En cinquième : *Introduction de la somme de deux nombres en écriture fractionnaire*

Vincent PAILLET - IREM d'Orléans
Mireille SAUTER - IREM de Montpellier

En classe de cinquième, le travail sur les écritures fractionnaires se poursuit avec l'objectif, comme en classe de sixième, de renforcer le fait qu'elles représentent des nombres rationnels. Le fait d'opérer sur ces nombres est une occasion supplémentaire de renforcer ce statut. Deux approches sont proposées dans cet article :
l'une utilisant les guide ânes, l'autre des représentations graphiques (longueurs et aires).

1. Introduction de la somme de deux nombres rationnels à l'aide du guide-âne

Le guide-âne[10] est un outil permettant en classe de sixième de montrer l'équivalence entre les fractions définies en référence au partage de l'unité (école primaire) et les fractions quotients, c'est-à-dire les nombres rationnels (collège). Cet aspect sera aussi retravaillé au cours de cette activité.
Un autre intérêt est de permettre de placer des points d'abscisses rationnelles de façon assez précise sur une droite graduée, mais aussi de lire une abscisse.

L'activité suivante a donc pour but d'introduire la somme de deux nombres en écriture fractionnaire tout en continuant à travailler l'aspect nombre des écritures fractionnaires.

L'addition proposée se place volontairement dans un cas non exigible du programme de 5$^{\text{ème}}$. Le fait de se limiter aux exigibles du programme[11]risque d'entraîner des théorèmes élèves faux du type :
« Le dénominateur commun est le plus grand des deux dénominateurs » ou
« On ne peut additionner deux fractions que lorsque l'un des dénominateurs est multiple de l'autre ».

Les classes dans lesquelles a été testée cette activité avaient vu le produit de quotients et la simplification quelques semaines auparavant.

[10] L'utilisation du guide-âne est décrite dans l'annexe 1.
[11] À savoir « l'un des dénominateurs est multiple de l'autre. »

Déroulement de la séance

Consigne écrite au tableau :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = ?$$

Il est précisé aux élèves que l'on cherche la valeur exacte de cette somme.

1^{ère} partie : Les élèves proposent leurs solutions

Après une phase d'appropriation assez courte, les élèves énumèrent leurs réponses. Trois propositions sont apparues. Elles ont été notées au tableau de façon à en débattre.

- Utilisation de la règle spontanée pour additionner : $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}$.
  Cette proposition peut être invalidée par l'observation que les termes $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont supérieurs à 0,5 et donc que la somme est supérieure à 1 alors que le nombre $\frac{5}{7}$ est inférieur à 1.
  On peut aussi déterminer par le calcul mental ou par le calcul instrumenté des valeurs décimales approchées de cette somme et de $\frac{5}{7}$. C'est ici l'occasion d'observer que cette somme n'est pas un nombre décimal.
  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \approx 0,666 + 0,75$ donc $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \approx 1,416$.

- Simplification par 3.
  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$.
  Les mêmes méthodes que précédemment permettent d'invalider l'égalité.
  Un élève note qu'on a simplifié comme si on avait une multiplication.
  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} = 1 \times \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$.

- Un élève a proposé l'idée d'une mise au même dénominateur, mais il ne voit ni comment faire ni quoi en faire. La classe ne s'est pas saisie de cette proposition.

À ce stade nous disposons donc d'une valeur approchée de la somme $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.
L'incertitude sur cette valeur justifie le fait de continuer la recherche.

$2^{\text{ème}}$ partie : Détermination géométrique - Utilisation des guides-ânes[12]

La question suivante est posée :

> Trace une demi-droite graduée d'unité 4 cm et place les points d'abscisses $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$.

Remarque :
Le choix de l'unité a été fait en fonction des guides ânes disponibles.
Le choix des guides-ânes proposés prend ici toute son importance.
Les élèves placent alors les points d'abscisses $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sur la droite graduée. Certains élèves utilisent pour cela l'aspect fraction partage et d'autres l'aspect fraction quotient [13].
Lors de cette partie, les différents positionnements des points et l'utilisation des guides ânes sont aussi réalisés au rétro projecteur.

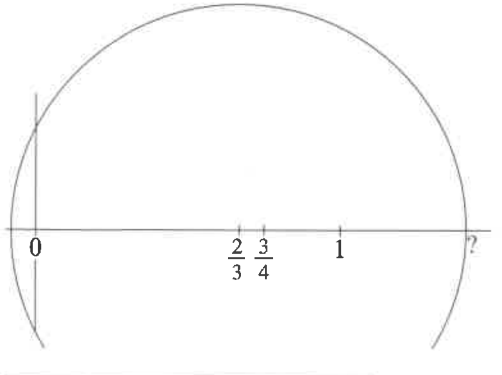
La question suivante est alors posée :

> Quelqu'un peut-il montrer sur la droite graduée un segment de longueur $\frac{2}{3}$?

C'est ici l'occasion de rappeler ce qu'est la distance à l'origine. En effet, il est important que les élèves fassent bien le lien entre l'abscisse d'un point et sa distance à l'origine pour comprendre que le point trouvé par la suite aura pour abscisse $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.
Puis

> Comment construire un segment de longueur $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$?

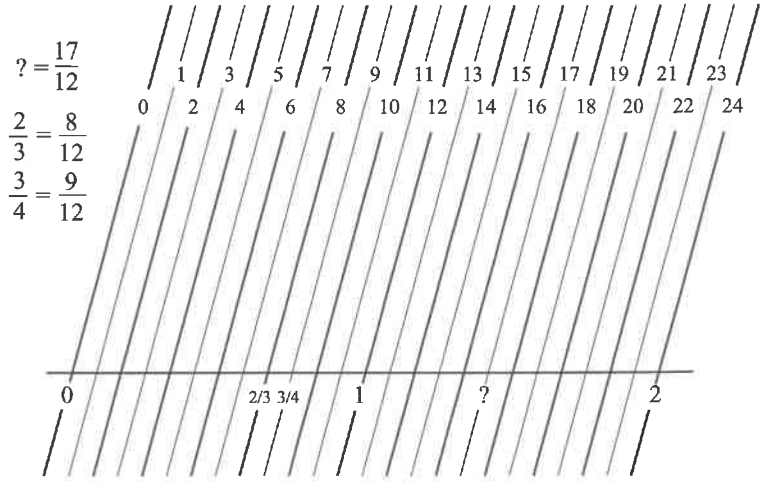
$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ est alors construit par le report de la longueur $\frac{3}{4}$ à la suite de $\frac{2}{3}$.



$$? = \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

[12] Voir annexe 1
[13] Voir annexe 2.

Nous avons donc un point dont l'abscisse est égale à $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$. Reste à déterminer la valeur de cette abscisse.
Le premier guide-âne de l'annexe est alors utilisé.
Ici seul l'aspect fraction de l'unité est utilisable.
On cherche un fractionnement de l'unité sur lequel se trouve aussi le point d'abscisse cherchée.
La droite n° 0 du guide âne doit donc passer par le point d'abscisse 0, une autre par le point d'abscisse 1 et une troisième par celui d'abscisse $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$. Cette partie a du être guidée car peu d'élèves se rappelaient comment déterminer l'abscisse d'un point à l'aide du guide âne.
À ce stade il est indispensable de passer dans les rangs et d'être très actif.
Afin d'aider certains élèves, il leur a été précisé qu'une droite doit passer par le point d'abscisse $\frac{2}{3}$ et qu'une autre droite doit passer par le point d'abscisse $\frac{3}{4}$.
Le placement des points et la construction de la somme sont délicats. Le problème majeur est lié à un manque de précision. Certaines erreurs sont rapidement invalidées par les élèves.
Deux propositions se dégagent : $\frac{14}{10}$ et $\frac{17}{12}$. Or la première partie a permis de constater que cette somme n'était pas un nombre décimal. Seul $\frac{17}{12}$ semble donc convenir. On a ainsi $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{17}{12}$.



La demi-droite est alors graduée en douzième à l'aide du guide-âne.
La droite graduée complétée permettra ainsi d'établir que :
$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{8+9}{12}$.

3ème partie : Justification algébrique - Factorisation (règle de la distributivité étendue aux rationnels)

Ce travail s'est fait à partir de la question suivante :

Comment pourrions-nous justifier par le calcul que

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{17}{12}\ ?$$

La 2ème partie rend cette justification plus accessible aux élèves. La mise au même dénominateur ne pose plus de problème car les élèves souhaitent transformer ces quotients en douzièmes.
Les élèves proposent spontanément l'égalité :

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2\times 4}{3\times 4}+\frac{3\times 3}{4\times 3}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\mathbf{\frac{17}{12}}$$

Par contre la justification de l'égalité : $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{8+9}{12}$ a été guidée.
Elle repose sur l'extension à $\mathbb{Q}$ de la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Une fois de plus l'utilisation au préalable du guide-âne facilite la compréhension de $\frac{8}{12}=8\times\frac{1}{12}$.

Le recours à la somme itérée peut être aussi utilisé

$$\frac{8}{12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=8\times\frac{1}{12}$$

(on reporte huit fois le segment de longueur $\frac{1}{12}$).
Le fait d'avoir abordé la multiplication de quotients avant l'addition permet aussi de le justifier. $\frac{8}{12}=\frac{8\times 1}{12}=8\times\frac{1}{12}$.
Si la factorisation n'a pas posé de problème, il a été difficile d'obtenir « nous avons factorisé $\frac{1}{12}$ » ce qui n'est pas forcément étonnant en classe de 5ème.

On peut remarquer que le recours à la somme itérée permet aussi de justifier que $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}$.

$$\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$$

$$+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{17}{12}$$

On peut donc écrire la justification suivante :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\frac{3}{4}&=\frac{2\times 4}{3\times 4}+\frac{3\times 3}{4\times 3}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}\\&=8\times\frac{1}{12}+9\times\frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (8+9) \times \frac{1}{12}\\
&= \frac{8+9}{12}\\
&= \frac{17}{12}
\end{aligned}
$$

On peut aussi justifier cette égalité en utilisant la définition du quotient.

> $\frac{17}{12}$ est le nombre qui multiplié par 12 est égal à 17.
> Or $12 \times \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right) = 12 \times \frac{2}{3} + 12 \times \frac{3}{4} = \frac{24}{3} + \frac{36}{4} = 8+9 = 17.$
> Donc $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ est aussi le nombre qui multiplié par 12 est égal à 17.
> Conclusion : $\frac{2}{3}+\frac{3}{4} = \frac{17}{12}$.

4$^{\text{ème}}$ partie : Écriture d'une règle de calcul

Pour additionner deux quotients :

- ▷ on les met au même dénominateur,
- ▷ on conserve le dénominateur commun,
- ▷ on ajoute les numérateurs.

Le choix de donner une règle de calcul à la fin de l'activité est discutable. Le programme de 5$^{\text{ème}}$ ne nous y invite pas : « *L'objectif n'est pas d'aboutir à une règle de calcul. Celle-ci sera établie en classe de quatrième* ».
On peut cependant s'interroger sur la signification de cette phrase.
Faut-il comprendre qu'aucune règle de calcul ne doit être écrite ou que la démonstration de cette règle et l'utilisation d'une écriture littérale relève de la classe de 4$^{\text{ème}}$?
Dans le document d'accompagnement « *Du numérique au littéral* »[14] on peut lire : « *... en classe de 4$^{\text{ème}}$ la règle de sommation de deux quotients en écritures fractionnaires de même dénominateur, installée en classe de 5$^{\text{ème}}$, peut être démontrée* ». Ce qui peut justifier l'écriture, en classe de 5$^{\text{ème}}$, de cette règle dont la démonstration se fera l'année suivante.

Dans un premier temps les élèves sont invités à rédiger toutes les étapes de calcul (y compris la factorisation) ce qui doit permettre une meilleure appropriation de la règle et moins de confusion avec la multiplication.

Remarques et conclusions

Une difficulté pour mener à bien cette activité est l'utilisation du guide–âne par

[14] « *Du numérique au littéral* », Collège – Mathématiques – projet de document d'accompagnement, 5 avril 2006, p. 6

les élèves. Dans la situation expérimentée, les élèves n'avaient que peu d'expérience de celui-ci (seulement une séance préparatoire alors qu'ils ne l'avaient jamais rencontré en classe de sixième).
De ce fait l'activité a dû être trop guidée, ce qui ne favorise pas le questionnement des élèves.

L'activité aurait pu débuter par des cas où le recours à des nombres décimaux ou entiers permet d'effectuer la somme pour aboutir à la dernière opération posant problème.
Par exemple : $2 + \frac{9}{3} = ?$ $\quad \frac{5}{2} + \frac{12}{6} = ?$ $\quad \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = ?$
Cela aurait eu l'intérêt de pouvoir revenir ensuite sur ces premiers calculs et de voir si la méthode de calcul trouvée fonctionne aussi.

2. Introduction de la somme de deux nombres rationnels par des représentations graphiques

Avec les mêmes objectifs que dans l'activité précédente c'est-à-dire éviter de proposer des situations d'addition de fractions trop simples (ces situations entraînant l'élaboration de règles partielles qui seront des obstacles à des apprentissages futurs), il est demandé aux élèves :

> Quelle est la valeur de la somme $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$?

Ce travail est donné à faire individuellement ou en groupe pendant environ une demi heure. Puis les différentes réponses sont réunies au tableau et un débat est organisé.
Comme dans l'activité précédente, les réponses des élèves sont en général $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{4}$ ou des valeurs approchées (0,75 + 0,6 ou 0,75 + 0,66...).

Les réponses « valeurs approchées » méritent d'être étudiées avec attention avant d'être refusées comme réponse au problème, car elles ne nous donnent pas la valeur exacte de la réponse que nous recherchons ici. Cependant elles permettent de rejeter des réponses fausses (comme $\frac{5}{7}$ et $\frac{2}{4}$ par exemple). Il est donc essentiel d'insister avec les élèves sur le type de valeur trouvée « approchée » ou « exacte », en faisant justifier les réponses.

Après débat, les élèves voient que ces valeurs approchées donnent un ordre de grandeur mais qu'elles ne peuvent être la réponse exacte ; ils disent que la réponse doit être une fraction du type de $\frac{2}{3}$ (« *où la division ne s'arrête pas* »), mais comment la trouver ?

On demande alors aux élèves :

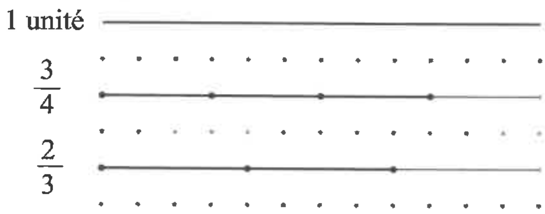
Peut-on représenter $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$?

La recherche se fait à nouveau individuellement ou en groupe. L'enseignant circule dans la classe en insistant sur le mot représentation. Son objectif est d'amener les élèves à avoir recours à des représentations graphiques qui font appel à la notion de fraction partage qu'ils ont vu antérieurement.

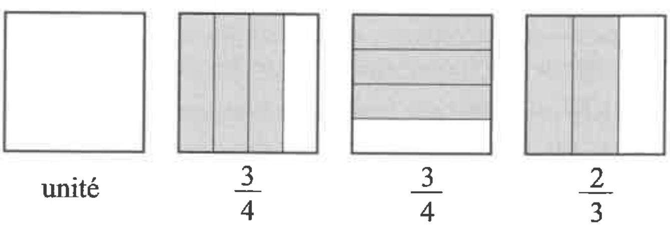
À l'école primaire la fraction est introduite en référence au partage d'une unité, le dénominateur indiquant la nature du partage et le numérateur le nombre de parts considérées (trois quart, $\frac{3}{4}$, est compris comme « trois fois un quart »). Au collège, ces connaissances sont réactivées en sixième et il est d'ailleurs intéressant d'introduire l'écriture $3 \times \frac{1}{4}$. Cette notion de fraction partage est utilisée dans les représentations à partir de longueurs ou d'aires ; s'appuyer sur les grandeurs et la manipulation géométrique des ces représentations peuvent être une aide précieuse pour des élèves en difficulté avec les fractions et qui ont encore besoin d'image et de références concrètes aux grandeurs.

Pour la recherche du problème, il n'est pas nécessaire de préciser aux élèves le type de grandeur et dans leurs recherches, ils vont naturellement dessiner :

Pour les longueurs



Pour les aires



En réunissant les représentations de $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$ les élèves voient facilement que la somme est représentée par une grandeur plus grande que l'unité. Les réponses $\frac{5}{7}$ et $\frac{2}{4}$ sont alors invalidées, si elles n'ont pas été déjà invalidées avec les valeurs approchées.

On repose la question :

Comment trouver la somme $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$?

Après ce travail de représentation, tous les élèves sont d'accord pour dire que si les partages (c'est-à-dire les dénominateurs) sont identiques il suffit d'additionner les numérateurs.

Ce que le professeur peut justifier au tableau de la manière suivante :

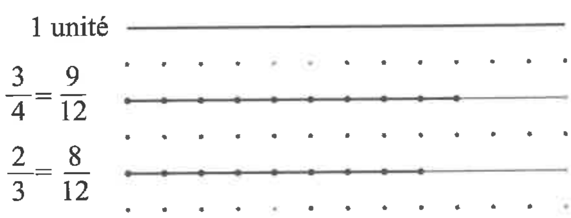
$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = 2 \times \frac{1}{7} + 4 \times \frac{1}{7} = (2+4) \times \frac{1}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7}$$

De fait ces écritures sont encore difficiles pour certains élèves. Les commentaires des programmes notent que beaucoup sont convaincus par l'énoncé oral « deux septièmes plus quatre septièmes est égal à deux plus quatre soit six septièmes ». De fait, les « septièmes » fonctionnent comme sous unités de mesure, ce que l'on retrouve également dans les représentations géométriques.

Pour trouver la somme $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ certains élèves proposent donc d'essayer de faire le même partage, c'est-à-dire d'écrire les fractions avec le même dénominateur.

Pour trouver ce même dénominateur, on peut travailler à nouveau sur les représentations de chaque fraction en cherchant une subdivision commune. Suivant le niveau des élèves, cette recherche peut être individuelle avec mise en commun des différentes idées ou bien menée par l'enseignant classe entière.

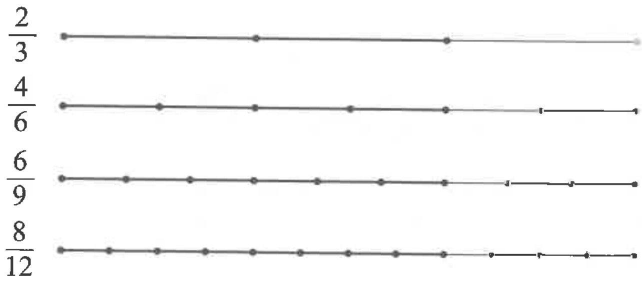
On trouve alors à partir de la représentation par des longueurs :



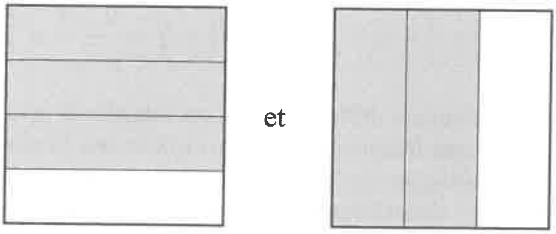
Ou bien faire un rappel sur les différentes écritures d'une fraction.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} \qquad \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

Ces différentes écritures sont à mettre en correspondance avec les représentations, on réactive alors des connaissances de sixième :



Un travail identique avec la représentation par des aires est aussi intéressant. Par la superposition des carrés



l'idée de partage en douze apparaît.

On arrive donc aux écritures suivantes : $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}$.

On peut demander aux élèves d'écrire des règles pour additionner des fractions. On obtient des formulations du type :

- il faut regarder les dénominateurs ;
- on ne peut additionner que si les partages sont pareils ;
- on doit écrire les fractions avec le même dénominateur ;
- quand les partages (ou dénominateurs) sont pareils on additionne les numérateurs.

ANNEXES

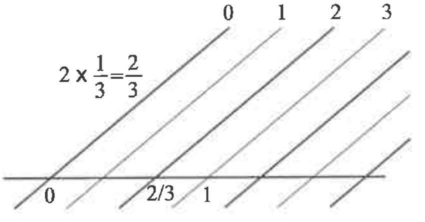
Annexe 1 : Différentes méthodes d'utilisation d'un guide-âne

Le problème d'un guide-âne est qu'il doit se trouver en dessous de la feuille sur laquelle est tracée la droite graduée afin de pourvoir écrire sur cette dernière. Une première idée est de voir le guide-âne en transparence en prenant du papier 60g par exemple (l'utilisation du papier calque est aussi possible). Une autre possibilité est de demander aux élèves de tracer leur droite graduée sur un quart de feuille A4 (l'important est que la feuille soit volante). Les graduations ne doivent pas être trop petites et dépasser des deux côtés de la droite.

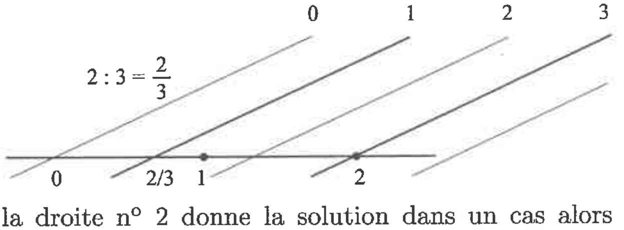
En pliant cette feuille le long de la droite graduée, les élèves peuvent voir leurs graduations, la pliure correspondant à la droite graduée, et la visualisation du guide-âne est optimale, ce qui conditionne la réussite de l'activité.
L'idée de numéroter les droites parallèles, reprise d'une brochure de l'IREM de Lyon, est très utile. Le fait d'utiliser deux couleurs[15] en alternance pour tracer le guide–âne facilite grandement la lecture. L'utilisation en parallèle du rétro-projecteur est indispensable.

Annexe 2 : Différentes méthodes de construction du point d'abscisse $\frac{2}{3}$ à l'aide d'un guide–âne

a) On partage l'unité en trois parties égales et on prend deux parties.
Le deuxième guide-âne de cette annexe permet le fractionnement de l'unité : on place l'origine sur la droite n° 0, et le point d'abscisse 1 sur la droite n° 3. La droite n° 2 coupe la droite graduée au point d'abscisse $\frac{2}{3}$. L'aspect fraction partage est ici utilisé.



b) On partage deux unités en trois. On divise 2 par 3. Le troisième guide–âne permet d'effectuer cette division : on place l'origine sur la droite n° 0, et le point d'abscisse 2 sur la droite n° 3. La droite n° 1 coupe la droite graduée au point d'abscisse $\frac{2}{3}$. L'aspect quotient est alors utilisé.



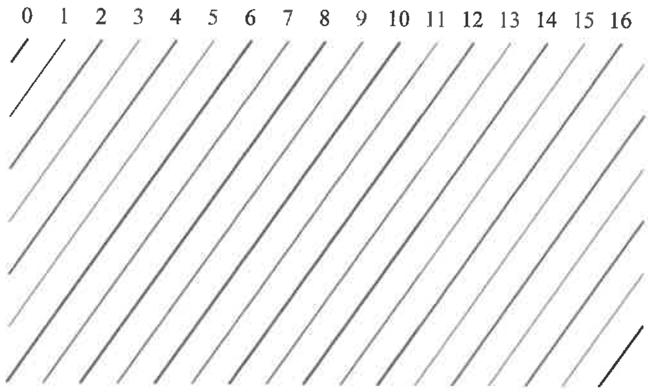
Le fait que la droite n° 2 donne la solution dans un cas alors que c'est la n° 1 qui la donne dans l'autre cas pose des problèmes à certains élèves. L'égalité $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$ (qui sera réutilisée dans la 3$^{\text{ème}}$ partie) a permis de les éclairer sur ce point. Pour un élève il a fallu écrire $1 \times \frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$.

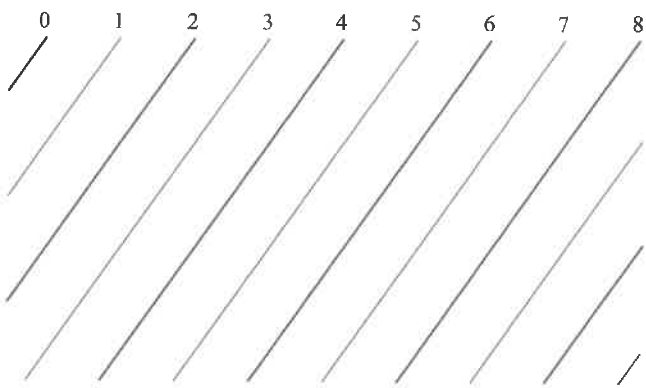
---

[15] Pour des raisons de monochromie, nous avons, dans cette brochure, remplacé les deux couleurs par des traits d'épaisseurs différentes.

Guides-ânes


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16


0 1 2 3 4 5 6 7 8