La boîte de volume huit fois plus grand

Auteurs : Monique MAZE – Aurélie ROUX (IREM de Clermont-Ferrand)

Niveau : Cycle 4 [4e – 3e]

Présentation
Cette activité consiste à réaliser le patron d'une boîte parallélépipédique de volume huit fois plus grand qu'une autre de dimensions données. L'assemblage des patrons et la manipulation des solides obtenus permettent de valider ou non les propositions des élèves.

Prérequis
Aucune connaissance nouvelle n'est nécessaire. L'enseignant peut proposer ce travail dès le début de l'année, il suffit de connaître les patrons de parallélépipède rectangle.

Objectifs principaux
- Mettre en défaut les conceptions erronées des élèves (multiplier les longueurs par huit multiplie aussi le volume par huit).
- Mettre en évidence l'effet d'un agrandissement sur les volumes.
- Réinvestir le travail sur la notion de conservation de la forme lors d'un agrandissement.
- Réinvestir le travail sur les patrons.

Matériel
- Feuilles de papier quadrillé (5 mm × 5 mm) de préférence (pour faciliter les tracés lors de la construction des patrons), en quantité suffisante (pour permettre aux élèves de se tromper autant de fois que nécessaire).
- Instruments de géométrie.
- Ciseaux, éventuellement du ruban adhésif.

Déroulement et analyse de l'expérimentation

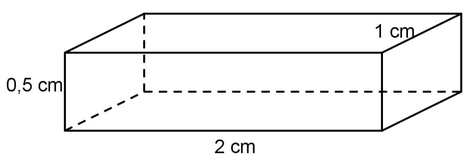
Scénario

Une séance

- Construction du premier patron : travail individuel (5 à 10 min).
- Construction d'un patron d'une boîte de volume huit fois plus grand : travail en binômes ou en groupes de trois ou quatre (20 min).
- Débat, synthèse collective et institutionnalisation (15 à 20 min).

Description et analyse

Une séance devrait suffire. Mais lors de l'expérimentation, une des classes test a montré de telles difficultés pour la construction des patrons qu'il a fallu poursuivre le travail lors d'une deuxième séance.
Dans un premier temps, le professeur projette la représentation en perspective d'une boîte.



La consigne suivante est alors donnée à l'oral.

Consigne 1
Le dessin projeté est celui d'un parallélépipède rectangle.
Il représente une boîte sans couvercle remplie à ras bord de farine.
Construire et découper un patron de cette boîte.

Les élèves cherchent individuellement. Il est important que l'enseignant puisse s'assurer que chacun d'eux sait construire un patron de parallélépipède rectangle de dimensions données. Plusieurs boîtes identiques sont construites dans la classe, elles sont utiles pour répondre à la deuxième consigne.

Consigne 2
Construire un patron d'une boîte dont la forme est un parallélépipède rectangle, sans couvercle, qui contient huit fois plus de farine. Vous travaillerez en groupes.

L'erreur attendue, multiplier toutes les dimensions par huit, doit pouvoir être observée, avec une construction sur une feuille A4.
Les dimensions et le fait de ne pas mettre de couvercle sont choisis dans ce but.

Le professeur met à disposition des élèves suffisamment de feuilles de papier : ils doivent pouvoir recommencer leur travail s'ils considèrent qu'ils ont commis une erreur.
Il faut souligner que ni le mot « volume », ni le mot « agrandissement » ne sont utilisés dans cette consigne.

En général, tous les élèves commencent par multiplier les trois dimensions par huit. Cette solution est invalidée par la manipulation des premières boîtes construites.
Cette manipulation leur permet de se corriger et de trouver d'autres propositions :
- celles qui répondent au problème mais ne relèvent pas d'un agrandissement (lorsqu'ils multiplient une seule dimension par 8 (voir production 2),
- celles qui relèvent d'un agrandissement (lorsque toutes les dimensions sont multipliées par 2).

Lorsque tous les groupes ont terminé, le professeur organise un débat dans la classe.
Il donne un statut particulier à la procédure qui consiste à multiplier toutes les dimensions par deux ; cette procédure est soulignée comme relevant d'une situation illustrant un agrandissement mathématique.
Il saisit l'occasion pour mettre en évidence l'effet d'un agrandissement mathématique sur les aires, en utilisant les travaux des élèves pour montrer que l'aire de la base de la boîte a été multipliée par quatre.

L'enseignant propose une trace écrite faisant la synthèse de ce travail. Elle peut prendre la forme suivante :

Dans le cas d'un agrandissement mathématique, si les longueurs sont multipliées par 2, alors les aires sont multipliées par 2^2 et les volumes sont multipliés par $2 \times 2 \times 2$ soit 2^3, c'est-à-dire 8.

Par la suite, l'enseignant peut généraliser cette propriété et proposer la trace écrite suivante :

Dans le cas d'un agrandissement ou d'une réduction mathématique, si les longueurs sont multipliées par k, nombre strictement positif, alors les aires sont multipliées par k^2 et les volumes sont multipliés par $k \times k \times k$ soit k^3.

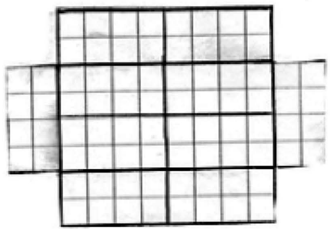
Quelques exemples de productions d'élèves

Production 1

Les élèves ont manipulé les solides de la consigne 1 pour construire un solide huit fois plus grand et en ont déduit ses dimensions.

En premier temps, nous avons multiplié toutes les longueurs par 8, mais nous nous sommes rendu compte que cela ne fonctionnait pas.

En seconde temps, on a mis 4 parallépipèdes cote à cote et superposé 4 autres parallépipèdis pour former le parallépipède 8 fois plus grand.



Production 2

La consigne est respectée (la boîte finale a un volume huit fois plus grand) mais ce n'est pas un exemple d'agrandissement mathématique.

L'enseignant pourra utiliser ce type de production lors du débat pour faire émerger les spécificités d'un agrandissement mathématique (au sens de la similitude).

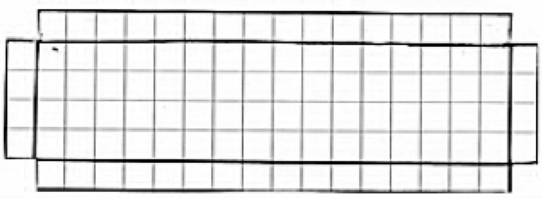
I° Erreur

Dans un premier temps, on a multiplié le patron initial par 8 que ce soit la longueur, la largeur ou la hauteur, or la consigne exigeait qu'il est 8 fois plus de riz et non 8 fois une plus grande boite. Certes on a multiplié notre patron par 8 mais on n'a pas tenu compte de la consigne. La conséquence fut que notre patron était complètement faux.

II° Résolution

Ensuite on a juste multiplié la base de notre patron dans le but de respecter la consigne. Après calcul, on a trouvé qu'il fallait obtenir 16 cm².

Une fois le patron construit, on a vérifié et on avait juste.



Production 3

Les élèves ont procédé par essais-erreurs numériques, en présentant leur démarche.

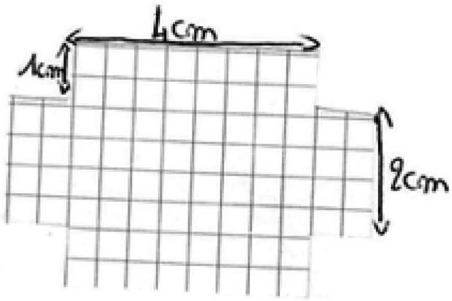
1ère étape : 2cm X8 = 16cm
1cm X 8 = 8 cm
0,5cm X 8 = 4 cm

Ça ce fonctionner pas.

3ème étape

2ème étape : - 2 cm X4 = 8 / 8 ÷ 2 = 4 cm
- 1cm X4 = 4 / 4 ÷ 2 = 2 cm
- 0,5cm X4 = 2 / 2 ÷ 2 = 1cm

La 1ère étape ne fonctionner pas du coup nous avons pris la moitié de 8 ~~ensuite la moitier de~~ 4 qui est la 2ème étape qui ne fonctionner pas donc nous avons diviser 4 ce qui nous donne la 3ème étape et qui fonctionne.



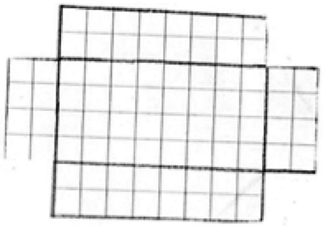
Production 4

Malgré la confusion de vocabulaire (aire / volume), les élèves ont raisonné en utilisant correctement la formule du volume d'un parallélépipède rectangle.

Leur démarche se situe dans le domaine du numérique, y compris la phase de validation.

L'enseignant pourra utiliser ce type de production lors du débat pour repréciser le vocabulaire des grandeurs mises en jeu (longueur / aire / volume).

on à tracer le 1ER patron, on à calculer son aire : 0,5 x 1x2 = 1cm³
on à multiplier ce résultat par 8 ce qui nous à donner 8cm³.
on à ensuite chercher des solutions pour faire 8 cm3, et nous
somme tombé sur 1 x 2 x 4, et donc nous avons tracer le patron



Production 4 bis

Comme dans la production précédente, les élèves raisonnent en utilisant la formule du volume du parallélépipède rectangle.

Leur démarche se situe cette fois dans le domaine géométrique en travaillant sur les longueurs ; la validation relève d'une démarche expérimentale.

2- 1ère Hypothèse :

On multiplie les longueurs par 8.

0,5 cm × 8 = 4 cm
2 cm × 8 = 16 cm
1 cm × 8 = 8 cm

Ce parallélépipède est trop grand, il peut contenir plus de 8 fois plus de riz. Celle-ci est donc fausse.

2ème Hypothèse :

On doit contenir huit fois le volume de la première boîte.
On multiplie donc le volume du premier parallélépipède.
Il est de 1 cm³ donc on le multiplie et on obtient 8 cm³.

On a remarqué qu'il fallait multiplier les longueurs par 2 pour avoir ce volume :

2 cm × 2 = 4 cm
0,5 cm × 2 = 1 cm
1 cm × 2 = 2 cm

Ce parallélépipède peut contenir 8 petits parallélépipèdes donc 8 fois plus de riz.