En sixième : *Saut de puce*

Groupe didactique des maths - IREM d'Aquitaine

Dans cette activité, la division des nombres entiers est abordée dans le cas où le quotient n'est pas un nombre décimal. De nouveaux nombres apparaissent pour lesquels il n'existe pas d'écriture décimale finie.
L'écriture fractionnaire, jusque là associée à la notion de fraction-partage, montre son utilité pour représenter ces nouveaux nombres.
La notion de fraction quotient en $6^{\text{ème}}$ est ici introduite en deux temps.
Dans le premier temps, les élèves prennent conscience, en travaillant sur la recherche d'un facteur manquant, que les entiers et les décimaux ne suffisent pas pour répondre. Il y a un manque dans les nombres déjà connus.
La fraction-partage étudiée à l'école primaire répond à ce problème et devient fraction-quotient dans le second temps. Elle prend alors un statut de nombre.

1. Ce que dit le programme de cycle 3

- Des écritures fractionnaires, telles que $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{7}$, ont été rencontrées en tant que fractions-partage (partage d'un segment, d'un disque, d'un rectangle).
- $\frac{4}{3}$ a été rencontré comme mesure de la longueur d'un segment nécessitant le partage de l'unité en trois parties égales.

2. Place dans la progression

- La notion de fraction-partage a été réactivée (pliage de bandes de papier, placement de points repérés par des fractions sur une droite graduée).
- La multiplication des nombres entiers et la multiplication d'un nombre entier par un nombre décimal ont été retravaillées. Les élèves ont donc contrôlé des résultats en utilisant le dernier chiffre, l'ordre de grandeur ou encore la multiplication par un nombre plus petit que 1, etc.
  Exemple : Entoure le résultat des opérations suivantes.

$3,26 \times 7 =?$	22,28	22,82	23,03	22,83
$4,7 \times 23 =?$	2108,1	708,1	108,1	207,1
$36 \times 0,93 =?$	36,48	33,48	360,48	330,48

- La division par un nombre entier a été revue lorsque le quotient est un nombre entier et prolongée dans le cas où le quotient est un nombre décimal. La notion de quotient a été abordée par l'intermédiaire de multiplications à trou.

3. Étape 1 : « *On constate un manque* »

Énoncé proposé aux élèves

Compléter les égalités suivantes, lorsque cela est possible :

a) $4 \times \ldots$	$= 20$	b) $\ldots \times 7$	$= 7$
c) $16 \times \ldots$	$= 432$	d) $15 \times \ldots$	$= 48$
e) $5 \times \ldots$	$= 2$	f) $\ldots \times 2$	$= 1$
g) $0 \times \ldots$	$= 3$	h) $3 \times \ldots$	$= 4$

Analyse du choix des variables didactiques

Les deux premières égalités peuvent être complétées en utilisant les tables de multiplication.
L'égalité c) a été choisie de sorte que les élèves soient amenés à poser la division mais le nombre à trouver reste entier.
Les égalités d), e) et f) permettent le passage à un quotient décimal.
Les égalités e) et f) permettent de revoir que la multiplication n'agrandit pas toujours.
L'égalité g) met les élèves face à l'impossibilité de compléter ce type de multiplication à trou et permet de rappeler que la division par zéro est impossible.
L'égalité h) permet d'introduire l'écriture fractionnaire du quotient.

Compte-rendu d'expérimentation

Une discussion s'installe dans la classe pour la dernière égalité.
Certains élèves proposent : 1,3 ; 1,33 ; 1,333, etc. Ces propositions sont invalidées à chaque fois par le calcul de : $3 \times 1,3$; $3 \times 1,33$; $3 \times 1,333$; etc.
Des élèves proposent alors 1,334 que l'on écarte de la même façon.
Éventuellement, avec la sollicitation du professeur, les élèves montrent, en posant la division, que le résultat a une partie décimale « qui ne s'arrête pas ».
D'autres réinvestissent le travail sur le dernier chiffre non nul de la partie décimale. Ils montrent que le produit de ce chiffre par 3 ne peut se terminer par 0.
Quelques rares élèves proposent alors d'écrire $3 \times (4 : 3) = 4$.

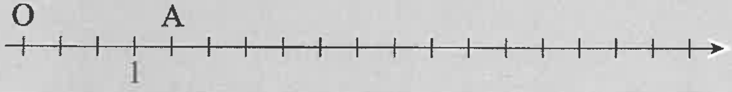
Il n'existe pas de nombre décimal qui complète l'égalité à trou $3 \times \ldots = 4$.

Aucun élève n'a encore proposé d'écrire $3 \times \dfrac{4}{3} = 4$. Cette constatation n'est pas étonnante puisque la fraction en tant que quotient doit être vue au collège.

Plutôt que de donner directement la solution, le professeur propose alors aux élèves l'étape 2 dont le but est de discuter de la nature de 4 : 3.

4. Étape 2 : « *La fraction apporte une solution* »

Voici une situation :

> Une puce se déplace sur la demi-droite graduée ci-dessous en faisant des bonds de longueur OA. Au bout de combien de bonds tombe-t-elle pour la première fois sur un nombre entier et quel est ce nombre ?
>
> 
>

But de cette étape

Cette situation permet de trouver une écriture du nombre qui permet de compléter $3 \times \ldots = 4$ et de faire le lien avec la notion de fraction-partage.

Compte-rendu d'expérimentation

Lorsque le professeur propose cette étape, certains élèves réagissent en disant : « alors on va mettre une fraction ... ».
Les élèves trouvent qu'au bout de 3 bonds, la puce tombe sur le point d'abscisse 4. Le professeur écrit alors $3 \times OA = 4$. Certains élèves font le lien avec ce qui a été fait à la séance précédente. Si tel n'est pas le cas, le professeur demande aux élèves la mesure de la longueur OA.
Les élèves trouvent alors la solution de l'étape 1. On a $3 \times \frac{4}{3} = 4$.

Il reste à justifier ce résultat.
$3 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$. Le professeur s'appuie sur la demi-droite graduée pour expliquer les étapes trouvées oralement par certains élèves. Les élèves ne font pas le passage par $\frac{12}{3} = \frac{4 \times 3}{3} = 4 \times \frac{3}{3}$.
À cette époque de l'année, les élèves ne connaissent pas la multiplication d'une fraction par un nombre entier. Ils voient, comme au cycle 3, $\frac{12}{3}$ (12 tiers) comme 4 fois 3 tiers sur la droite graduée et donc comme 4 fois l'unité.

Par la suite, on demande aux élèves de reprendre les égalités à trou de l'étape 1 et de les compléter à l'aide d'un nombre en écriture fractionnaire. On retravaille les différentes écritures d'un même nombre.

Enfin, on peut compléter le tableau :

Opération à trou	Réponse	Écriture décimale du quotient	Écriture fractionnaire du quotient
$4 \times \ldots = 20$	$4 \times 5 = 20$	5	$\frac{20}{4}$
$\ldots \times 7 = 7$	$1 \times 7 = 7$	1	$\frac{7}{7}$
$2 \times \ldots = 1$	$2 \times 0,5 = 1$ ou $2 \times \frac{1}{2} = 1$	0,5	$\frac{1}{2}$
$5 \times \ldots = 2$	$5 \times 0,4 = 2$ ou $5 \times \frac{2}{5} = 2$	0,4	$\frac{2}{5}$
$3 \times \ldots = 4$	$3 \times \frac{4}{3} = 4$		$\frac{4}{3}$

On insiste sur les égalités :
$5 = \frac{20}{4} \qquad 1 = \frac{7}{7} \qquad 0,4 = \frac{2}{5} \qquad 0,5 = \frac{1}{2}.$

Bilan de l'activité :

- Pour compléter $16 \times \ldots = 48$, on divise 48 par 16. Le quotient est $\frac{48}{16} = 3$ qui est le nombre manquant.
- On ne peut pas compléter $3 \times \ldots = 4$ avec un nombre décimal. Le nombre manquant est le quotient $\frac{4}{3}$. On a $3 \times \frac{4}{3} = 4$.

5. Prolongement

Un travail très important sur les différentes écritures d'un nombre peut prolonger cette activité. Le professeur peut par exemple écrire au tableau différentes écritures d'un même nombre ($3,5$; $\frac{35}{10}$; $\frac{7}{2}$; $3 + \frac{5}{10}$ etc.) et demander aux élèves combien il y a de nombres écrits au tableau.