 5 dans le problème #25 du papyrus Rhind

Pour des produits avec de petits facteurs, l'algorithme peut paraître plus long que l'utilisation des tables de multiplication. Néanmoins, dès que les facteurs sont plus importants (comme, par exemple, dans le tableau 6), le procédé est vite efficace.

\ .	63	On considère 63.
\ 2	126	On double 63.
\ 4	252	On double 126.
\ 8	504	On double 252.
\ 16	1 008	On double 504.
\ 32	2 016	On double 1 008.
somme	3 717	59 = 1+2+8+16+32, donc $59 \times 63 = 63 + 126 + 504 + 1\,008 + 2\,016 = 3\,717$

Tableau 6 : Calcul du produit de 59 par 63

En outre, ce procédé est aussi utilisé pour les produits d'un entier par une fraction[42], ou d'une fraction par une fraction comme le montrent, par exemple, les problèmes #27 et #70 du papyrus Rhind. Le scribe utilise des produits par des fractions élémentaires comme $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$ (voir la cinquième ligne du tableau 7, à droite) soit parce qu'il les connaît par cœur, soit parce qu'il utilise des calculs intermédiaires.

\ .	$3 + \frac{1}{2}$
2	7

.	$7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
2	$15 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
\ 4	$31 + \frac{1}{2}$

[41] J'y ajoute aussi l'intérêt scientifique. Aujourd'hui, les informaticiens tirent encore profit de cette méthode notamment, dans le cadre de l'exponentiation rapide (algorithme de calcul de grandes puissances entières utilisé, entre autres, en cryptographie).

[42] En Égypte, les fractions sont systématiquement exprimées comme sommes de fractions de numérateurs égaux à 1 (à l'exception de la fraction $\frac{2}{3}$ qui a sa propre représentation). Dans (Moyon, 2023), je reviens sur les fractions dites égyptiennes dans l'enseignement des mathématiques et leur traitement dans les manuels scolaires.

\ 4	14
somme	$17+\frac{1}{2}$

\ 8	63
\ $\frac{2}{3}$	$5+\frac{1}{4}$
somme	$99+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

Tableau 7 : (à gauche) $5\times\left(3+\frac{1}{2}\right)$ *dans le problème #27; (à droite)* $\left(12+\frac{2}{3}\right)\times\left(7+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)$, *dans le problème #70*

2. Une récréation mathématique : C.-A. Laisant et É. Lucas

En prolongement de la découverte du procédé de duplication chez les Égyptiens, il est utile et plaisant de développer des activités autour de la numération binaire[43] – c'est-à-dire en base 2 – écrite à l'aide des deux signes 0 et 1.

On a remarqué plus haut que 1 1 0 0 est l'écriture de 12 en base 2 puisque

$$12=2^2+2^3=0\times2^0+0\times2^1+1\times2^2+1\times2^3.$$

Aussi, l'écriture binaire de 59 est 1 1 1 0 1 1.

$$59=1\times2^0+1\times2^1+0\times2^2+1\times2^3+1\times2^4+1\times2^5.$$

Intéressante, la numération binaire a été utilisée par de nombreux mathématiciens, en particulier à la suite de Gottfried Wilhelm Leibniz (m. 1716) et de son *De Progressione Dyadica*[44] *(manuscrit daté* de 1679*), notamment pour développer des curiosités ou récréations mathématiques, voire des tours de magie*. L'intérêt des récréations mathématiques pour l'enseignement n'est plus à démontrer, notamment par l'amusement qu'elles développent chez les apprenants ou la manipulation que certaines nécessitent (Rougetet, 2023, pp. 111-120). Nous choisissons ici de présenter un « petit jeu » emprunté au mathématicien et polytechnicien Charles-Ange Laisant (m. 1920) : « on a imaginé un petit jeu de salon qui repose sur l'emploi de la numération binaire, et dont Éd. Lucas a reproduit la description dans son Arithmétique amusante sous le nom d'Éventail mystérieux » (Laisant, 1915, p. 106). Lisons Édouard Lucas (m. 1891) détailler la règle de de jeu[45] :

> *L'éventail mystérieux se compose de cartons disposés en éventail sur lesquels on inscrit des nombres […] d'une certaine manière ; il s'agit, en présentant l'éventail, de deviner le nombre […] pensé par une personne. (Lucas, 1895, pp. 168-169)*

[43] Cette partie est largement développée dans Moyon (2024) où je présente davantage les deux mathématiciens Charles-Ange Laisant et Édouard Lucas, leur correspondance et leur idéal pédagogique.

[44] Serra (2017) offre une étude détaillée du manuscrit de Leibniz.

[45] *L'Arithmétique amusante* signée de Lucas est en réalité éditée à titre posthume en 1895 par Laisant, Henri Delannoy (m. 1915) et Émile Lemoine (m. 1912), à partir de trois cahiers préparés de son vivant à partir de 1888.

A	B	C	D	E
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Figure 16 : Les cartons de l'éventail mystérieux dans (Laisant, 1915, 107).

Si l'on suit *L'Arithmétique amusante*, il nous reste (1) à deviner un nombre pensé par un joueur et (2) à comprendre la manière d'inscrire les nombres dans les cartons.

(1) Prenons un exemple : le nombre 27. Si l'on sait dans quelle(s) colonne(s) il apparaît (et il suffit de le demander au joueur qui a pensé ledit nombre), il est aisé de le retrouver. En effet, ici, 27 apparaît dans les colonnes A, B, D et E : il suffit « de faire la somme des nombres écrits en tête de chacun des cartons où le nombre se trouve » (Lucas, 1895, p. 169). Ainsi, additionnons 1, 2, 8 et 16, la somme est 27 ; c'est bien le nombre pensé.

(2) Sont inscrits sur les cinq cartons de la figure 16 tous les nombres de 1 à 31 en fonction de leur écriture binaire (ou de leur décomposition en somme de puissances de 2). Prenons, à nouveau l'exemple du nombre 27, comme $27 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4$, il s'écrit : 1 1 0 1 1 en notation binaire et il apparaît alors dans les première (A), deuxième (B), quatrième (D) et cinquième (E) colonnes (là où l'écriture binaire donne 1) et n'apparaît pas dans la troisième colonne (C) (là où l'écriture binaire donne 0).
Prenons maintenant le nombre 23 :
$$23 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4$$
Donc l'écriture binaire de 23 est 1 0 1 1 1 : il est dans les colonnes A, B, C et E.

Jouer à l'éventail mystérieux peut être une belle occasion de faire vivre l'arithmétique en classe comme avec d'autres jeux arithmétiques : certains tours de magie et autres casse-têtes, comme, par exemple, les tours de Hanoï ou le baguenaudier (Rougetet, 2023). Mais, Laisant propose aussi de « pousser ce jeu jusqu'à 63 au lieu de 31, avec 6 cartons au lieu de 5, et jusqu'à 127 avec 7 cartons. » (Laisant, 1915, p. 110)

L'idée est ambitieuse mais intéressante car cela amène les élèves à penser le code binaire, si important dans toutes les technologies du numérique (Annexe 1).

V - CONCLUSION

En conclusion, notre promenade historique à travers le patrimoine arithmétique n'a pas eu d'autres objectifs que de donner à voir les mathématiques telles qu'elles ont été pratiquées et/ou écrites par leurs concepteurs ou utilisateurs (qu'ils soient ou non mathématiciens professionnels), avec des scribes égyptiens, des néo-pythagoriciens, des comptables médiévaux, des abacistes, des combinatoriciens ou autres récréateurs, plongés en leurs temps.

Ainsi, globalement, à partir de l'observation d'un matériel historique (textes, images ou artefacts) et de son analyse historico-mathématique, il s'est agi de favoriser la construction d'une autre représentation des mathématiques pour les enseignants et pour leurs élèves. Lorsqu'on enseigne les mathématiques, il est évident que l'objectif commun est bien d'améliorer l'enseignement/apprentissage des élèves, considérant alors l'histoire des mathématiques comme un outil pour non seulement promouvoir les mathématiques, mais aussi pour construire les connaissances mathématiques (Furinghetti, 2020).

Au cours de cette promenade, nous avons plusieurs fois mentionné les récréations mathématiques dont l'importance est réelle dans l'histoire de la discipline (Chemla, 2014) et pour son enseignement. Aussi, nous terminons cette contribution en faisant nôtre le projet pédagogique de Laisant, amplement illustré dans son *Initiation mathématique* (1915) : s'instruire en s'amusant, s'aider d'exemples concrets pour amener peu à peu l'esprit à l'intelligence de l'abstrait et solliciter l'initiative (plutôt que la mémoire) à l'aide d'exercices qui soient l'occasion de créer (Moyon, 2023). L'introduction d'une perspective historique paraît alors trouver une place naturelle dans l'enseignement des mathématiques en général, et dans celui de l'arithmétique en particulier.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Barbin, É. (2022). On the role and scope of historical knowledge in using the history of mathematics in education. *ZDM – Mathematics Education 7* (54), 1597-1611.

Bourlet, C. (1911). Mathématiques. In F. Buisson (dir.) *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire* (p. 1259). Paris, France : Hachette et cie.

Bouvier A., George M. et Le Lionnais F. (1993). *Dictionnaire des mathématiques*. Paris : Presses universitaires de France.

Busser, É., Hauchecorne, B. (2021). *Dictionnaire décalé des mathématiques*. Paris, France : Ellipses.

Carbonneau, K. J., Marley S. C. et Selig J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology* 2(105), 380-400.

Caveing M. (1994). *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes*, Villeneuve d'ascq, France : Presses Universitaires de Lille.

Chambon G. (2020), *Histoire des nombres*, Paris, France : Que sais-je ?

Chemla, K. (2014). Explorations in the history of mathematical recreations: An introduction. *Historia Mathematica 4*(41), 367-376.

Chorlay, R., Clark, K. M. et Tzanakis C. (2022). History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. *ZDM – Mathematics Education 7*(54), 1407-1420.

Daval, N. et Tournès, D. (2018). De l'abaque à jetons au calcul posé. *In* Moyon M. et Tournès, D. (dir.). *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3* (pp. 39-64). Bouc-Bel-Air, France : ARPEME.

Deledicq, A. et Launay, M. (2021). *Dictionnaire amoureux des mathématiques*. Paris, France : Plon.

Diophante d'Alexandrie (1621). Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Bachet de Méziriac, C.G. (éd.). Paris, France : Hieronymi Drouart.

Diophante d'Alexandrie (1893-95). Diophanti Alexandrini opera omnia cum graeciis commentariis. Tannery, P. (éd.). 2 vol. Leipzig : B.G. Teubner,.

Diophante d'Alexandrie (1959). *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, Ver Eecke, P (trad.) Paris, France : A. Blanchard.

Diophante d'Alexandrie (2011). *De polygonis numeris*, Acerbi, F. (édit., trad.). Pise, Italie : Fabrizio Serra Editore.

Djebbar, A. (2000). Figurate Numbers in the mathematical tradition of al-Andalus and the Maghrib, *Suhayl 1*, 57-70.

Djebbar, A. (2004), Du nombre pensé à la pensée des nombres : quelques aspects de la pratique arithmétique arabe et de ses prolongements en Andalus et au Maghreb, *Sciences et Techniques en Perspective 1*(8), 303-322.

Djebbar, A. (2022). Ibn Khaldūn et les mathématiques, à la lumière des recherches des dernières décennies. *In* Hedfi, H. et Abdeljaouad, M. (dir.), *Actes du 14e colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes* (pp. 1-31). Tunis : Publication de l'association tunisienne des sciences mathématiques.

Étienne de la Roche, (1538). *L'arismetique & Geometrie […]*, Lyon, France : Gilles & Jaques Huguetan.

Fauvel, J. et Van Maanen, J. (2000). *History in mathematics education : the ICMI study*, Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer.

Fourrey, É. (1901). *Récréations arithmétiques* (2e édition). Paris, France : Nony.

Freudenthal, G. et Lévy, T. (2004). De Gérase à Bagdad : Ibn Bahrīz, al-Kindī, et leur recension arabe de l'Introduction arithmétique de Nicomaque, d'après la version hébraïque de Qalonymos ben Qalonymos d'Arles. *In* Morelon, R. et Hasnawi, A. (dir.), *De Zénon d'Elée à Poincaré : recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed* (pp. 479-544). Louvain, Belgique – Paris, France : Peeters.

Fried, M. (2007). Didactics and History of Mathematics : Knowledge and Self-Knowledge, *Educational Studies in Mathematics, 2*(66), 203-223.

Furinghetti, F. (2020). Rethinking history and epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 6* (51), 967-994.

Guillemette D. (2011). L'histoire dans l'enseignement des mathématiques : sur la méthodologie de recherche, *Petit x 86*, 5-26.

Hofstetter, C. (2021). D'Ammonius à Qalonymos : la transmission d'un enseignement néoplatonicien sur Nicomaque. *Revue de philologie, de littérature et d'histoire anciennes 1*(XCV), 29-55.

Imhausen, A. (2003). *Ägyptische Algorithmen : eine Untersuchung zu den mitteläqyptischen mathematischen Aufgabentexten*. Wiesbaden, Allemagne : Harrassowitz Verlag.

Imhausen, A. (2016). *Mathematics in Ancient Egypt : a contextual history*, Princeton, États-Unis, Princeton University Press.

Jankvist U. T. (2009a). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics 3*(71), 235-261.

Jankvist, U. T. (2009b). *Using history as a « goal » in mathematics education*, [Thèse de doctorat, Roskilde University]. http://thiele.ruc.dk/imfufatekster/pdf/464.pdf.

Laisant. C.-A. (1915). *Initiation mathématique : ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance*. Paris, France : Hachette & Cie.

Lucas, É. (1895). *L'arithmétique amusante*, Paris, France : Gauthier-Villars et fils.

Michel, M. (2014). *Les mathématiques de l'Égypte ancienne : numération, métrologie, arithmétique, géométrie et autres problèmes*. Bruxelles, Belgique : Éditions Safran.

Moyon, M. (2012). Penser les mathématiques à travers leur épistémologie et leur histoire : un enjeu de/dans la formation des maîtres. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle - Actes du colloque EMF2012* (pp. 641-652). Genève, Suisse : Université de Genève.

Moyon, M. (2023), Fractions égyptiennes et algorithme de Fibonacci : histoire des mathématiques versus manuels scolaires contemporains. *ACERVO - Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP 5*, 2023, 1-36.

Moyon, M. (2023). S'initier à "la mathématique" avec Charles-Ange Laisant : manipuler, visualiser, s'étonner, *Bulletin de la société des amis du musée, de la bibliothèque et de l'histoire de l'école polytechnique* 70, 131-143.

Moyon, M. (2024). Binary Numeration: From Ancient Egypt to a 19th Century French Mathematical Recreation, *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC* 19(47), 1-20.

Moyon, M. (à paraître). Plume, jetons, papier et abaque : Compter et calculer au Moyen Âge. *In* Boisseuil, D. et Dumasy, J. (éds), *Formes et enjeux des comptabilités urbaines médiévales : l'exemple ligérien*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Nicomaque de Gérase (1978). *Introduction arithmétique*, Bertier, J. (trad.). Paris, France : Vrin.

Ritter, J. (2008). Egyptian Mathematics. *In* Selin, H. (dir.), *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures* (pp. 1378-1381). Berlin, Heidelberg, New York : Springer.

Rashed, R. (1983). Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIIIème et XIVème siècles. *Archive for History of Exact Sciences 2*(28), 107-147.

Rougetet, L. (2023). *Le binaire au bout des doigts : Un casse-tête entre récréation mathématique et enseignement*. Les Ullis, France : EDP sciences.

Saidan, A. S. (1997). Numération et arithmétique. *In* Roshdi, R. (dir.), *Histoire des sciences arabes : Mathématiques et Physique* (pp. 11-29). Paris, France : Éditions du Seuil.

Serra, Y. (2010). Le manuscrit « De Progressione Dyadica » de Leibniz, *Bibnum. Textes fondateurs de la science*.

Schärlig A. (2022). *Calculer avec des jetons : avant les chiffres arabes*, Lausanne, Suisse : Presses polythechniques et universitaires romandes.

Schwer, S. R. (2018). Les rapports de nombres. *In* Moyon, M. et Tournès, D. (dir.), *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3* (pp. 92-120). Bouc-Bel-Air, France : ARPEME.

VII - ANNEXE : L'ÉVENTAIL MYSTÉRIEUX AVEC 6 CARTONS

Inspiré de la proposition de Laisant (1915, 110), voici l'extension de l'éventail mystérieux proposé par Lucas (1895) et Laisant (1915) avec six cartons (de 1 à 63) à la place de cinq (de 1 à 31), eux-mêmes présentés à la figure 16.

1	2	4	8	16	32
3	3	5	9	17	33
5	6	6	10	18	34
7	7	7	11	19	35
9	10	12	12	20	36
11	11	13	13	21	37
13	14	14	14	22	38
15	15	15	15	23	39
17	18	20	24	24	40
19	19	21	25	25	41
21	22	22	26	26	42
23	23	23	27	27	43
25	26	28	26	28	44
27	27	29	29	29	45
29	30	30	30	30	46
31	31	31	31	31	47
33	34	36	40	48	48
35	35	37	41	49	49
37	38	38	42	50	50
39	39	39	43	51	51
41	42	44	44	52	52
43	43	45	45	53	53
45	46	46	46	54	54
47	47	47	47	55	55
49	50	52	56	56	56
51	51	53	57	57	57
53	54	54	58	58	58
55	55	55	59	59	59
57	58	60	60	60	60
59	59	61	61	61	61
61	62	62	62	62	62
63	63	63	63	63	63