En cinquième : *Des équations pour introduire les nombres relatifs*

Groupe didactique des mathématiques – IREM d'Aquitaine

1. Les différents contextes d'emploi des nombres relatifs

Un regard historique

Si les chinois utilisaient les négatifs et les règles de calcul dès le Ier siècle, il a fallu attendre, en occident, la fin du XIXe siècle pour que les négatifs prennent le statut de nombres, avec la construction formelle de l'ensemble des nombres relatifs (Hankel 1867). Les nombres négatifs sont apparus en occident au XVe siècle avec les travaux de Nicolas Chuquet. Mais les scientifiques refusaient l'existence de quantités négatives, qu'ils qualifiaient de nombres « moindres que rien » (Carnot 1803).
Le contexte dans lequel sont apparus les nombres négatifs est celui des équations où ils seront longtemps utilisés comme auxiliaires de calcul. Les données et les résultats sont positifs, mais la résolution impose le passage par des nombres négatifs. Ainsi, l'histoire nous montre bien que les nombres négatifs sont apparus non pour une modélisation du monde réel mais par nécessité interne aux mathématiques.

Les différents contextes d'emploi

Les situations permettant d'introduire les nombres relatifs sont de trois types :
1 *Contextes concrets*

- recettes et dépenses
- gains et pertes
- températures
- altitudes
- chronologie
- ascenseur

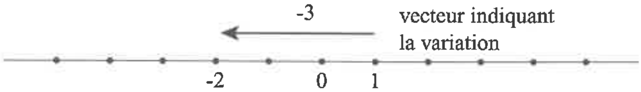
Dans ce genre de situation, le nombre relatif peut avoir deux significations différentes.
Il peut traduire :

- o un état : il fait $-3°C$ ou l'année de naissance d'un personnage est 50 av J.-C.
- o une variation : la température a baissé de $3°C$ ou l'ascenseur est descendu de 3 étages.

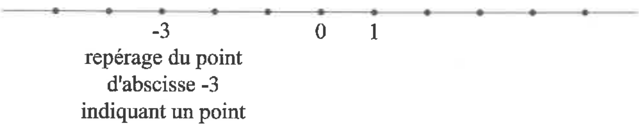
② ***Contexte de la droite graduée***

Dans ce contexte, le nombre relatif peut aussi avoir ces deux significations.

1) -3 est une variation.

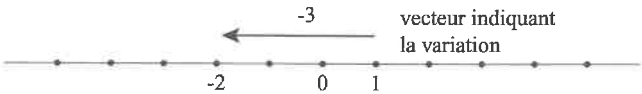


2) -3 est un repère indiquant un état.



Un même nombre relatif peut donc traduire des situations différentes :

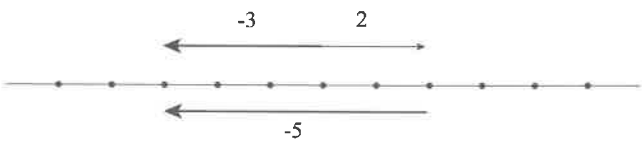
1)



$$\underset{\text{état}}{\underset{\uparrow}{(+1)}} + \underset{\text{variation}}{\underset{\uparrow}{(-3)}} = \underset{\text{état}}{\underset{\uparrow}{(-2)}}$$

Dans ce calcul, les nombres relatifs ont des statuts différents.

2)



$$2 + (-5) = -3$$

Ce calcul fait le bilan de deux variations.
Les nombres relatifs ont le même statut.

Pour introduire l'addition, il est préférable de travailler seulement avec des variations. On ne manipule que des nombres qui ont le même statut.

③ ***Contexte interne aux mathématiques***

Dans ce contexte :

- on résout des équations
- on énonce les règles de l'addition ou de la soustraction de deux nombres relatifs.

Conclusion

Aucun mode d'introduction ne peut à lui seul, permettre d'atteindre tous les buts recherchés. Il est donc important de varier les situations : repérage, gains et pertes, variations à appliquer à un état, etc.
Il faut aussi prendre de la distance par rapport aux contextes concrets de façon à donner un statut de nombres aux relatifs, aussi bien positifs que négatifs, sans discrimination, et à ne pas créer d'obstacles didactiques à la mise en place des règles de l'addition et surtout de la multiplication [16].
Le contexte concret permet de construire des images mentales variées mais peut aussi faire perdre le statut de nombres aux relatifs. De même, la droite graduée et la translation peuvent aider à la compréhension de l'addition mais elles peuvent aussi constituer un obstacle pour l'introduction de la multiplication.
Nous pensons donc qu'il est plus judicieux d'introduire les nombres relatifs par les équations.

2. Les choix didactiques

La construction de ce nouvel ensemble d'objets mathématiques doit être vue comme une extension du sens de ce que l'on nomme nombre pour qu'il n'y ait pas une coupure entre les nombres négatifs et les nombres positifs déjà connus. Les nombres relatifs ne prendront rapidement le statut de nombres que si l'élève opère avec eux. Ces opérations devront amener les élèves à ne pas imaginer séparément les anciens et les nouveaux nombres mais à considérer les négatifs comme une partie de l'ensemble des relatifs.

Ceci a deux conséquences sur nos choix didactiques.

- Dans une écriture de la forme $(+3) + (-2)$, les deux signes $+$ n'ont pas le même statut, le premier (celui du nombre positif 3) est un signe prédicatoire et le deuxième est un signe d'addition.
  Il y a donc pour les élèves une source de confusion possible. Dans un premier temps, nous n'introduirons donc pas d'écritures du type $(+3)$. Elles seront exprimées plus tard par opposition à (-3).
  Nous préférons garder au signe $+$ le seul statut opératoire au détriment d'une cohérence de notation dans l'ensemble $\mathbb{Z}$.
  Nous avons donc choisi dès le départ de présenter $(+3)$ et 3 comme deux écritures d'un même nombre. Nous pensons qu'ainsi, les élèves voient mieux l'inclusion de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. La simplification des écritures s'en trouvera facilitée.

[16] *D'après Suivi scientifique cycle central* tome 1, Poitiers, IREM

- Nous avons décidé d'introduire les nombres relatifs à partir d'égalités à compléter du type : $9 + \ldots = 7$. Tout comme $\frac{2}{3}$ avait été vu en classe de sixième comme le nombre qui multiplié par 3 égale 2, (-2) est introduit comme le nombre qui additionné à 9 égale 7.

3. Les situations proposées aux élèves

Étape 0 : Établir que $a + b - c = (a + b) - c = a + (b - c)$

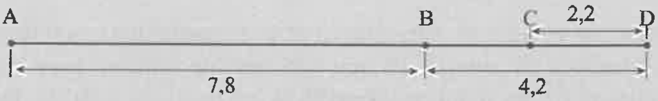
Cette étape n'est pas nécessairement à faire juste avant l'introduction des relatifs mais plus tôt dans l'année lors du chapitre sur l'organisation des calculs par exemple.

Exercice 1
Margot va à la librairie. Elle achète deux articles : un cahier à 2,75 € et un livre à 8,25 €. Le libraire lui fait une réduction de 0,50 € sur le prix du livre. Calculer le prix total que Margot doit payer de deux façons différentes et, pour chaque façon, écrire les calculs sur une seule ligne.

Lors de la mise en commun, le professeur écrit l'égalité suivante :

$$2,75 + 8,25 - 0,50 = (2,75 + 8,25) - 0,50 = 2,75 + (8,75 - 0,50)$$

Exercice 2



Calculer la distance AC de deux façons différentes et, pour chaque façon, écrire les calculs en une seule ligne.

On obtient l'égalité : $7,8 + 4,2 - 2,2 = (7,8 + 4,2) - 2,2 = 7,8 + (4,2 - 2,2)$

Bilan
Étant donnés trois nombres a, b et c quelconques, on a l'égalité :

$$a + b - c = (a + b) - c = a + (b - c)$$

Les deux égalités étant au tableau, le professeur demande aux élèves d'écrire d'autres égalités du même type avec des nombres de leur choix pour s'assurer que les élèves ont bien repéré la structure commune à ces deux égalités. Ensuite il demande aux élèves de formuler une propriété à l'aide de lettres, comme ils l'ont déjà fait pour la distributivité.

Étape 1 : Égalités à trous

Compléter les pointillés :

$$\begin{array}{rcccr} 12 & + & \ldots & = & 27 \\ 38 & + & \ldots & = & 83 \\ 438 & + & \ldots & = & 705 \\ 58 & + & \ldots & = & 58 \\ 9 & + & \ldots & = & 7 \end{array}$$

Les élèves complètent d'abord en calculant mentalement puis, lorsque les nombres deviennent compliqués, ils posent la soustraction. S'ils n'ont pas l'idée de la soustraction, on peut leur autoriser la calculatrice et leur demander de préciser l'opération tapée pour trouver la solution. Beaucoup d'élèves disent que la dernière égalité est impossible car on ne sait pas calculer $7 - 9$ mais certains proposent -2 (trouvé grâce à la calculatrice ? Peut-être est-il donc préférable de ne pas l'autoriser ?).

Le professeur relance alors le travail en insistant pour que cette dernière opération devienne possible. Il explique que, jusque là, effectivement, c'était impossible, mais qu'aujourd'hui, un grand pas va être franchi...

Des élèves demandent alors si on peut remplacer les pointillés par autre chose qu'un nombre tout seul. Le professeur leur répond « oui ».

Des élèves proposent de mettre $7 - 9$ à la place du trou. Ayant occulté la nécessité des parenthèses, le calcul devient alors possible. En effet, on effectue : $9 + 7 = 16$ et $16 - 9 = 7$.

Le professeur incite alors les élèves à trouver plusieurs autres solutions. Les élèves proposent $6 - 8$ ou $5 - 7$ ... ou encore $0 - 2$.

Lors de la mise en commun, les élèves confrontent leurs solutions et vérifient qu'elles répondent bien au problème posé. On peut en déduire que :
$7 - 9 = 2 - 4 = 1 - 3 = \ldots = 0 - 2$.

Le professeur explique alors que le nombre $0 - 2$ sera désormais noté -2.
Dans un souci de simplification, on s'affranchit dès le départ des parenthèses autour de -2 sauf s'il est situé après un signe opératoire.

Le nombre négatif est donc introduit comme différence de deux entiers dans le cas où le nombre soustrait est plus grand que le nombre auquel on le soustrait. Ceci est cohérent avec l'introduction des nombres rationnels positifs, vu en classe de $6^{\text{ème}}$, comme quotient de deux entiers.

Exercice
Écrire plusieurs égalités ayant -2 comme solution.

Les élèves peuvent écrire :

$3+(-2)=1$	et	$1-3=-2$
$-2+5=3$	et	$3-5=-2$
$2+(-2)=0$	et	$0-2=-2$

Bilan

On peut effectuer des soustractions pour lesquelles le premier nombre est plus petit que le deuxième.

Le résultat est un nombre négatif. Il s'écrit avec un signe $-$.

$$-2=0-2=1-3=7-9=\dots$$

On a alors : $9+(-2)=7$.

Étape 2 : Les nombres opposés

Exercice
Compléter les égalités suivantes :

$$\dots+7=0$$

Etc.

On redonne des additions à trous avec une solution positive ou négative, en variant la place du nombre manquant, et on glisse parmi ces exercices, l'égalité ci-dessus.

Bilan
Deux nombres sont opposés quand leur somme vaut zéro.
$-7+7=7+(-7)=0$.
Les deux nombres 7 et -7 sont opposés.

Par opposition au nombre négatif -2, le nombre 2 sera appelé nombre positif et pourra se noter $+2$.
L'ensemble des nombres positifs et négatifs est appelé l'ensemble des nombres relatifs. Il est composé des nombres que nous connaissions déjà (les nombres positifs) et des nombres négatifs.

Ainsi, nous avons introduit les nombres relatifs à partir d'un besoin mathématique et en cohérence avec les nombres déjà connus. Reste maintenant à généraliser l'addition, à repérer ces nombres sur une droite graduée, à introduire la soustraction.
Ces parties sont développées dans la brochure : Groupe didactique des mathématiques au collège, *Entrées dans l'algèbre $6^{ème}$ et $5^{ème}$*, Bordeaux, IREM, 2007.