

## En sixième : *Reconstruction des nombres décimaux*

Annick MASSOT et Georges PONS - IREM des Pays de la Loire

Avant la mise en place des nouveaux programmes de l'école primaire, nous constatons des erreurs récurrentes dans les cahiers d'évaluation de nos élèves de 6<sup>ème</sup>, deux en particulier pour un nombre non négligeable d'élèves :

- pour certains, c'est le dénominateur qui indique le nombre de parts à prendre dans un partage déjà réalisé de l'unité,
- pour d'autres, quel que soit le partage de l'unité et quel que soit le dénominateur de la fraction à placer, si son numérateur est 1, elle correspond à la première graduation après 0.

Depuis, ces nouveaux programmes introduisent le nombre décimal à partir des fractions décimales, présentées comme un cas particulier des fractions. Cela semble être la meilleure façon pour éviter un certain nombre d'erreurs, par exemple le fait de considérer un nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule.

Cette activité a été écrite et expérimentée au moment où changeaient les programmes du CM2 puis de la sixième : nous avons considéré qu'il était important de reprendre en sixième la démarche préconisée à l'école primaire, pour revenir à la nature du nombre décimal et à la convention que représente la virgule. D'une part, il faut un certain temps avant que les changements de programme soient intégrés et ils ne le sont pas partout de la même façon. D'autre part, c'est l'occasion de mettre de la cohérence dans des connaissances que les élèves ont acquises ou sont en train d'acquérir, entre les fractions et les nombres entiers par exemple, ou entre les fractions décimales et les nombres décimaux. C'est enfin, en partant de la fraction-partage, l'occasion de préparer le travail sur la fraction-nombre qui est au programme de la classe de sixième.

La demi-droite graduée nous a semblé être un outil privilégié pour permettre cette mise en relation des nombres entre eux (entiers, décimaux, fractions) et faciliter leur comparaison.

## 1. Première partie

Travail individuel

0 1

---

A main levée, sans mesurer, marque un point correspondant à  $\frac{1}{3}$  sur la demi-droite graduée ci-dessus.

Puis toujours à main levée, place le point correspondant à  $\frac{2}{5}$ .

0 1

---

Puis toujours à main levée, place le point correspondant à  $\frac{5}{4}$ .

0 1

---

Ces travaux individuels sont ramassés par le professeur qui peut ainsi les étudier pour constituer des groupes. Suivant le contenu des travaux individuels, le professeur peut faire le choix de groupes hétérogènes ou homogènes quant à la méthode utilisée :

- hétérogènes, pour privilégier la confrontation de ces méthodes au sein des groupes ;
- homogènes pour que des méthodes utilisées ne disparaissent pas dans les débats au sein des groupes et puissent être ainsi débattues après les présentations des travaux des groupes,

mais, dans les deux cas, les groupes sont hétérogènes quant aux niveaux des élèves.

À la séance suivante :

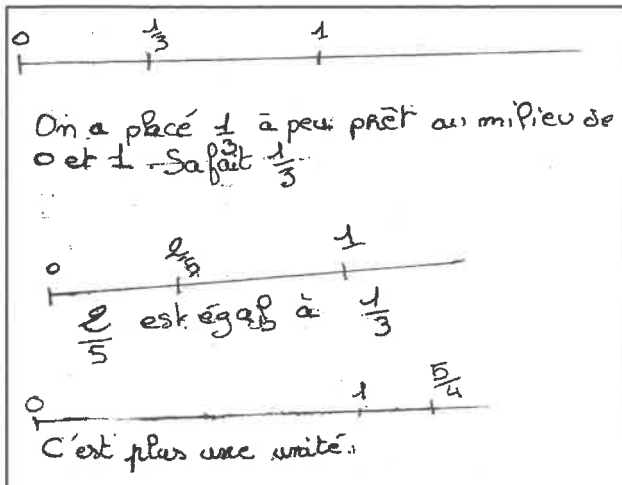
Travail par quatre

Comparez vos résultats, mettez-vous d'accord puis expliquez comment vous avez procédé pour placer les points. Précisez aussi les éventuelles découvertes que vous avez faites.

Votre travail est à mettre sur transparent.

Ensuite, chaque groupe présente son travail et un débat suit.

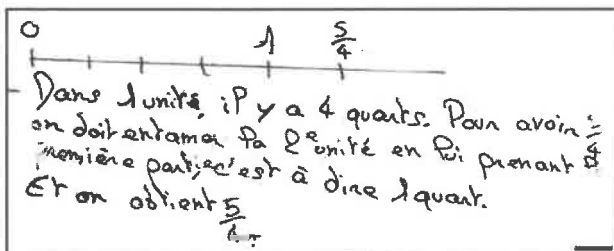
Des productions des groupes, ces groupes ayant été formés à partir des travaux individuels et de façon à être hétérogènes.



1

n°1 et 3: On divise la demi-droite par le nombre du numérateur.

2



3

n°1: On divise l'unité en trois morceaux et on a pris le premier.

n°2: On a divisé l'unité en 5 morceaux et on a pris le deuxième.

n°3: On a divisé l'unité en 4 morceaux\* et on a pris le cinquième.

\* et comme il en manquait 1 on l'a rajouté après 1 ( $\frac{4}{4}$ )

4

Remarque :

Il y a cependant une grande diversité entre la production des groupes, entre les groupes 1 et 4 par exemple ! Cette diversité peut provenir de la compréhension de la fraction-partage, de la compréhension de ce qu'est une demi-droite graduée, etc. Le travail en groupes permet :

- aux élèves d'en prendre conscience et de régler un certain nombre d'erreurs entre eux,
- au professeur, qui observe ses élèves travaillant en groupes, de noter leurs difficultés.

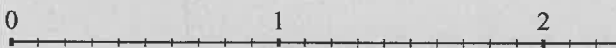
Le débat qui suit les présentations met en évidence les difficultés résistantes, qui sont autant d'éléments pour la synthèse que le professeur fait après le débat ; il utilise aussi éventuellement pour cette synthèse les observations qu'il a faites pendant le travail en groupes. Cette gestion de l'activité est une façon de gérer l'hétérogénéité de nos classes.

Ce travail a plusieurs objectifs :

- revenir sur la notion de « fraction de » (partage en parts égales, rôle du dénominateur et du numérateur dans ce partage). Cela est indispensable, en particulier pour les groupes 1 et 2.
- expliciter la procédure pour des fractions plus grandes que l'unité :  $\frac{5}{4}$  c'est 5 fois  $\frac{1}{4}$ , c'est aussi  $1 + \frac{1}{4}$  puisque  $\frac{4}{4} = 1$ .  
Les égalités correspondantes sont écrites :  
 $\frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4}$  ;  $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$  (voir les travaux des groupes 3 et 4).
- préciser la notion d'abscisse : pour placer un point correspondant à  $\frac{1}{3}$ , on partage le segment unité en trois parties égales puis on place l'étiquette  $\frac{1}{3}$  à l'extrémité du premier tiers à partir de 0. C'est l'abscisse du point (voir les travaux des groupes 3 et 4).

## 2. Deuxième partie

Travail individuel



Place le point d'abscisse  $\frac{2}{3}$  sur la demi-droite graduée ci-dessus.

De même, place le point d'abscisse  $\frac{8}{6}$ , puis les points d'abscisse  $\frac{2}{6}$  et  $\frac{12}{6}$ .

Quelles remarques fais-tu ? Explique.

Puis compare ces quatre fractions.

Travail par quatre

Comparez vos travaux et mettez-vous d'accord sur un transparent.

Le débat commence après les présentations.

La synthèse qui suit les présentations des travaux de groupes et le débat permettent :

- de revenir sur le fait que le dénominateur de la fraction correspond au partage de l'unité, à partir de  $\frac{2}{3}$  que certains élèves placent à  $\frac{2}{6}$ . Il peut s'agir là de la prégnance d'exercices répétitifs (les fractions à placer correspondant toujours à un partage déjà effectué de l'unité) dans lesquels le sens de la fraction n'intervient pas et l'exercice se réduit à un comptage de graduation
- d'écrire  $\frac{8}{6} = \frac{6}{6} + \frac{2}{6}$  ;  $\frac{12}{6} = 2$ . Suivant les réactions des élèves, on remarque ou pas que cela correspond à  $12 : 6$ .
- de remarquer que  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$  et  $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$  ; pour arriver à  $\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \quad \begin{array}{l} 1 \times 2 = 2 / 3 \times 2 = 6 \\ \text{car une fois deux égale deux. 2.} \\ \text{et trois fois deux égales six. 6} \end{array}$$

- dans la comparaison des fractions, de faire la relation entre l'ordre des fractions sur la demi-droite et l'ordre croissant des numérateurs pour un même dénominateur
- de préciser aussi comment il faut comprendre « comparer » dans ce contexte, ce qui n'est pas évident pour tous les élèves (voir ci-dessous).

Je compare: Dans les 3 fractions, le dénominateur est dans le table de 3.

### 3. Troisième partie

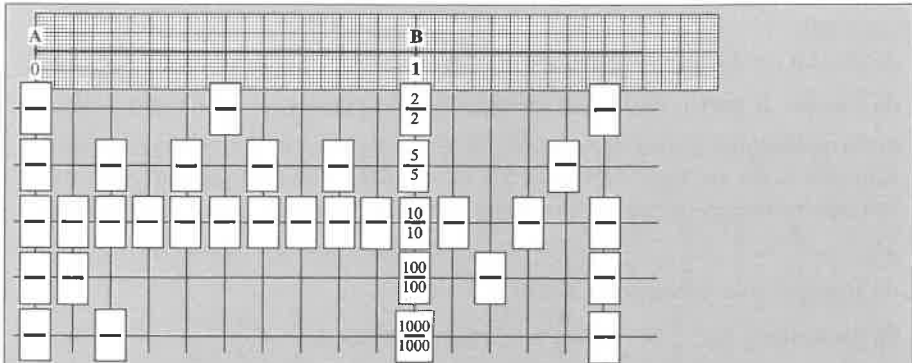
À main levée, sur une demi-droite graduée, place :  $\frac{15}{2}$  ;  $\frac{24}{3}$  ;  $\frac{26}{3}$ .

C'est un travail individuel.

Les élèves utilisent des méthodes différentes (comptage des tiers, comptage par paquets de 3, quotient). Les envoyer au tableau pour les expliciter permet :

- de faire le point sur ce qu'est une demi-droite graduée (origine, unité, choix de l'unité, graduations),
- de faire un pas de plus vers la fraction-quotient pour ne pas avoir à compter sur la demi-droite graduée,
- de valider l'existence de différentes méthodes.

#### 4. Quatrième partie



Sur la demi-droite graduée apparaît l'unité.

Les autres lignes horizontales, indiquées par des fractions  $\left(\frac{2}{2}, \frac{5}{5}, \text{etc.}\right)$  correspondent à des partages possibles de l'unité.

Sur chacune de ces lignes, tu vois des cadres avec seulement une barre de fraction. C'est à toi de compléter ces fractions en écrivant le numérateur et le dénominateur qui manquent. Les lignes verticales sont là pour t'aider à te reporter sur la demi-droite graduée.

C'est un travail individuel.

La synthèse permet, en particulier :

- de définir ce qu'est une fraction décimale,
- de faire remarquer que  $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ , etc.

Les deux questions suivantes sont des travaux individuels, avec un bilan après chaque question.

En utilisant le papier millimétré ci-dessus, complète l'égalité suivante :

$$\frac{25}{100} = \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{100}$$

Le bilan permet de vérifier la compréhension de l'utilisation du papier millimétré et de revenir sur  $\frac{20}{100} = \frac{2}{10}$  ; il permet aussi d'introduire la somme de deux fractions de dénominateurs différents à partir de la demi-droite graduée.

Écris  $\frac{342}{10}$  sous la forme de la somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale.

Le bilan permet de revenir sur les différentes stratégies possibles, en particulier  $\frac{342}{10} = \frac{340}{10} + \frac{2}{10} = 34 + \frac{2}{10}$ .

Écris  $\frac{34\,025}{1000}$  sous la forme de la somme d'un nombre entier et de fractions décimales.

Différentes propositions d'élèves sont écrites au tableau, sur lesquelles les élèves

ont à se prononcer. Les propositions justes sont validées et les égalités écrites. La synthèse permet d'arriver à la décomposition en fractions décimales sous la forme  $n + \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1\ 000} + \dots$ ,  $n$  étant un nombre entier le plus grand possible,  $a, b, c, \dots$ , des entiers inférieurs à 10.


À partir de ce moment, le professeur fait le lien entre cette écriture et l'écriture décimale à partir du tableau de numération et met en évidence que la virgule est une notation conventionnelle. Cela intéresse beaucoup les élèves quand on leur montre qu'il y a eu d'autres notations, celle de Stevin en particulier, qui est à l'origine de la nôtre (voir en annexe, page suivante).

### Remarque

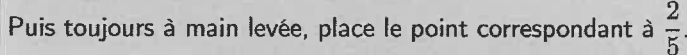
Les résultats de l'évaluation de la rentrée 2006 laissent à penser, au moins dans notre collège, que les résultats des élèves sur la fraction-partage sont meilleurs que par le passé. Mais peut-être est-ce aussi lié au travail entrepris sur ce point avec les professeurs des écoles dans le cadre d'une liaison écoles-collège, depuis plusieurs années. Il n'en reste pas moins que la première partie de l'activité est toujours indispensable pour un certain nombre d'élèves. Cela amène donc à envisager deux utilisations de cette activité :

- une utilisation en classe entière pour une classe « faible » ;
- une utilisation « différenciée » pour une classe de niveau « normal ». Dans ce cas, la première partie pourrait être faite avec les élèves en difficulté, dans une structure type « aide individualisée ». Le reste de l'activité serait alors poursuivi en classe entière, en commençant par une situation analogue à celle de la première partie, mais sur une demi-droite graduée n'ayant que 1 et 2 comme graduations marquées :


**Travail individuel**



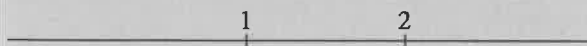
À main levée, sans mesurer, marque un point correspondant à  $\frac{2}{3}$  sur la droite graduée ci-dessus.



Puis toujours à main levée, place le point correspondant à  $\frac{2}{5}$ .



Puis, encore à main levée, place le point correspondant à  $\frac{5}{4}$ .



**Annexe** La première partie de la disme - Des définitions  
(d'après un texte de Simon Stevin, merci à Fabienne Lanata  
pour la transcription).

**DEFINITIONS 1**

Disme est une espèce d'Arithmétique, inventée par la Dixième progression, consistant en caractères des chiffres, par lesquels se décrit quelques nombres, et par laquelle on dépêche par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes.

**EXPLICATIONS**

Soit quelque nombre de mille cent onze, décrit par caractères des chiffres en cette sorte, auxquels appert que chaque 1 est la dixième part de son prochain caractère précédent. Semblablement en 2 378, chaque unité du 8, est la dixième part de chaque unité du 7. Et ainsi de tous les autres. Mais parce qu'il est convenable que les choses desquelles on veut traiter, ayant des noms, et que cette manière de computation est trouvée par considération de telle dixième ou disme progression, voire qu'elle consiste entièrement en cela, comme apparaîtra ci-après, nous nommons ce traité proprement et convenablement la DISME. Par là même on peut opérer avec nombres entiers sans rompuz en tous les comptes se rencontrant en nos affaires, comme sera démontré au suivant.

**DEFINITION 2**

Tout nombre entier proposé se dit COMMENCEMENT, son signe est tel ①.

**EXPLICATION**

Par exemple quelque nombre proposé de trois cent soixante quatre, nous le nommons trois cent soixante quatre commencements, les décrivant en cette sorte 364 et ainsi de tous les autres semblables.

**DEFINITIONS 3**

Et chaque dixième partie de l'unité de commencement nous la nommons PRIME, son signe est tel ②; chaque dixième partie de l'unité de prisme nous la nommons SECONDE, son signe est tel ③. Et ainsi des autres chaque dixième partie, de l'unité de son signe précédent, toujours en l'ordre, un d'avantage.

**EXPLICATION**

Comme 2① 1② 7③ à dire 2 Commencements 1 Primes 7 Secondes; et ainsi se pourrait procéder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire, que selon cette définition, les dits nombres font  $2 \frac{1}{10} \frac{7}{100}$  ensembles  $\frac{217}{100}$ .

Semblablement 8① 9② 3③ 7④ valent :  $\frac{8}{10} \frac{9}{100} \frac{3}{1000} \frac{7}{10000}$  ensembles  $\frac{8937}{10000}$ . Et ainsi d'autres semblables. Il faut aussi savoir que nous n'usons en la DISME d'aucun nombre rompuz, aussi que le nombre de multitude des signes, excepté n'excède jamais le 9. Par exemple, nous n'écrivons pas 7① 12② mais en leur lieu 8① 2② car ils valent autant.

**DEFINITION 4**

Les nombres de la précédente seconde et troisième Définition se disent en général NOMBRES DE DISME.

Fin des Définitions