Agrandir ou réduire des quadrilatères
Proposition 1 : Famille de quadrilatères

Auteurs : Maëlle JOURAN (IREM de Rouen) – Béatrice LEGOUPIL (IREM de Grenoble)

Niveau : Cycle 4 [4e – 3e].

Présentation

Cette activité propose d'introduire la notion d'agrandissement-réduction par la reconnaissance d'agrandissements de quadrilatères. Elle permet de faire émerger les conceptions des élèves et de mettre en défaut celles qui sont erronées. La mise en commun aboutit à une institutionnalisation introduisant le cours sur « agrandissement-réduction ». Un prolongement est proposé en fin d'article.

Il est aussi possible d'introduire la notion d'agrandissement-réduction par une activité de construction d'un agrandissement ou d'une réduction d'une figure comme dans la proposition 2 « rectangle, losange, trapèze » de cet article.

Cette activité peut aussi se faire en réinvestissement. Elle permet alors une mise au point des connaissances des élèves sur la notion d'agrandissement.

Prérequis

Aucune connaissance nouvelle du cycle 4. Les notions utilisées sont la proportionnalité, les angles, la nature des quadrilatères.

Objectifs principaux

- Faire émerger les conceptions erronées des élèves sur la notion d'agrandissement et les invalider.
- Faire émerger que :
  - l'agrandissement « ne déforme pas », il conserve la forme,
  - l'agrandissement conserve les angles,
  - les longueurs du quadrilatère agrandi sont proportionnelles à celles du quadrilatère de départ.
- Reconnaître un agrandissement d'un quadrilatère.

Matériel

- Matériel de géométrie
- Calculatrice
- À télécharger : dossier : « famille_de_quadrilateres »
  monument_valley_a_projeter (pdf, docx, odt)
  fiche-eleve1-quadrilatères1 et *fiche-eleve2-quadrilatères1* (doc et pdf)
- Matériel facultatif : papier calque, ciseaux

Déroulement et analyse de l'expérimentation

Scénario

L'activité nécessite deux séances.

Le déroulement de l'activité est expliqué aux élèves.

Première séance

- Phase individuelle (environ 25 minutes)

Distribution de la « fiche élève n°1 ».

Appropriation du problème avec interdiction de poser des questions pendant cinq minutes.

Au bout des cinq minutes : point sur les questions des élèves et projection de photos pour illustrer ce qu'est ou non un agrandissement d'une photo donnée.

Poursuite de la recherche individuelle : les élèves ont à déterminer les agrandissements des figures données, par les méthodes de leur choix.

- Phase en binômes ou en groupes :

Distribution de la « fiche élève n°2 ».

Les élèves, par groupe, comparent leurs réponses et échangent sur les procédures utilisées. Ils se mettent d'accord sur une réponse commune, écrivent les arguments qui explicitent cette réponse sur la « fiche élève n°2 », ramassée à la fin de la première séance avec la « fiche élève n°1 » de chaque élève du groupe.

Deuxième séance

- Mise en commun en classe entière des réponses et des procédures utilisées avec débat de classe (environ 20 minutes).

L'enseignant peut préciser qu'à la lecture des productions des élèves de la séance précédente, il a constaté qu'il y avait des réponses différentes. L'objectif de cette deuxième séance est donc de se mettre d'accord sur les quadrilatères qui semblent être des agrandissements des quadrilatères donnés et sur les arguments qui permettent de le penser.

Il peut être intéressant de faire passer à l'oral différents groupes, dans un ordre prédéfini par l'enseignant, en prenant garde d'aller de la production la moins riche à celle la plus riche. Chaque groupe donne sa réponse en exposant sa procédure.

Ces échanges doivent permettre au final de mettre en défaut les conceptions erronées concernant la notion d'agrandissement, d'invalider les procédures incorrectes et de mettre en avant une ou des procédures correctes.

- Rédaction d'une réponse commune (environ 10 minutes).

Un bilan de l'activité est élaboré en classe entière et est noté dans le cahier de leçons par exemple.

- Institutionnalisation (environ 10 minutes).

Elle généralise le bilan de l'activité et est écrite dans le cahier de leçons.

Description et analyse

Voici des exemples de questions posées par les élèves au bout des cinq premières minutes de la phase individuelle.

- « Peut-on mesurer ? Est-ce qu'on peut écrire sur l'énoncé ? Est-ce qu'on peut tracer ? Est-ce qu'on peut découper ? Est-ce qu'on peut décalquer ? ».
- « Est-ce qu'on a le droit de retourner la figure ? »
- « Est-ce grave s'il y a un degré d'écart ? »
- « Combien doit-on donner d'arguments ? »
- « Comment calcule-t-on l'aire des figures ? »
- « Qu'est-ce qu'un agrandissement ? »

L'enseignant peut préciser aux élèves qu'ils ont le droit de faire ce qu'ils veulent sans utiliser le manuel de mathématiques. Il les encourage à prendre des initiatives et à faire des choix concernant leurs interrogations. Il peut noter au tableau certaines questions auxquelles la classe répond pour lever des obstacles techniques. À ce moment-là, les questions concernant l'agrandissement/réduction d'une figure ne doivent pas être encore débattues. Leur prise en charge est présentée ci-dessous.

Émergence des représentations des élèves sur ce qu'ils pensent être un agrandissement.

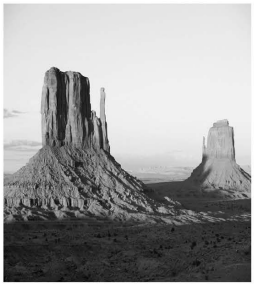
La question « Qu'est-ce qu'un agrandissement ? » nécessite de prendre un temps avec la classe pour y répondre. Dans le langage courant, le terme agrandir est souvent utilisé pour augmenter soit une dimension, une surface ou un espace lorsqu'on parle par exemple « d'agrandir sa maison ». Pour certains élèves : « une figure agrandie, c'est quand on ajoute le même nombre à chaque côté ».

Pour répondre à la question « Qu'est-ce qu'un agrandissement ? », l'enseignant peut vidéoprojeter des photos agrandies ou non d'une photo donnée avec la consigne suivante : *Parmi les photos suivantes, laquelle est un agrandissement de la photo originale ?* L'objectif n'est pas de définir ce qu'est un agrandissement mais que l'élève ait la possibilité de se rendre compte qu'un agrandissement conserve les formes.

C'est la photo en haut de la page de droite qui est un agrandissement de la photo originale.

Photo originale :

Parmi les photos suivantes, quel est l'agrandissement de la photo originale ?



Quelques réactions d'élèves à ce qui est projeté.
« Un agrandissement, c'est quand on modifie la taille mais pas la forme. »
« Quand on agrandit, on a les mêmes proportions ».
« C'est pareil en plus petit ou en plus grand ».
« Quand c'est déformé, ce n'est pas un agrandissement ».
« Pour avoir l'agrandissement d'une photo, on tire sur les coins mais pas sur les côtés ».

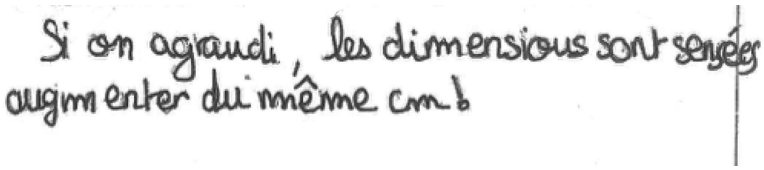
Il est intéressant de poursuivre l'échange avec la classe avec une photo qu'on déforme, qu'on agrandit ou qu'on réduit à l'aide d'un vidéoprojecteur.

Productions d'élèves concernant la deuxième partie du travail (réponses aux questions posées dans les fiches élèves 1 et 2)
La réponse attendue est : « l'agrandissement du quadrilatère A est le quadrilatère D et l'agrandissement du quadrilatère B est le quadrilatère F ».

Que ce soit en quatrième ou en troisième, des procédures identiques émergent.

- **« Pour avoir un agrandissement, il faut ajouter une même longueur à chacun des côtés du quadrilatère »**.

Quelques élèves répondent : *il n'y a aucun agrandissement de A et de B*.

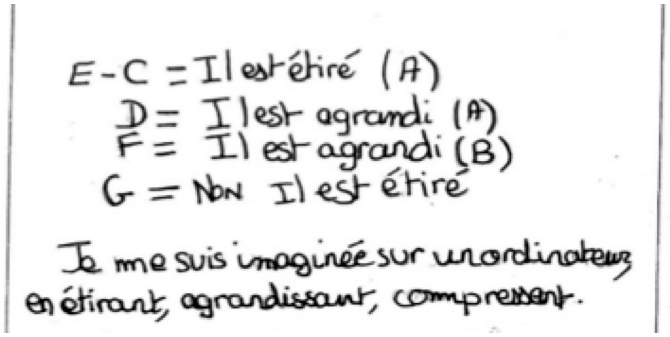


- **« Tous les parallélogrammes sont des agrandissements les uns des autres, de même pour les cerfs-volants. »**

Certains élèves regroupent les quadrilatères selon leur nature. Ils donnent alors la réponse suivante : « les agrandissements du quadrilatère A semblent être les quadrilatères C, D et G et les agrandissements du quadrilatère B semblent être les quadrilatères E et F ».

- **« À vue d'œil »**

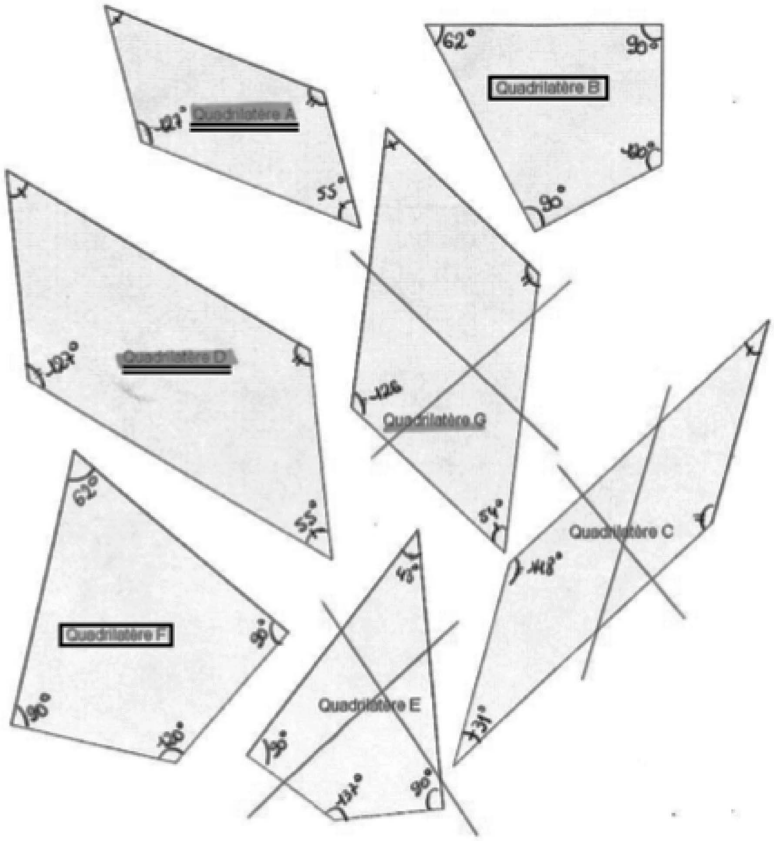
Des élèves déterminent à vue d'œil les agrandissements avec plus ou moins de réussite.



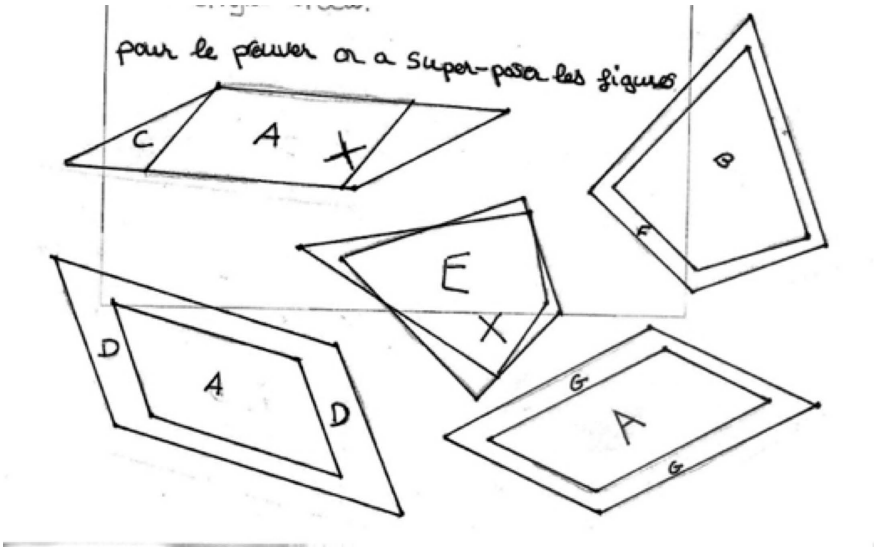
- **« Repérer des angles égaux pour déterminer les agrandissements »**

De nombreux élèves mesurent les angles des quadrilatères et considèrent uniquement la conservation des angles dans un agrandissement.
Ils donnent alors la réponse suivante : « les agrandissements du quadrilatère A semblent être les quadrilatères D et G et l'agrandissement du quadrilatère B semble être le quadrilatère F ».

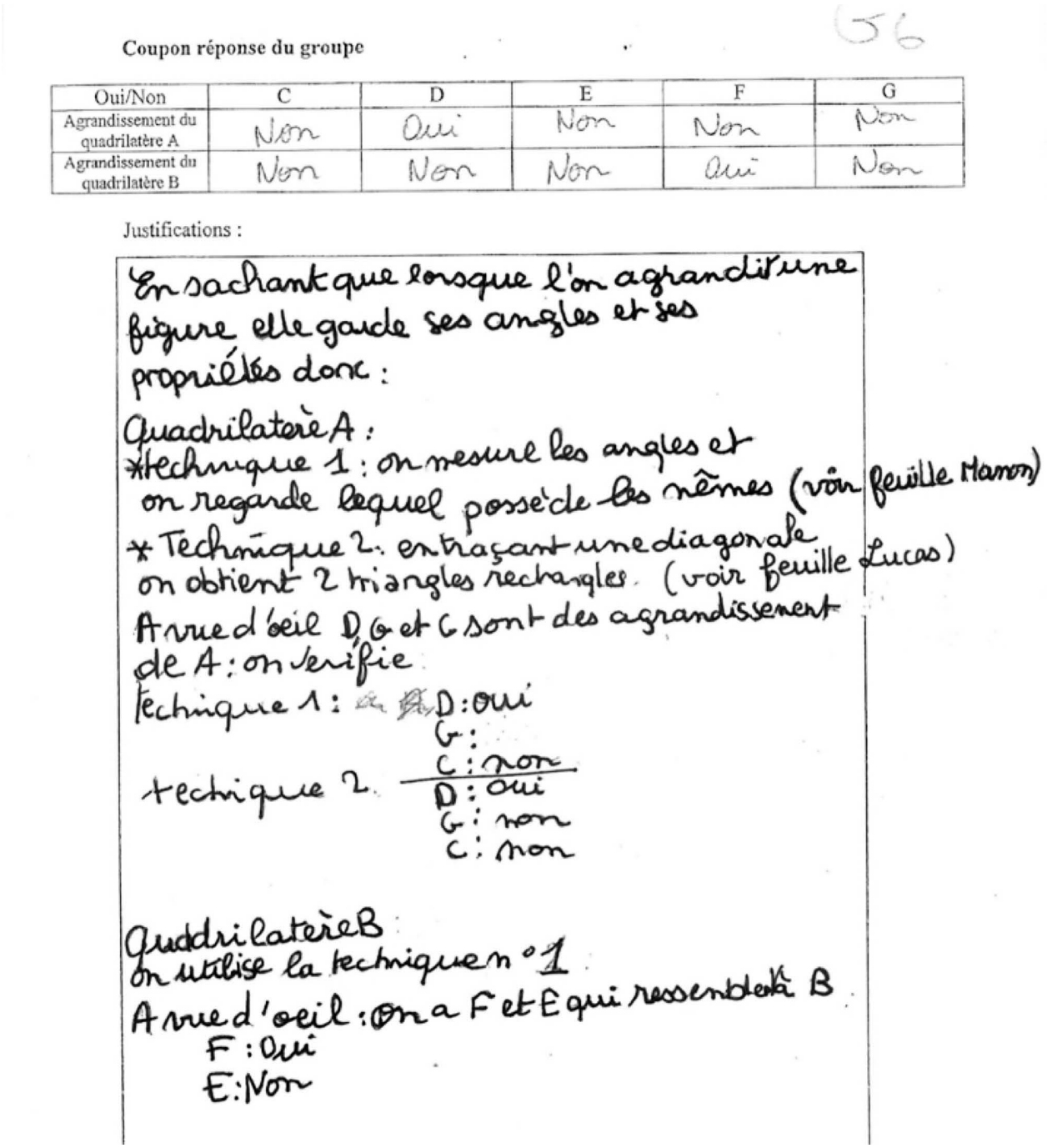
Dans la production ci-contre, le problème de l'imprécision de la mesure est posé. Des élèves pensent qu'un degré d'écart est suffisant pour dire que ce n'est pas un agrandissement. D'où l'importance de mettre dans la consigne « semblent être des agrandissements ».



Par découpage ou en utilisant du papier calque, quelques élèves superposent les quadrilatères pour repérer les angles égaux :



Des élèves comparent non seulement les angles des quadrilatères mais aussi les angles formés par les diagonales et les côtés.



Coupon réponse du groupe 56

Oui/Non	C	D	E	F	G
Agrandissement du quadrilatère A	Non	Oui	Non	Non	Non
Agrandissement du quadrilatère B	Non	Non	Non	Oui	Non

Justifications :

En sachant que lorsque l'on agrandit une figure elle garde ses angles et ses propriétés donc :

Quadrilatère A :
*Technique 1 : on mesure les angles et on regarde lequel possède les mêmes (voir feuille Manon)
* Technique 2 : en traçant une diagonale on obtient 2 triangles rectangles. (voir feuille Lucas)
A vue d'oeil D, G et C sont des agrandissement de A : on vérifie
Technique 1 : D : oui
G :
C : non
Technique 2. D : oui
G : non
C : non

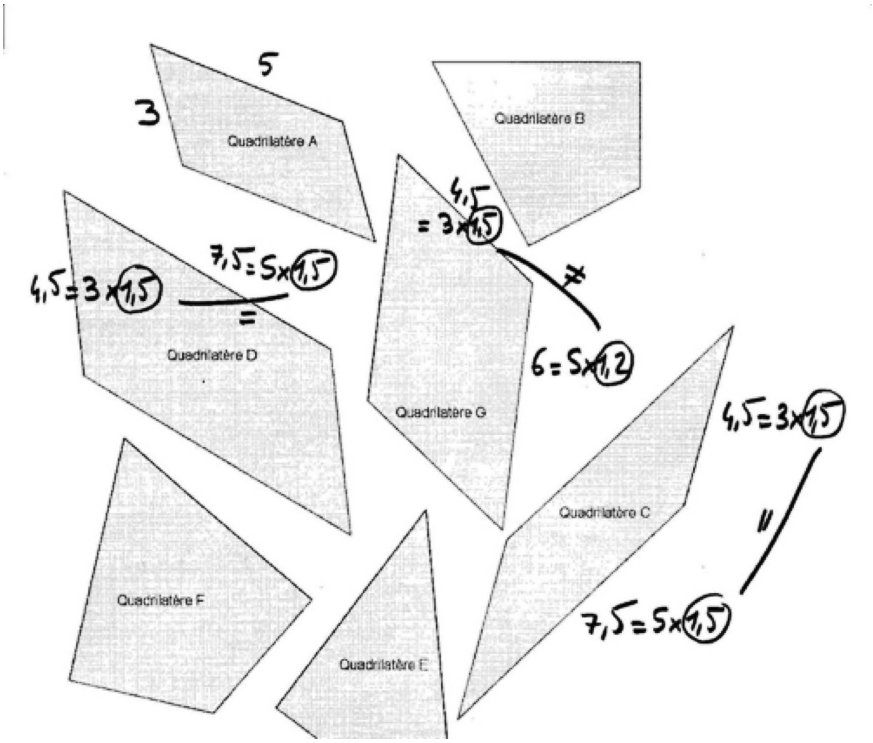
Quadrilatère B
On utilise la technique n°1
A vue d'oeil : On a F et E qui ressemble à B
F : Oui
E : Non

Ils donnent alors la réponse suivante : « l'agrandissement du quadrilatère A semble être le quadrilatère D et l'agrandissement du quadrilatère B semble être le quadrilatère F ».

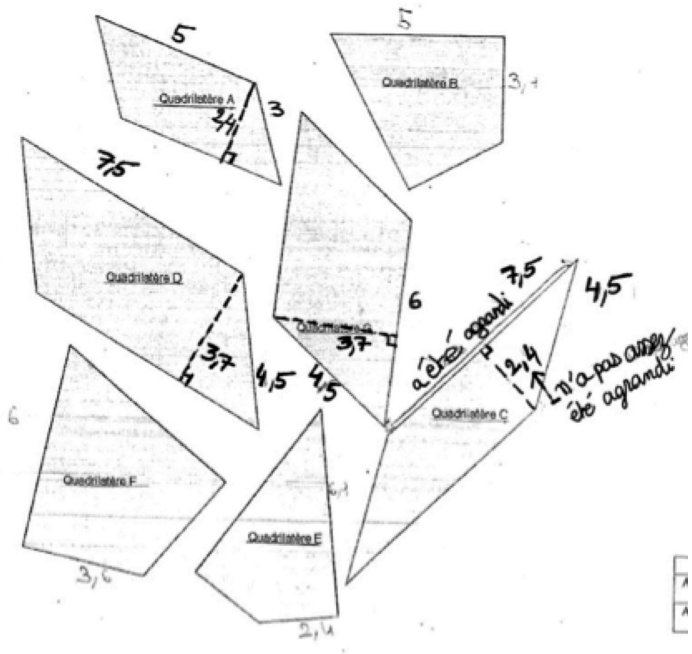
- **« Utiliser la proportionnalité des longueurs des côtés pour déterminer des agrandissements »**

Des élèves mesurent les côtés et déterminent les quadrilatères dont les longueurs des côtés sont proportionnelles à celles du quadrilatère initial.

Ils donnent alors la réponse suivante : « les agrandissements du quadrilatère A semblent être les quadrilatères C et D et l'agrandissement du quadrilatère B semble être le quadrilatère F ».



- Des élèves mesurent des longueurs des côtés et la hauteur des parallélogrammes. Ils prennent en compte des longueurs caractéristiques du quadrilatère.

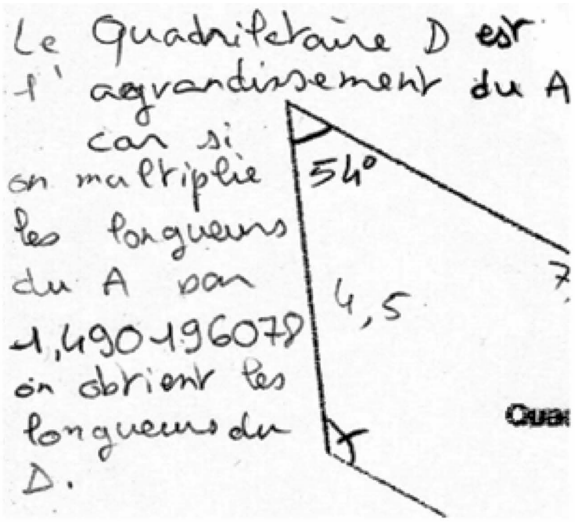


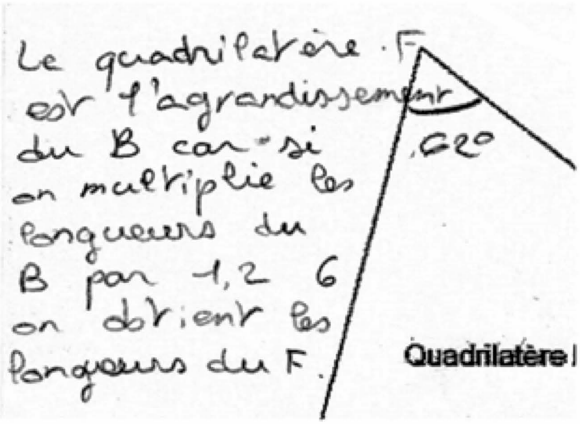
- **Conservation des angles et proportionnalité des longueurs des côtés »**

Peu d'élèves utilisent cette procédure. Ils donnent la réponse suivante :

L'agrandissement du quadrilatère A semble être le quadrilatère D.

L'agrandissement du quadrilatère B semble être le quadrilatère F





Mise en commun

L'enseignant peut mettre en avant les différentes réponses des groupes et la nécessité de se mettre d'accord.

Ce qui émerge en premier est le classement des quadrilatères en deux familles de même nature.

L'enseignant peut proposer de regrouper les mesures utilisées par les élèves dans un tableau.

Les tableaux ci-dessous contiennent les mesures des longueurs de leurs côtés et les mesures des angles des quadrilatères. C'est l'occasion de rappeler que la somme des angles dans un quadrilatère est de 360°.

Le problème de l'imprécision des mesures est abordé en classe entière. Un retour à la consigne permet de préciser à nouveau qu'il faut trouver les quadrilatères qui semblent être des agrandissements de A et B. Il est possible de rajouter, en fonction des procédures utilisées, plusieurs colonnes pour la longueur d'une diagonale, la longueur d'une hauteur, la mesure d'un angle formé par les diagonales ou la mesure d'un angle formé par un côté et une diagonale, etc.

Quadrilatère A

A	5 cm	3 cm	126°	54°
D	7,5 cm	4,5 cm	126°	54°
C	7,5 cm	4,5 cm	150°	30°
G	6 cm	4,5 cm	126°	54°

Quadrilatère B

B	5 cm	3 cm	90°	118°	62°
F	6 cm	3,6 cm	90°	118°	62°
E	6 cm	2,3 cm	90°	138°	42°

« Pour conserver les formes, il faut conserver les angles ». Les élèves se mettent d'accord pour éliminer les quadrilatères C et E.
Des élèves proposent d'éliminer le quadrilatère G car les longueurs des côtés de ce quadrilatère ne sont pas proportionnelles aux longueurs des côtés du quadrilatère A.
(6 cm : 5 cm = 1,2 et 4,5 cm : 3 cm = 1,5).
Les élèves vérifient la proportionnalité des longueurs des côtés des quadrilatères A et D d'une part et des quadrilatères F et B d'autre part.
(7,5 cm : 5 cm = 1,5 et 4,5 cm : 3 cm = 1,5 ; 6 cm : 5 cm = 1,2 et 3,6 cm : 3 cm = 1,2).
Le lien est fait alors entre le coefficient de proportionnalité et l'échelle de l'agrandissement.

Bilan possible de l'activité

L'agrandissement de A semble être le quadrilatère D à l'échelle 1,5.

L'agrandissement de B semble être le quadrilatère F à l'échelle 1,2.

Dans ces quadrilatères, les angles sont conservés et les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.

Il ne suffit pas de vérifier la conservation des angles des quadrilatères pour avoir un agrandissement.

Il ne suffit pas de vérifier la proportionnalité des longueurs des côtés des quadrilatères pour avoir un agrandissement.

Dans certaines classes, les élèves mesurent des diagonales, des hauteurs ou des angles formés par les diagonales et les côtés ou entre les diagonales.
C'est l'occasion de remarquer que :

- si les longueurs des côtés et d'une diagonale d'un quadrilatère sont proportionnelles à celles d'un autre quadrilatère alors le premier est un agrandissement (ou une réduction) du deuxième,
- si, dans deux quadrilatères, il y a conservation de leurs angles et d'un angle formé par un côté et une diagonale alors l'un est un agrandissement de l'autre.

Institutionnalisation possible

Dans un agrandissement ou une réduction d'un polygone :

- les mesures des angles sont conservées.
- **toutes** les longueurs de la figure agrandie ou réduite sont proportionnelles aux longueurs de la figure initiale (les côtés et les diagonales).

Le nombre k par lequel on multiplie les longueurs de la figure initiale pour obtenir la figure agrandie ou réduite est appelé **coefficient d'agrandissement ou de réduction** ou **échelle**.

Si $k > 1$, il s'agit d'un agrandissement.

Si $0 < k < 1$, il s'agit d'une réduction.

Si $k = 1$, c'est une reproduction à l'identique.

Prolongements possibles

- Construction d'agrandissement ou de réduction

L'enseignant peut ensuite proposer un exercice de construction d'un agrandissement ou d'une réduction. Par exemple :

> ABC est un triangle défini par AB = 6 cm, $\hat{A} = 50°$ et $\hat{B} = 50°$
> Construis le triangle ABC.
> Construire un agrandissement du triangle ABC à l'échelle 1,5.

Il peut également proposer l'activité présentée dans l'article qui suit « Rectangle, losange, trapèze », en classe ou à la maison.

- Calcul réfléchi

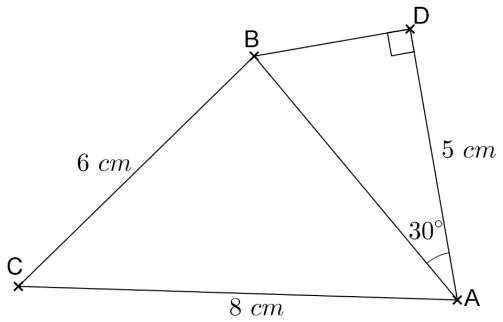
Un retour régulier sur cette notion peut être intéressant par le biais du calcul réfléchi. L'enseignant peut demander aux élèves :

- de reconnaître un agrandissement ou une réduction,
- de déterminer l'échelle d'un agrandissement ou d'une réduction à partir de deux figures données,
- de donner les mesures des angles et des longueurs dans un agrandissement ou une réduction d'une figure donnée.

Il est possible d'utiliser par exemple la brochure de l'IREM de Clermont-Ferrand publiée en coédition avec l'APMEP : « Activités mentales et automatismes au collège ». Elle propose de reconnaître si une figure est une réduction d'une autre figure et, si c'est le cas, de déterminer le coefficient de réduction.

Pour le dernier point, l'enseignant peut proposer le type d'exercice suivant.

On considère la figure suivante :



Dans un agrandissement de rapport 3 de cette figure, quelles sont les mesures des cinq segments de la figure agrandie ?

Dans une réduction de rapport 0,7 de cette figure, quelles sont les mesures des cinq segments de la figure réduite ?

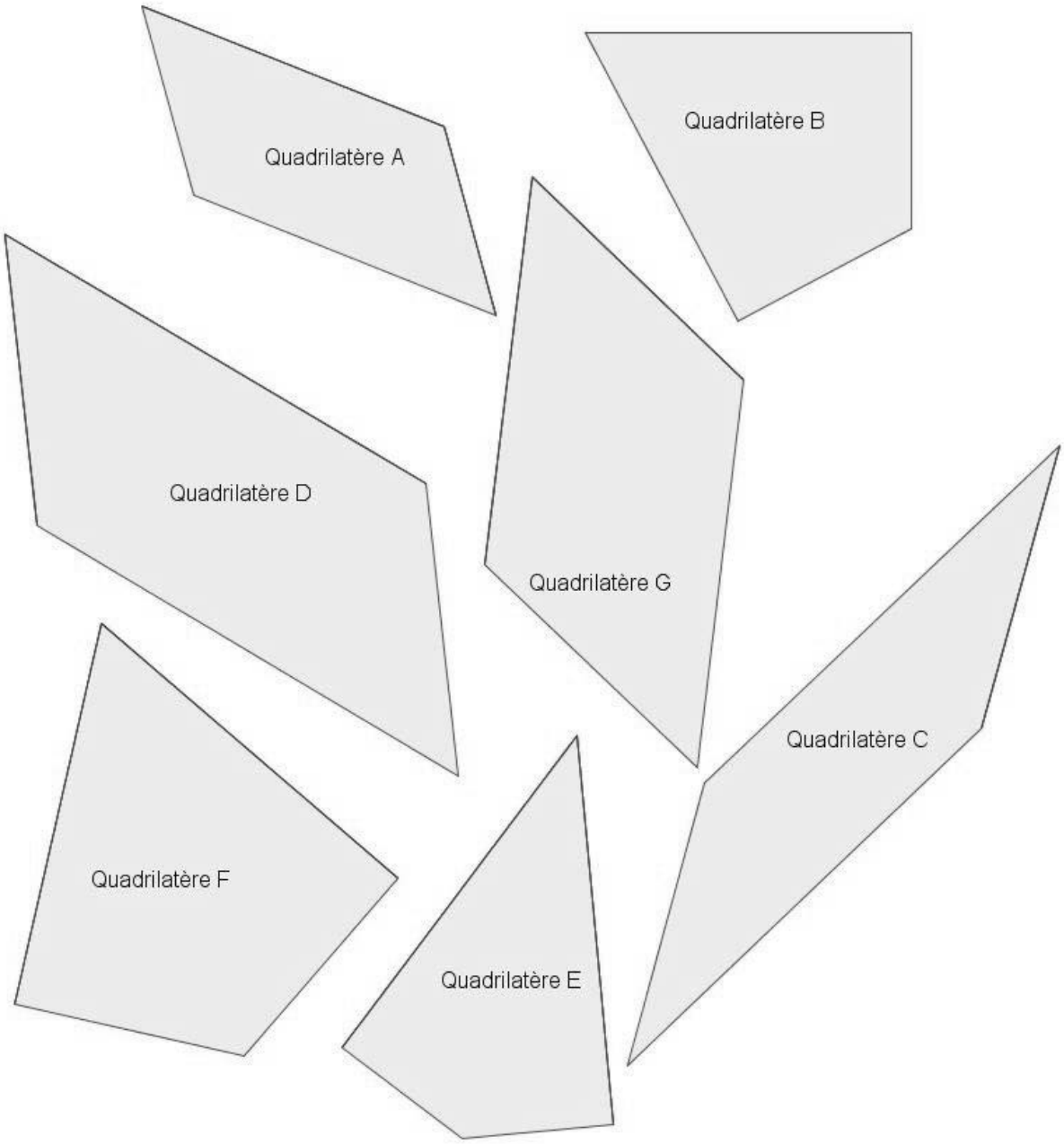
Fiche élève n°1

Agrandir ou réduire des quadrilatères
Famille de quadrilatères

Consigne

Quels sont les quadrilatères qui semblent être des agrandissements du quadrilatère A et du quadrilatère B ?

Quels sont les arguments qui vous le font penser ? Rédigez-les.



Oui/Non	C	D	E	F	G
Agrandissement du quadrilatère A					
Agrandissement du quadrilatère B					

Fiche élève n° 2

Agrandir ou réduire des quadrilatères
Famille de quadrilatères

Coupon réponse du groupe

Oui/Non	C	D	E	F	G
Agrandissement du quadrilatère A					
Agrandissement du quadrilatère B					

Arguments