En cinquième : *Des déplacements pour introduire les nombres relatifs*

Christian JUDAS et Georges PONS – IREM des Pays de la Loire
D'après une idée de Martine JANVIER

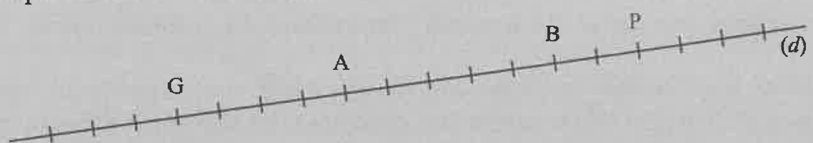
Parmi les différentes introductions possibles pour les nombres relatifs, bilans de gains et de pertes, ascenseur, chronologie, opérations à trou, etc., l'utilisation de déplacements sur la droite graduée nous a semblé particulièrement intéressante puisque cela permet en même temps d'introduire les nombres relatifs et de les faire vivre tout de suite avec l'introduction de l'addition à partir de deux déplacements successifs.
Nous avons expérimenté une introduction utilisant la composition des déplacements. La première expérimentation de cette activité, décrite ci-dessous, nous a amené à prolonger notre réflexion et à la modifier de façon importante.

Premières expérimentations

Deux expérimentations de cette activité ont eu lieu dans deux classes de deux collèges, avec des déroulements un peu différents.

Introduction des entiers relatifs

Un déplacement sur une droite



Complète le tableau et place les points manquants sur la droite selon les indications suivantes :

Déplacement de...	A à B	A à G	à B	A à P	P à G	B à S	F à A	S à P	F à F	A à S	G à P	à	à	B à F
Codage correspondant	+5	-4				-4	-4					+4	-3	

Note comment tu as procédé et écris toutes tes remarques.

Dans les deux classes, les élèves ont démarré rapidement et trouvé facile le travail demandé. Leurs productions individuelles ont été ramassées pour analyse.
Sur les deux classes :

- 12 élèves placent F en G (quelquefois légèrement à côté pour que les deux points ne soient pas confondus...) et ne peuvent donc pas trouver de déplacement de codage -3;
- 3 ou 4 autres font des erreurs marginales.

Concernant leurs méthodes, la plupart font des remarques sur la façon de se déplacer sur la droite graduée :

- la majorité en faisant référence à la droite ou à la gauche, d'autres à la montée ou la descente, à l'avant ou l'après;
- une référence au point de départ;
- quelques références au nombre de segments ou de « traits ».

Dans une des classes, des travaux rapides en groupes de quatre ont permis de corriger ***toutes*** les erreurs, il n'y avait donc pas matière à faire présenter les travaux de groupes pour en débattre. Deux travaux de groupes ont été retroprojetés pour montrer qu'il y avait trois solutions pour l'antépénultième colonne et pour trouver toutes les solutions de la pénultième colonne.
Dans l'autre classe, le professeur n'a pas jugé utile de faire des travaux de groupes.
Dans les deux cas, la synthèse a facilement pu se faire en classe entière sur les objectifs prévus :

- mettre en place la convention sens positif/sens négatif;
- remarquer à quoi correspondent deux nombres opposés et de donner l'expression;
- remarquer qu'à un même codage peuvent correspondre plusieurs déplacements.

On ne désigne pas encore ces nombres comme étant des nombres relatifs.

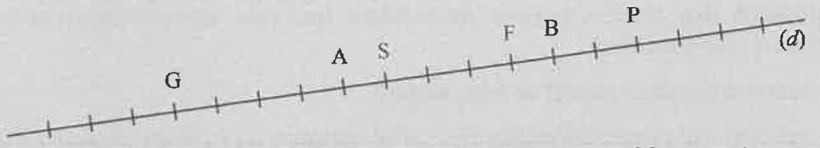
La facilité avec laquelle les élèves ont réussi cette première partie de l'activé nous a posé question. Nous savons par expérience les difficultés qui surgissent lorsqu'on introduit la soustraction : certains élèves semblent alors perdre tout ce qu'ils ont « appris » sur l'addition. L'introduction des nombres relatifs marque une vrai rupture dans l'apprentissage (« soustraire, c'est additionner ! »). Mais différer la prise de conscience des ruptures, et l'affrontement aux difficultés, nous semble de nature à les aggraver.
Le choix d'introduction fait dans cette première activité s'appuie au maximum sur les connaissances préalables des élèves. Pour composer -2 et -3, $+7$ et $+12$, -3 et $+5$, ils n'ont besoin de rien découvrir de nouveau. Dans les deux premiers cas, il faut une addition de naturels et dans le second cas une soustraction. La seule nouveauté, composer 2 et -7, est facilement résolue

dans un contexte concret. En effet, dans cette activité, les déplacements sur la droite pourraient être remplacés par n'importe quelles variations (ascenseur, température, etc.).Ce qui est spécifique à la droite graduée c'est-à-dire la présence d'un point origine et d'une unité, ce qui entraîne que les nombres y ont deux statuts (repère, variation ou déplacement), n'est pas présent dans cette première activité. Finalement, on a introduit un codage nouveau sans toucher au sens de l'addition, sans pointer le rôle de 0.
Cette première étape est-elle vraiment utile ? Il nous a semblé que non, d'où la nouvelle version de cette activité.

Des déplacements pour introduire les nombres relatifs

Première séance

I - Déplacement sur une droite



Utilise la droite graduée ci-dessus pour compléter le tableau, soit par les noms des points, soit par les codages correspondants (Co).

		Co		Co		Co		Co		Co		Co
Le déplacement...	de A à B	+5	de G à A		de ... à ...		de A à F		de ... à ...	−4	de ... à ...	−4
suivi du déplacement...	de B à P		de ... à ...		de S à G	−5	de ... à ...	+3	de G à P		de ... à ...	+5
c'est le déplacement...	de ... à ...		de G à P		de P à G		de ... à ...		de ... à ...	+7	de ... à ...	

Deux ou trois minutes après la distribution de la feuille, le professeur s'assure que la consigne est comprise, ainsi que la façon dont se lit le tableau. Les élèves continuent en travail individuel pour un temps à apprécier.
Il y a sans doute matière à un travail en groupes. Le professeur ramasse donc les feuilles pour les étudier et préparer ainsi la séance suivante, en constituant des groupes en fonction du contenu des productions des élèves.

Deuxième séance

Pour gagner du temps, le professeur a photocopié des tableaux sur des feuilles A3 (une par groupe).

Pour le travail en groupes, le professeur rend les feuilles individuelles et donne les consignes suivantes :

> Dans chaque groupe :
>
> - vous vous mettez d'accord sur le tableau,
> - vous écrivez comment vous avez procédé pour le faire,
> - vous écrivez toutes vos remarques.
>
> Tout cela est à faire sur une affiche sur laquelle vous collerez le tableau à compléter que je vous ai distribué sur une feuille A3.
>
> Quand ce sera fini et que toutes les affiches seront exposées, je désignerai l'un d'entre vous qui aura à répondre si d'autres élèves ont des questions à poser ou des remarques à faire sur votre affiche.

L'exposition des affiches permet de corriger quelques erreurs éventuelles et d'arriver à une synthèse :

- convention sens positif et sens négatif ;
- constat qu'un même codage peut correspondre à plusieurs déplacements ;
- désigner ces nombres comme des nombres relatifs ;
- établir que le signe + n'est pas nécessaire pour les nombres positifs, ceux-ci étant assimilés aux nombres naturels.

Certains groupes (4 sur les 12 groupes de deux classes lors d'une expérimentation) remarquent qu'il est possible de faire des additions ou des soustractions pour trouver le codage de la dernière ligne, sans indiquer cependant comment ils déterminent le signe.

Voici quelques remarques effectuées par les élèves sur les affiches.

La première lettre de la ligne "le déplæment" et la deuxième lettre de la ligne "suivi du déplacement" est égal à la ligne "c'est le déplacement". (c'est comme si on enlevait la deuxième lettre de la ligne "le déplacement" et la première lettre de la ligne "suivi du déplacement".

Pour trouver le résultat de la ligne "c'est le déplacement", il faut additionner ou soustraire les nombres de la première et de la deuxième ligne de la même colonne.

On a vus qu'en additionnant ou en faisant une soustraction avec les deux premier chiffres, on trouvai le resultat de la troisième ligne.

Ex : $5+2=7$ | $4+3=7$

$4+7=11$ | $11-4=7$

$6+5=11$ | $5-4=1$

En fonction des chiffres trouvés, nous avons put placer les lettres.

C'est l'occasion pour le professeur de partir de ces remarques pour poser la question à la classe :

Par quelle opération pourrait-on représenter les deux déplacements successifs de chaque colonne ?

Les élèves travaillent individuellement, puis le professeur relève les réponses.

Certains élèves proposent de faire des additions ou des soustractions. Quand ils les écrivent, il apparaît qu'il s'agit d'additions ou de soustractions de la longueur des déplacements et non des nombres relatifs eux-mêmes.

D'autres (non redoublants !) proposent une addition, en écrivant les nombres relatifs. Cette proposition déconcerte mais elle est défendue avec comme argument : « comme ça, c'est la même opération pour toutes les colonnes ». La plupart n'écrit pas seulement l'opération demandée, mais aussi son résultat.

La synthèse permet :

- de valider l'addition pour représenter deux déplacements successifs,
- d'écrire les sommes correspondantes avec leur résultat,
- de fixer la convention des parenthèses serviront qui évitent l'ambiguïté de deux signes + et − qui se suivent.

Le but de la consigne suivante est de faire fonctionner l'addition des nombres relatifs :

Complète les égalités suivantes :

$7+(-9) = \ldots$	$-6+(-6) = \ldots$	$1+(-9)+(-1) = \ldots$
$0+(-8) = \ldots$	$-32+54 = \ldots$	$2,7+(-5,2) = \ldots$

Il n'est pas nécessaire de prévoir un travail en groupes après ce travail individuel.

Mais il est intéressant de faire le point sur les méthodes :

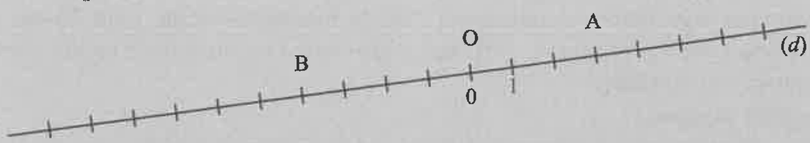
- peu d'élèves utilisent effectivement la droite graduée ;
- certains donnent des explications du genre : « On se déplace de 7 unités dans le sens positif. Pour les 9 unités dans le sens négatif, on en fait d'abord 7 qui annulent les 7 dans le sens positif puis on en fait encore 2 dans le sens négatifs donc -2. » ;
- d'autres expliquent que : « quand il y a deux déplacements en sens contraires, on regarde lequel a le plus d'unités, et c'est le signe du résultat, puis on fait la soustraction des longueurs des déplacements. » ;
- d'autres encore expliquent que : « 1 et -1, ça s'annule. ». Ils répondent ainsi à ceux qui contestent que l'ordre dans lequel se font les déplacements n'a pas d'importance, ils l'ont vérifié.

Le professeur peut alors :

- valider les méthodes énoncées pour additionner les nombres relatifs en complétant avec tous les cas ;
- en particulier, écrire : $7 + (-9) = 7 + (-7) + (-2) = -2$
  et $-32 + 54 = -32 + 32 + 22 = 22$
- définir les nombres relatifs opposés comme des nombres dont la somme est nulle.

À ce stade, aucune règle n'est écrite mais des exercices fréquents d'additions de nombres relatifs, en calcul écrit et aussi en calcul mental, seront l'occasion de les énoncer systématiquement.

II - Comparaison



On a vu en 6ème que l'abscisse est un nombre qui permet de repérer un point sur une demi-droite graduée.
On peut imaginer que cela correspond aussi au codage d'un déplacement à partir de l'origine, le point O.
Ainsi, on dira que 3 est l'abscisse de A car cela correspond à un déplacement de 3 unités dans le sens positif à partir de O.
De même, on dira que l'abscisse de B est -4 puisque cela correspond au codage d'un déplacement négatif de 4 unités à partir de l'origine O.

Complète par le symbole $>$ ou $<$ pour comparer les deux abscisses :

$-6 \ldots 1$; $2 \ldots -5$; $0 \ldots 7$; $0 \ldots -7$; $-4 \ldots -1$
$2 \ldots -2$; $-7 \ldots 7$; $-7 \ldots 0$; $-1 \ldots -10$

Écris ta méthode pour comparer deux nombres relatifs et note tes remarques.

D'après les expérimentations, les élèves font très peu d'erreur dans les comparaisons de nombres relatifs. Un travail en groupe n'est donc pas nécessaire. Les difficultés des élèves sont dans l'expression de leurs méthodes. Il est intéressant par conséquent que le professeur photocopie sur transparent quelques formulations pour les projeter à la classe, dans la mesure où elles mettent en évidence la nécessité d'une expression pour parler « du nombre sans le signe ».

Voici quelques propositions d'élèves :

Quand c'est un nombre négatif je prend le plus proche de 0 et quand c'est nombre positif je prend le plus loin de 0 et quand c'est un nombre négatif et positif je prend le nombre positif.

Les nombres relatifs avec le signe moins c'est toujours inférieur au signe plus.
Si il y a deux nombres relatifs avec le signe moins c'est toujours le plus grand nombre qui est inférieur à un nombre plus petit.
Si il y a deux nombres relatifs avec le signe plus c'est toujours le plus grand nombre qui est supérieur au plus à un nombre plus petit.

* Quand les deux nombres sont négatifs, il suffit de regarder le déplacement (le nombre d'unités passées). Le nombre avec le plus ~~d'u~~ grand déplacement est le nombre le plus petit lorsqu'ils sont tous les deux négatifs.
* Quand il s'agit d'un nombre négatif et d'un nombre positif, c'est toujours le nombre négatif le plus petit.

Pour comparé il y a plusieurs méthodes :
- Quand se sont 1 nombre positif et 1 nombre négatif, on sait déja que le nombre positif sera superieure au nombre négatif.
- Lorsqu'il y a 2 nombre negatif celui qui se rapproche le plus de 0 est le plus grand
- Lorqu'il y a 2 nombre positif celui qui se rapproche le plus de 0 est le plus petit.

Cette présentation permettra donc

- d'introduire l'expression « distance à zéro »
- de l'utiliser pour énoncer des règles de comparaison des nombres relatifs.

Pour aller plus loin...

Nous pensons que l'introduction de la soustraction des nombres relatifs doit suivre immédiatement celle de l'addition. Nous savons que, quelque soit le choix fait pour l'introduction des nombres relatifs, l'apparition de la soustraction amènera des confusions chez les élèves avec l'addition. C'est la confrontation, dès que possible, de ces deux opérations qui permettra au mieux de les différencier.

Un petit problème

DIVISION PAR 7

A. On pose la division de 1 par 7.

$$
\begin{array}{l|l}
1{,}000000\ldots & 7 \\ \cline{2-2}
\quad 30 & 0{,}142857\ldots \\
\qquad 20 & \\
\qquad\quad 60 & \\
\qquad\qquad 40 & \\
\qquad\qquad\quad 50 & \\
\qquad\qquad\qquad 1\ldots &
\end{array}
$$

Quel est le millième chiffre après la virgule ?
Et quel est le 2008ème ?

B. Sans calcul !
Quelle division donne 0,285714285714... ?

C. Quel est le troisième chiffre après la virgule de $\frac{3}{7}$?

Le cinquième chiffre de $\frac{5}{7}$?

Et le 16ème chiffre de $\frac{16}{7}$?