QUELS APPORTS DIDACTIQUES DE L'ARITHMÉTIQUE POUR LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE ?

Véronique BATTIE
Université Claude Bernard Lyon 1
S2HEP (UR 4148)
veronique.battie@univ-lyon1.fr

Résumé
Dans les programmes actuels du Lycée, des pistes sont nouvellement mentionnées quant au raisonnement (e.g. envisager différentes preuves d'un même résultat, prouver sur un exemple générique) et nous proposons de les explorer dans le domaine de l'arithmétique à la lumière de travaux en didactique des mathématiques. Plus largement, nous tâchons d'apporter des éléments de réponse à la question des potentialités de l'arithmétique pour l'enseignement et l'apprentissage du raisonnement dans le Secondaire et à la transition Lycée-Université.

I - INTRODUCTION

Raisonner en arithmétique est-ce incongru ? Cette question rejoint ce qui est au cœur de nos recherches en didactique en mathématiques depuis le retour de l'arithmétique en 1998 dans les programmes du Secondaire après des années d'absence. De façon dialectique avec notre pratique enseignante en première année de Licence de mathématiques, nos recherches sont centrées sur l'étude des spécificités et potentialités de l'arithmétique, théorie des nombres élémentaire, pour l'apprentissage et l'enseignement du raisonnement mathématique à la transition Lycée-Université.

L'objet de la première partie de cette contribution est l'outil épistémologique dont nous avons eu besoin pour étudier les spécificités du raisonnement en arithmétique. Dans une seconde partie, nous tentons d'illustrer comment cet outil permet d'apporter des éléments de réponse à la question des apports didactiques de l'arithmétique pour le raisonnement mathématique. Nous concluons en abordant la question des ressources bibliographiques relatives à la didactique de l'arithmétique.

II - DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPÉRATOIRE DU RAISONNEMENT EN ARITHMÉTIQUE

Au sein du raisonnement en arithmétique, nous distinguons deux dimensions complémentaires, la dimension organisatrice et la dimension opératoire, en appui sur l'étude de textes historiques (Battie, 2003). La première s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée : elle organise et structure les différentes étapes du raisonnement. La dimension opératoire quant à elle est relative à tout ce qui relève des manipulations de calcul opérées sur les objets en jeu et qui permettent la mise en œuvre des différentes étapes du raisonnement global suivi (dimension organisatrice). Sous quelles formes identifie-t-on spécifiquement en arithmétique chacune de ces dimensions ? Nous apportons dans ce qui suit des éléments de réponse à cette question et les exemples présentés éclairent ce que recouvre chacune des deux dimensions. Nous mettons ensuite à jour comment ces dimensions sont susceptibles d'interagir dans le raisonnement en arithmétique.

1. Dimensions organisatrices en arithmétique

Au titre de premier exemple, la dimension organisatrice prend forme avec la visée de réduire la résolution d un problème à l'étude d un nombre fini de cas : la disjonction de cas qui exploite le concept de partition d un ensemble et la recherche exhaustive où l on teste une à une les solutions potentielles (avec préalablement ou non une phase de limitation de cette recherche).

Un deuxième pôle d exemples, appelé le jeu d extension-réduction et propre aux anneaux factoriels, apparaît avec la visée d'établir une propriété pour tout élément d un anneau factoriel : dans $\mathbb{Z}$, en appui sur le théorème fondamental de l'arithmétique, on montre que la propriété est multiplicative et qu elle est vraie pour tout nombre premier.

En arithmétique, « plonger » modulo un entier naturel n une égalité ou une équation relève de la dimension organisatrice. La visée associée peut être d'obtenir des critères de divisibilité. Et, articulée avec un raisonnement par l'absurde, la dimension organisatrice « plonger modulo n » permet aussi de montrer qu'une équation diophantienne n'a pas de solution. Le lecteur pourra se reporter à (Perrin, 2011, pp.24-26) pour illustrer ces deux exemples.

Enfin, la dimension organisatrice peut prendre formes à travers l exploitation de la propriété de bon ordre de l ensemble $\mathbb{N}$: raisonnement par récurrence, descente infinie, raisonnement par l absurde et minimalité. Nous avons l'équivalence logique entre raisonnement par récurrence, descente infinie, et raisonnement par l absurde et minimalité. Néanmoins, il ne serait pas raisonnable de supposer une équivalence didactique. Un sondage auprès d'étudiants en première année de Licence de mathématiques en 2022-2023 vient appuyer cette position. Nous nous centrons sur la question suivante extraite du sondage :

> *Voici une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$:*
> *Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, alors il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.*
> *Montrons que a et b sont pairs : avec l'égalité précédente on a $2b^2 = a^2$ donc a^2 est pair et a aussi. Il existe un entier a' non nul tel que $a = 2a'$; d'où $2b^2 = 4(a')^2$ ou encore $b^2 = 2(a')^2$. Comme précédemment, on en conclut que b est pair. Ainsi, à partir des entiers a et b on obtient des entiers naturels a' et b' tels que $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$, a'<a et b'<b. On a construit une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante et ainsi aboutit à une contradiction.*
> *Y a-t-il un lien entre cette démonstration et le principe de récurrence ? Expliquer votre réponse.*

D'un point de vue qualitatif, quatre types de réponses apparaissent : pas de réponse (type 0), réponse négative (type 1), réponse positive avec une explication que nous qualifions de hors-sujet (type 2) et réponse positive avec une explication qui serait à préciser (type 3). Chacun de ces types de réponses, à l'exception du type 0, est illustré en annexe : le lecteur trouvera une réponse de type 1 puis une réponse de type 2 et ensuite deux réponses de type 3. Les résultats de ce sondage font écho à d'autres travaux en didactique des mathématiques :

> *Des études didactiques (Gardes et al., 2016 ; Grenier, 2003, 2012 ; Grenier et Payan, 1998) ont montré que*

> *le concept de récurrence et le raisonnement associé sont très mal compris par la grande majorité des élèves et des étudiants de licence scientifique. Le « sens » de la récurrence et son intérêt comme outil de démonstration sont absents. De plus, l'idée qu'un raisonnement par l'absurde est incompatible avec un raisonnement par récurrence est très répandue […].* (Bernard et al., 2018)

La dimension organisatrice « exploitations de la propriété de bon ordre de ℕ » offre une piste didactique pour faire rencontrer principe de récurrence et raisonnement par l'absurde.

2. Dimensions opératoires en arithmétique

Pour la dimension opératoire nous identifions en arithmétique plusieurs pôles. Un premier pôle apparaît avec le choix de représentation des objets en jeu dans le raisonnement. Deux choix essentiels sont les suivants : la structuration autour des nombres premiers (en appui sur le théorème fondamental de l arithmétique), les réseaux réguliers liés à l ordre partiel de la relation divisibilité (congruences) et l'écriture des nombres dans différentes bases de numération.

Un deuxième pôle opératoire renvoie à l utilisation de théorèmes et de résultats admis au cours du raisonnement. Nous parlerons dans ce cas-là d'encapsulation de la dimension opératoire par analogie avec l'informatique[1].

Les manipulations algébriques opérées dans le raisonnement définissent un troisième pôle opératoire en incluant l utilisation des combinaisons linéaires d entiers.

Nous pointons enfin un quatrième pôle avec l ensemble des traitements relatifs à l articulation entre l ordre (partiel) divisibilité noté $|$ et l ordre (total) naturel noté $\leq$ au sein des entiers naturels. Ces traitements sont développés en appui sur :

• $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m|n \Longrightarrow m \leqslant n$

• $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m|n$ et $n|m \Leftrightarrow m = n \Leftrightarrow m \leqslant n$ et $n \leqslant m$

• Le plus grand commun diviseur coïncide pour les deux ordres

Nous illustrons cette articulation via une extraction de la dimension opératoire d'un processus de preuve arithmétique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Soient a et b deux entiers premiers entre eux tels que $a^2 = 2b^2$. L'égalité précédente peut être lue en termes de divisibilité des deux façons suivantes :

- $2|a^2$, $2 \leqslant a^2$
- $a^2|2b^2$ et d'après le théorème de Gauss, a^2 et b^2 étant premiers entre eux, on a $a^2|2$, $a^2 \leqslant 2$

Ainsi $a^2 = 2$.

[1] En programmation informatique, l'encapsulation de données est l'idée de cacher l'information de façon intentionnelle. Dans l'analogie que nous faisons, ce caractère intentionnel n'entre pas en jeu.

Ce qui permet de formuler la preuve suivante avec un raisonnement par l'absurde pour la dimension organisatrice.

> **Preuve A.** *Supposons par l'absurde que* $\sqrt{2}$ *soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que* $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. *On suppose que* a *et* b *sont premiers entre eux. Avec l'égalité précédente, on a* $a^2 = 2b^2$ *:*
>
> - $2|a^2, 2 \leqslant a^2$
> - $a^2|2b^2$ *et d'après le théorème de Gauss,* a^2 *et* b^2 *étant premiers entre eux, on a* $a^2|2, a^2 \leqslant 2$
>
> *Ainsi* $a^2 = 2$.
>
> *On obtient une contradiction car 2 n'est pas un carré dans* $\mathbb{N}$. *En conclusion,* $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

L'analyse de la dimension opératoire du raisonnement en termes d articulation entre l ordre divisibilité et l ordre naturel nécessite une attention ciblée sur le sens de lecture des égalités en termes de divisibilité.

3. Interactions entre dimensions organisatrice et opératoire

Ces dimensions organisatrice et opératoire sont introduites avec l idée qu elles interagissent dans le raisonnement mathématique. Nous avons mis à jour quatre principales voies d interactions (Battie, 2003).

Il est tout d abord possible d identifier de façon privilégiée une dimension organisatrice donnée à un certain pôle opératoire. Le jeu d extension-réduction et la structuration autour des nombre premiers vont de pair. Une disjonction de cas ou une phase de limitation de recherche exhaustive est susceptible d'être définie en lien étroit avec l articulation entre l ordre divisibilité et l ordre naturel ; par exemple, au sein d une disjonction de cas définie à partir de l ordre naturel, les propriétés « être pair » et « être impair » peuvent être chacune associée spécifiquement à un des cas (ce qui peut être illustré à partir du problème « Déterminer les entiers naturels m et n tels que $19^m - 2^n$ soit un carré » (Battie, 2003)).

Un deuxième type d interactions se situe dans la façon dont les objets sur lesquels porte le travail opératoire influent sur la nature de la dimension organisatrice. Le lecteur pourra se reporter à (Battie, 2003) pour une illustration de ce type d'interactions à partir de preuves historiques du problème « Il n'existe pas de triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un carré » (Goldstein, 1995).

Une troisième voie d interactions concerne l apparition de sous-dimensions organisatrices dans la dimension opératoire : le raisonnement prend forme via l imbrication de plusieurs dimensions organisatrices. En guise d'exemple, reprenons la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ mentionnée dans le sondage présenté précédemment. Dans cette preuve, l'implication « $\forall a \in \mathbb{N}, 2|a^2 \Longrightarrow 2|a$ » est admise. Si on choisit de la démontrer, une preuve possible serait :

> **Preuve B.** *Supposons par l'absurde que* $\sqrt{2}$ *soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que* $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. *Montrons que a et b sont pairs. Avec l'égalité précédente, on a* $2b^2 = a^2$ *donc* a^2 *est pair et a aussi : en raisonnant par contraposée, s'il existe k entier tel que* $a = 2k + 1$, *on aurait* $a^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ *avec* $2k^2 + 2k$ *entier. Ainsi, il existe un entier a' non nul tel que* $a = 2a'$, *d'où* $2b^2 = 4(a')^2$ *ou encore* $b^2 = 2(a')^2$. *Comme précédemment, on en conclut que b est pair. Ainsi, à partir des entiers a et b on obtient des entiers naturels a' et b' tels que* $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$, *a'<a et b'<b. On a construit une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante et on aboutit à une contradiction. En conclusion,* $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Un raisonnement par contraposée complexifie la dimension organisatrice de la preuve initiale en s'imbriquant dans le raisonnement par l'absurde. Dans un sens de complexification inverse, cet exemple illustre aussi qu'en admettant un résultat prouvé dans le jeu opératoire (processus d encapsulation) une ou plusieurs dimensions organisatrices sont susceptibles de disparaître dans le raisonnement.

Enfin, on peut mentionner qu en spécifiant un objet de la dimension opératoire on peut éviter de spécifier la dimension organisatrice. Dans la preuve précédente, la dimension organisatrice principale est un raisonnement par l'absurde spécifié en descente infinie et l'objet fraction $\frac{a}{b}$ n'est quant à lui pas spécifié. Dans la preuve donnée ci-dessous, le raisonnement par l'absurde n'est pas spécifié, c'est l'objet fraction qui l'est via son représentant irréductible avec l'hypothèse que les entiers a et b sont premiers entre eux :

> **Preuve C.** *Supposons par l'absurde que* $\sqrt{2}$ *soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que* $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ *avec a et b premiers entre eux. Montrons que a et b sont pairs. Avec l'égalité précédente, on a* $2b^2 = a^2$ *donc* a^2 *est pair et a aussi : en raisonnant par contraposée, s'il existe k entier tel que* $a = 2k + 1$, *on aurait* $a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ *avec* $2k^2 + 2k$ *entier. Ainsi, il existe un entier a' non nul tel que* $a = 2a'$, *d'où* $2b^2 = 4(a')^2$ *ou encore* $b^2 = 2(a')^2$. *Comme précédemment, on en conclut que b est pair. Ainsi, on aboutit à une contradiction : à la fois a et b sont premiers entre eux et a et b sont pairs. En conclusion,* $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Mise à part la spécification de l'objet fraction, les deux preuves précédentes ne diffèrent pas du point de vue de la dimension opératoire. Elles diffèrent en termes de dimension organisatrice principale : un raisonnement par l'absurde spécifié en descente infinie est remplacé par un raisonnement par l'absurde non spécifié. Dans la descente infinie, on aboutit à une contradiction extrinsèque à la preuve (une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante est construite) et, dans le raisonnement par l'absurde non spécifié, on aboutit à une contradiction intrinsèque à la preuve (les entiers a et b sont à la fois premiers entre eux et non premiers entre eux).

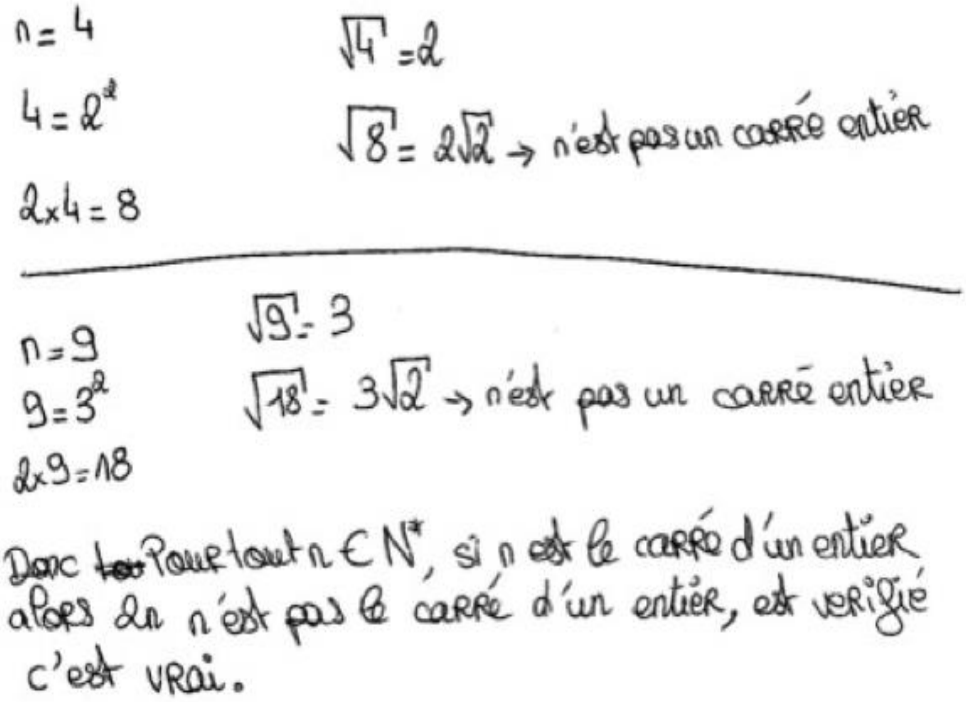
III - TRAVAILLER LES INTERACTIONS ENTRE DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPÉRATOIRE A LA TRANSITION LYCÉE-UNIVERSITÉ

Pourquoi envisager de travailler avec les élèves et les étudiants les interactions entre dimensions organisatrice et opératoire du raisonnement ? Il s'agit tout d'abord de se référer à la pratique experte : dans ses raisonnements, dans le processus de preuve, un.e mathématicien.ne est en contrôle de ses interactions, c'est donc selon nous un enjeu de formation à la pratique des mathématiques. De plus, nous nous appuyons sur des travaux didactiques relatifs au raisonnement. Travailler ces interactions est susceptible de contribuer à l articulation des aspects syntaxique (lieu des opérations grammaticales indemnes de tout contenu, dépourvues de sens) et sémantique (lieu de la signification) et cela est d'autant plus important à la transition Lycée-Université où on observe un déséquilibre dans les pratiques à l Université (Deloustal-Jorrand et *al.*, 2020 ; Alcock, 2010). Et, en appui sur les travaux de Durand-Guerrier (2005), travailler les interactions entre dimensions organisatrice et opératoire est aussi susceptible de contribuer au travail simultané sur les aspects logiques et mathématiques des concepts en jeu, les difficultés logiques étant très dépendantes des contenus mathématiques.

Aborder la question du comment travailler les interactions entre dimensions organisatrice et opératoire nécessite d'introduire des éléments de didactique de la preuve en mathématiques. C'est ce que nous faisons dans un premier temps avant de donner des pistes didactiques pour mettre en oeuvre ce travail à la transition Lycée-Université.

1. Preuves pragmatiques et preuves intellectuelles

Suivant le statut des connaissances engagées et la nature de la rationalité sous-jacente, Balacheff (1987) distingue les preuves pragmatiques qui sont intimement liées à l action et à l expérience, des preuves intellectuelles qui montrent que leur auteur a pris du recul par rapport à l action (la démonstration est une preuve intellectuelle particulière). L'évolution du rapport à la preuve en termes de passage de preuves pragmatiques à des preuves intellectuelles est un enjeu majeur des programmes du Cycle 4 (notamment à travers l'enseignement de la géométrie) et il reste d actualité à l entrée à l Université. Pour en témoigner, nous reproduisons ci-dessous une preuve produite par un étudiant en L1 mathématiques.



$n = 4$ $\sqrt{4} = 2$

$4 = 2^2$ $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ → n'est pas un carré entier

$2 \times 4 = 8$

$n = 9$ $\sqrt{9} = 3$

$9 = 3^2$ $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ → n'est pas un carré entier

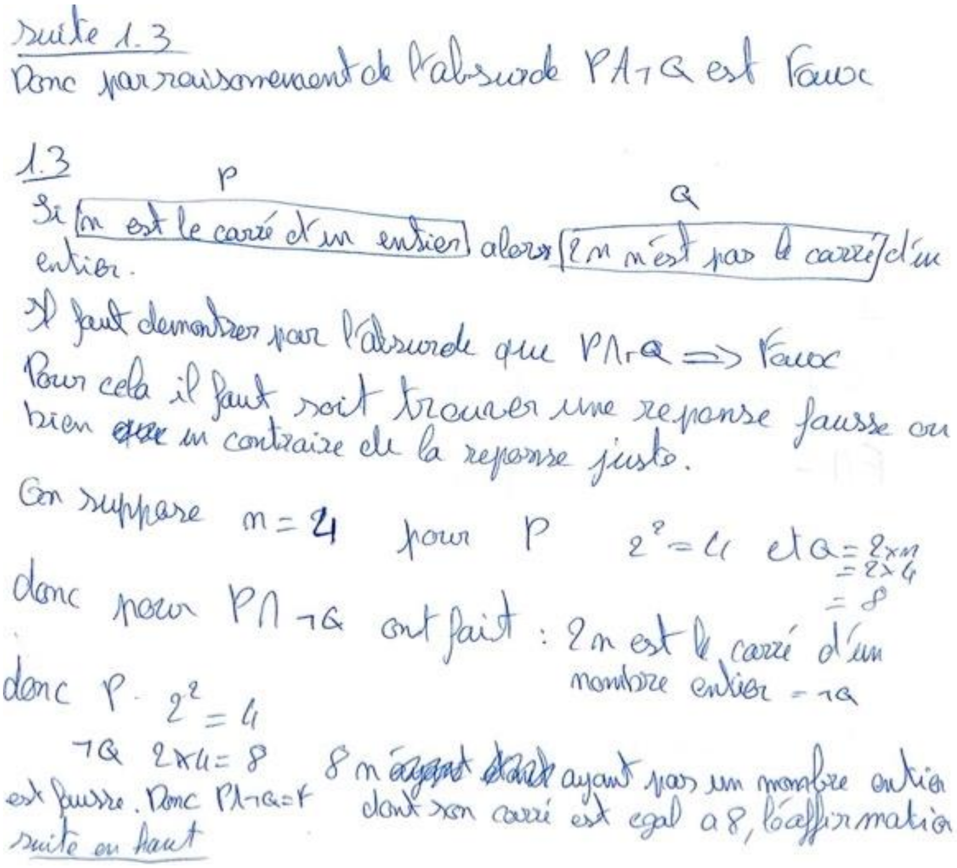
$2 \times 9 = 18$

Donc ~~tou~~ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier, est vérifié c'est vrai.

Figure 1. Empirisme naïf en L1 mathématiques

En arithmétique, l'empirisme naïf tel qu'il est défini par Balacheff est une preuve pragmatique où l'auteur mobilise un ou des exemples ayant le statut de preuve d'un énoncé avec quantification universelle.

En L1 mathématiques, l'empirisme naïf peut aussi apparaître au sein de la dimension opératoire d'une preuve. La production reproduite ci-après en témoigne.


suite 1.3
Donc par raisonnement de l'absurde $P \wedge \neg Q$ est faux

1.3
Si n est le carré d'un entier (P) alors 2n n'est pas le carré d'un entier (Q).
Il faut demontrer par l'absurde que $P \wedge \neg Q \Rightarrow$ Faux
Pour cela il faut soit trouver une reponse fausse ou bien ~~que~~ un contraire de la reponse juste.
On suppose $n = 4$ pour P $2^2 = 4$ et $Q = 2 \times n = 2 \times 4 = 8$
donc pour $P \wedge \neg Q$ ont fait : 2n est le carré d'un nombre entier $= \neg Q$
donc P $2^2 = 4$
$\neg Q$ $2 \times 4 = 8$ 8 n' ~~ayant~~ ~~etant~~ ayant pas un nombre entier dont son carré est egal a 8, l'affirmation est fausse. Donc $P \wedge \neg Q = F$
suite en haut

Figure 2. Empirisme naïf au sein de la dimension opératoire en L1 mathématiques

Dans cette preuve, on observe comment l'empirisme naïf parasite la dimension opératoire relative à la mise en œuvre de la dimension organisatrice principale (raisonnement par l'absurde nécessitant de nier une implication avec quantification universelle).

Parmi les preuves pragmatiques, Balacheff identifie aussi l'exemple générique nouvellement mentionné dans les documents d'accompagnement intitulés « Raisonnement et démonstration » des programmes de Seconde et Première de la voie générale (respectivement parus en août 2019 et novembre 2019) :

> *Une autre piste [de différenciation] consiste à démontrer un résultat sur un exemple générique. Il s'agit d'un exemple numérique ou d'un cas particulier dont le traitement n'entache pas une démonstration générale, en ce sens que les outils mobilisés et les modes de raisonnement sont assez facilement transférables au cas général. Dans certains cas, on peut s'en tenir à cet exemple en précisant qu'on admet le cas général.*

On retrouve bien la définition de l'exemple générique tel qu'il a été défini dans les travaux de Balacheff :

> *L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus. La formulation dégage les propriétés caractéristiques et les structures d'une famille en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants. (Balacheff, 1987, p.20).*

Dans la partie qui suit, nous présentons l'idée d'activités multi-preuves spécifiquement en écho à cette définition et en guise de piste didactique pour travailler les interactions entre dimensions organisatrice et opératoire à la transition Lycée-Université.

2. Activités multipreuves de type generic proving

En référence à Leron et Zaslavsky (2013, p.24),

> *A generic proof is, roughly, a proof carried out on a generic example. We introduce the term generic proving to denote any mathematical or educational activity surrounding a generic proof.*

Et en écho à Dreyfus et *al*. (2012, p.198),

> *[…] a multiple proof tasks which explicitly require different types of proofs for the same mathematical statement,*

nous dénommons « activité multi-preuves de type generic proving » (generic proving multiple proofs tasks) toute activité où plusieurs preuves d'un même résultat mathématique sont fournies (et non demandées) dans une perspective de généralisation de ce résultat.

Pour concevoir ce type d'activités, l'enseignant.e a besoin d'être outillé.e pour mener une analyse comparative de preuves du résultat général en jeu. Une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire répond à ce besoin et permet de sélectionner judicieusement un échantillon de preuves. Nous en donnons un exemple associé à la problématique d'accéder et de prouver le résultat suivant « Soit n un entier naturel, une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{n}$ soit rationnel est que n soit un carré d'entier » à partir de preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Aux quatre preuves A, B et C rencontrées précédemment, nous ajoutons la preuve suivante :

> **Preuve D.** *Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ d'où $2b^2 = a^2$. On appelle α l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de a et βcelui de b. D'après l'égalité précédente on a $1 + 2\beta = 2\alpha$, ce qui est en contraction avec « un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair ». En conclusion,$\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Les preuves A et D ont un pouvoir générique supérieur à celui des preuves B et C et cette hétérogénéité est recherchée dans la conception de ce type d'activités. Autrement dit, à partir des preuves A et D, nous pouvons aisément aboutir à une preuve du résultat général. Avec les preuves B et C, les preuves sont de plus en plus complexes du point de vue de la dimension organisatrice (de nouveaux cas apparaissent dans le raisonnement par contraposée) et aller vers une généralisation est problématique. Le ressort fondamental ici est identifié dans la dimension opératoire et plus précisément dans le choix de travailler sur les entiers via leur décomposition en produit de nombres premiers. Ce choix est explicite et directement utilisé dans la preuve D que nous qualifions de fondamentale. Dans la preuve A, c'est à travers l'utilisation du théorème de Gauss qu'il apparaît. Le lecteur pourra se reporter à Battie (2021) pour plus de détail.

Les preuves A à D constituent un ensemble hétérogène en termes de pouvoir générique et peuvent être exploitées à la transition Lycée-Université dans l'activité que nous présentons à présent.

Dans un premier temps, les consignes suivantes sont données à des groupes de 3 à 4 élèves/étudiants :

> *On rappelle qu'un nombre est rationnel si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec a entier et b entier naturel non nul.*
>
> *1. Selon votre groupe, le nombre $\sqrt{2}$ est-il rationnel ou non rationnel ? Justifier votre réponse.*
> *2. Selon votre groupe, le nombre $\sqrt{3}$ est-il rationnel ou non rationnel ? Justifier votre réponse.*
> *3. A votre avis, pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est-il rationnel ? Tenter de démontrer votre conjecture.*

Dans un second temps, les preuves A à D sont fournies et accompagnées des consignes suivantes :

4. *De quelle preuve vos idées du ... sont-elles les plus proches ?*
5. *Choisir la preuve qui vous permet le plus facilement de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et écrivez la preuve associée.*
6. *On peut se demander pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est rationnel ; complétez la phrase suivante : « $\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si n est ....». Tenter de démontrer cette équivalence en vous inspirant de la preuve qui vous semble la plus facile à adapter.*

Dans cette activité, les élèves/étudiants sont amenés à analyser et produire des preuves de façon dialectique, plus précisément dans un jeu d'allers-retours entre lecture-analyse des preuves fournies et production de preuves. L'intérêt didactique de ce type d'activités est double en termes de travail sur les interactions entre dimensions organisatrice et opératoire : il permet à la fois d'exploiter le potentiel didactique des preuves génériques pour travailler sur la preuve en mathématiques et de prendre en charge le passage de preuve(s) générique(s) à une preuve générale. Cette caractéristique va dans le sens du conseil donné par le mathématicien Beardon à Rowland didacticien de l'arithmétique :

> *There is a sense in which you are reversing a familiar step. If a student dot not understand a proof one often suggests that he/she « works it through in a particular case ». What you are suggesting, I think, is that you reverse the order here with the added benefit that the student is confident before the formal proof rather than been depressed after it...I think that if you want to have a good chance of success you must not only develop the idea of the generic example, but also show how it really lead on to a formal proof. (Rowland, 2002, p.179)*

Les résultats des expérimentations menées (Battie, 2015, 2021) sont encourageants avec une préférence spontanée des élèves/étudiants pour les preuves génériques (preuves A et D). Ce constat est d'autant plus remarquable que la preuve communément rencontrée dans le Secondaire est la preuve C.

Néanmoins, dans la mise en œuvre de ce type d'activités, il faut rester vigilant sur deux points en particulier. Tout d'abord, il faut développer une vigilance quant au rapport des élèves/étudiants à la preuve. En effet, proposer plusieurs preuves d'un même résultat mathématique pourrait prêter à confusion quant à la suffisance d'une preuve pour établir la validité de ce résultat. De plus, il faut rester prudent quant à l'interprétation de ce que donne à voir une production écrite d'un élève/étudiant, particulièrement dans le cas de l'exploitation des preuves génériques où les adaptations à faire sont minimes. Dans l'activité présentée précédemment, un élève/étudiant peut par exemple réécrire la preuve A uniquement en changeant « 2 » en « 3 ».

Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{3} = a/b$; on suppose que a et b sont premiers entre eux.

Avec l'égalité précédente, on a : $3b^2 = a^2$ et ainsi :
- D'une part on a en particulier $a^2 | 3b^2$ et, d'après le théorème de Gauss, a^2 et b^2 étant premiers entre eux (car a et b le sont) on a $a^2 | 3$. Ainsi $a^2 \leqslant 3$.
- D'autre part, on a $a^2 \geqslant 3$.

Ainsi $a^2 = 3$.
On obtient une contradiction car 3 n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$.
En conclusion, $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Figure 3. Preuve produite par un étudiant L1 mathématiques à partir de la preuve A de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Uniquement à partir de cette production, on ne peut être certain de l'authenticité de la compréhension des preuves en jeu et nous rejoignons Rowland avec cette citation :

> *I believe that the accounts given here of my work with undergraduates offer grounds for considerable optimism regarding the possibility of students "seeing" the generality we intend them to see in arguments based on particular cases. At the same time, it warns us against naïve complacency : we cannot be sure what they will see, and they may see considerably less than we might hope. (Rowland, 2002)*

En termes de limite didactique, nous n'avons pas avec cette activité la rencontre heureuse mentionnée par Hanna (2018, p.5) :

> *[...] it its often possible to find the happy concurrence in which a proof enlightens both the process of proving and the broader mathematical context with which it deals.*

En effet, cette activité ne donne pas accès aux propriétés permettant de manipuler les réels (Durand-Guerrier, 2019). En ce sens, et contre l'avis de Hanna (2018) et Steiner (1978), les preuves arithmétiques sont limitées selon nous en termes d explication mathématique de l irrationalité de $\sqrt{2}$. Cela renvoie à la traduction du problème dans le domaine de l'arithmétique :

> *[...] de nombreux problèmes d'irrationalité peuvent être étudiés au sein de l'arithmétique. [...] Ainsi (P) «* $\sqrt{2}$ *est irrationnel » signifie (Q) «* $a^2 = 2b^2$ *n'a pas de solution entière » et apparaît donc comme un théorème*

> *réellement arithmétique. Nous pouvons poser la question « $\sqrt{2}$ est-il irrationnel ? » sans sortir du champ de l'arithmétique [...] (Hardy et Wright, 2007, p.47)*

On peut étudier le problème arithmétique en jeu (résolution dans Z de l'équation $a^2 = 2b^2$) sans disposer des nombres réels.

3. Conclusion

Lors des dernières rencontres du réseau INDRUM (International Network for Didactic Research in University Mathematics[2]), un élément de conclusion du groupe de travail centré sur la preuve et auquel nous participions a été formulé ainsi :

> *Finally, we consider that introducing specific work on proof and proving in University teacher training would be valuable, to initiate a change in the way proof is taught in general at university: moving from proof made in front of students, to students' proof elaboration and analysis. (Durand-Guerrier et Turgut, 2022, p.242).*

Les activités multi-preuves présentées précédemment, via un travail sur les interactions entre dimensions organisatrice et opératoire, nous semblent constituer une piste didactique allant dans le sens de cette recommandation. D'autres pistes existent et, en guise de conclusion, nous les mentionnons brièvement en indiquant les références de ressources bibliographiques correspondantes.

Nous pouvons tout d'abord mentionner les activités proposant aux élèves/étudiants une lecture critique de preuves erronées. Il peut s'agir par exemple de mettre à l'épreuve l'authenticité de la compréhension par les élèves/étudiants du principe de récurrence (Gardes et *al*., 2016).

Les activités proposant une analyse de preuves en fournissant une grille de lecture sont aussi une piste à explorer. Dans la Littérature, on parle de « tests de compréhension de preuves » (Conradie et Frith, 2000 ; Mejia-Ramos et *al*. 2012 ; Trouvé, 2022).

Au-delà de ces activités spécifiques, il nous semble important dans le travail sur le raisonnement de favoriser auprès des élèves et étudiants une mise en relief de ce qui relève spécifiquement de chacune des dimensions organisatrice et opératoire et de leurs interactions.

IV - REMARQUES CONCLUSIVES EN TERMES DE RESSOURCES BIBLIOGRAPHIQUES

Lors d'un entretien avec Jean-Louis Nicolas, théoricien des nombres, nous posions la question de la différence entre arithmétique et théorie des nombres et de leurs définitions respectives si différence il y avait. La référence donnée fut la *MSC* (*Mathematics Subject Classification)* où on identifie une rubrique à part entière *Number theory* et au sein de laquelle apparaît la sous-rubrique *Elementary number theory*.

Dans la littérature en didactique des mathématiques, l'arithmétique en tant que théorie des nombres élémentaire est identifiée au sein des mathématiques discrètes dans les publications de synthèse telle

[2] https://hal.science/INDRUM/

l'*Encyclopedia of Mathematics Education* ou tel un récent numéro du volume 54 de la revue *ZDM* (Volume 54, issue 4, August 2022). Il est regrettable que les travaux didactiques mentionnés dans ces publications soient essentiellement propres aux mathématiques discrètes hors arithmétique. Pour cette raison, les ouvrages dédiés spécifiquement à la didactique de l'arithmétique tels les ouvrages édités par Zazkis et Campbell (2002, 2006) sont à prendre en compte de façon complémentaire.

Depuis le retour de l'arithmétique en 1988 dans les programmes scolaires, les IREM ont publié de nombreuses brochures dédiées à son enseignement et ses potentialités didactiques. Bon nombre de ces revues n'ont pas été numérisées jusqu'à présent et restent peu visibles et difficilement accessibles pour les lecteurs intéressés. C'est ainsi que nous terminons en lançant un appel à recenser ces brochures au sein de l'ensemble des IREM, à communiquer l'inventaire via le portail des IREM pour plus de visibilité et à envisager leur numérisation pour une meilleure diffusion.

V - BIBLIOGRAPHIE

Alcock, L. (2010). Mathematicians perspectives on the teaching and learning of proof. In F. Hitt, D. Holton, P. Thompson (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*. VII (p. 63-91). American Mathematical Society.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. 18(2) 147-176.

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*, Thèse de Doctorat, Université Paris7, Paris.

Battie, V. (2015). Arithmétique et raisonnement mathématique en classe de terminale C&E au Gabon. *Revue africaine de didactique des sciences et des mathématiques*, 12.

Battie, V. (2021). Pouvoir générique d une preuve. *XXVIIème colloque CORFEM*, Strasbourg, France.

Bernard, D., Gardes D., Gardes M.-L., Grenier D. (2018). Une étude didactique du raisonnement par l absurde pour le Lycée. *Petit x*, 108, 5-40.

Campbell, S. R., Zazkis, R. (Eds.). (2002). LE*Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction*. Ablex Publishing.

Conradie, J., Frith, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 225-235.

Deloustal-Jorrand, V., Gandit, M., Mesnil, Z., da Ronch, M. (2020). Utilisation de l articulation entre les points de vue syntaxique et se´mantique dans l analyse d un cours sur le raisonnement. In T. Hausberger, M. Bosch, & F. Chellougui (E´ds.), *INDRUM2020 proceedings : Third conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 378-387). University of Carthage and INDRUM.

Dreyfus, T., Nardi, E., Leikin, R. (2012). Cognitive development of proof. *In Proof and proving in mathematics education: the 19th ICMI Study*. Hanna, G. & de Villiers, M. (Eds), New York : Springer.

Durand-Guerrier, V. (2005). Questions de logique dans l'enseignement supérieur. *IIIe Colloque Questions de pédagogie dans l'enseignement supérieur*, Lille, France.

Durand-Guerrier, V. (2019). Travailler avec les preuves pour favoriser l'appropriation des concepts mathématiques. XXVIe *Colloque CORFEM*, Juin 2019, Strasbourg, France.

Durand-Guerrier, V., Turgut, M. (2022). TWG3: Teaching and learning of linear and abstract algebra, logic, reasoning and proof. In Trigueros, M., Barquero, B., Hochmuth, R. & Peters, J. (Eds) *INDRUM2022 Proceedings,* Hannover.

Gardes D., Gardes M.-L., Grenier D. (2016). Etat des connaissances des élèves de Terminale S sur le raisonnement par récurrence. *Petit x*, 67-98.

Goldstein, C. (1995). *Un théorème de Fermat et ses lecteurs* ; Presses Universitaires de Vincennes, Saint-Denis.

Hanna, G. (2018). Reflections on proof as explanation. In Stylianides, A. J. & Harel, G. (Eds.) *Advances in mathematics education research on proof and proving. An international perspective*. Springer.

Hardy, G.-H., Wright, E.-M. (2007). *Introduction à la théorie des nombres*. Vuibert.

Leron, U., Zaslavsky, O. (2013). Generic proving : Reflections on scope and method. *For the learning of Mathematics*, 33(3), 24-30.

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 3-18.

Perrin, D. (2011). *Mathématiques d'école*. Cassini.

Rowland, T. (2002). Generic proofs in number theory. In Campbell, S. R., Zazkis, R. (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp.157-183). Ablex Publishing.

Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies*, 34, 135–151.

Trouvé, T. (2022). *Apports des preuves génériques pour sonder la compréhension d'une preuve formelle à la transition secondaire–supérieur.* [Mémoire de master, Université Claude Bernard Lyon1]. https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-04071091v1

Zazkis, R., Campbell R.S. (Eds). (2006). *Number theory in mathematics education*. LEA Publishers.

VI - ANNEXE : ILLUSTRATION DES TYPES DE RÉPONSES AU SONDAGE AUPRES D'ÉTUDIANTS EN L1 MATHÉMATIQUES

Y a-t-il un lien entre cette démonstration et le principe de récurrence ? Expliquer votre réponse.

Non : la recurrence n'aboutit jamais à une contradiction, mais à
une affirmation que la propriété fonctionne $\forall n \in$ à un ensemble.
Il n'y a pas non plus d'initialisation ni même d'hypothese pour un
rang n, qui semble la base de la recurrence et de son raisonnement

Y a-t-il un lien entre cette démonstration et le principe de récurrence ? Expliquer votre réponse.

Oui il y a un entre cette demonstration et le
Cette demonstration commence par une supposition principe de recurrence
un "Montrons que", ce qui ressemble fait et enchaine avec
principe de la recurrence. a l'heredite dans le

Y a-t-il un lien entre cette démonstration et le principe de récurrence ? Expliquer votre réponse.

Cette demonstration utilise un principe de
récurrence car on construit une suite infinie de termes
en utilisant les termes précédents.

Y a-t-il un lien entre cette démonstration et le principe de récurrence ? Expliquer votre réponse.

Il y a un lien entre cette démonstration et le principe de récurrence.
En définissant a' en fonction de α on fait un récurrence avec des termes
de plus en plus petit.
On peut donc voir l'utilisation du principe de récurrence bien que ce soit
avec des termes de plus en plus petit et non pas de plus en plus grand celle
que habituellement.