

DES NOMBRES AU COLLÈGE

Parcours vers le réel...



Commission Inter-IREM Collège
Brochure APMEP n° 181
ISBN 2-912-846-57-9



DES NOMBRES AU COLLÈGE

Parcours vers le réel...



Commission Inter-IREM Collège
Brochure APMEP n° 181
ISBN 2-912-846-57-9

PRÉSENTATION

La Commission Inter IREM Collège a pour objectif essentiel de mener une réflexion sur tout sujet de fond ou d'actualité concernant l'enseignement de mathématiques au collège.

C'est dans ce cadre que ses membres se sont engagés dans la réalisation d'une brochure sur les nombres du Collège en continuité avec l'enseignement primaire et dans le respect des nouveaux programmes.

Les articles de cette brochure ont pour vocation de présenter diverses approches des nombres au collège. Sans viser à l'exhaustivité, ils proposent des situations variées pour introduire ces différents types de nombres ou prolonger l'étude de ceux déjà vus en Primaire. Le texte d'introduction précise le contenu de la brochure.

Cette brochure n'aurait pu être écrite sans l'investissement de tous les membres de la Commission Inter IREM Collège. Aussi nous tenons à remercier tous ceux qui ont participé à sa réalisation.

Nous terminerons en soulignant l'intérêt de la collaboration avec l'APMEP qui nous a fait profiter de son expérience en matière de publication. Nous adressons en particulier nos chaleureux remerciements à Jean BARBIER qui a assuré avec talent la mise en page définitive de cet ouvrage.

Fabienne LANATA et Vincent PAILLE
Responsables de la Commission Inter-IREM Collège

Tout au long de cette brochure, vous trouverez des problèmes (encadrés et repérés par l'étiquette *Un petit problème*).

Sources de ces problèmes :

1. Sudoku particulier : d'après le Sudomath de Christine OUDIN, professeur au Lycée Camille Claudel à Troyes.
2. Battons le pavé : un classique des rallyes.
3. Vide Greniers : Problème plus connu comme « la vache et le paysan »
4. Tiroirs : IREM de Paris Nord
5. Carte bancaire : IREM de Paris Nord.
6. Division par 7 : IREM de Lyon, L@ feuille à Problèmes
<http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille7/fpb7.htm>
7. C'est tout rond : d'après l'almanach 2000 de la régionale APMEP de Lyon.
8. La vie de Diophante : problème attribué à Metrodorus (vers 500).

SOMMAIRE

Présentation

Fabienne LANATA, Vincent PAILLET (Responsables de la Commission) ... 2

Préface

René CORI (Président de l'ADIREM, directeur de l'IREM Paris 7) 4

Introduction

Dominique BÉNARD,

Nombres et calculs au Collège : instituer une cohérence 9

Partie 1 : Les rationnels

En sixième : *Reconstruction des nombres décimaux*

Annick MASSOT et Georges PONS - IREM des Pays de la Loire 24

En sixième : *Saut de puce*

Groupe didactique des maths - IREM d'Aquitaine 33

En cinquième : *Introduction de la somme de deux nombres
en écriture fractionnaire*

Vincent PAILLET - IREM d'Orléans

et Mireille SAUTER - IREM de Montpellier 37

Partie 2 : Les relatifs

En cinquième : *Des équations pour introduire les nombres relatifs*

Groupe didactique des maths IREM d'Aquitaine 53

En cinquième : *Des déplacements pour introduire les nombres relatifs*

Christian JUDAS et Georges PONS - IREM des Pays de la Loire

d'après une idée de Martine JANVIER 59

Partie 3 : Les irrationnels

En troisième : *La racine carrée au collège*

Jean-Claude FÉNICE, Guillaume FRANÇOIS,

Fabienne LANATA, Béatrice LEGOUPIL-FRACKOWIAK,

Dominique POIRET - CII Collège 68

Partie 4 : Un bilan sur les nombres au collège

En troisième : *Synthèse sur les nombres au collège*

Annick MASSOT et Georges PONS - IREM des Pays de la Loire 94

En troisième : *Des exposés... pour lire, écrire et dire sur les mathématiques*

Annick MASSOT et Georges PONS - IREM des Pays de la Loire 99

Bibliographie 103

PRÉFACE

La brochure que vous vous apprêtez à découvrir entre dans le cycle des publications que le réseau des IREM met très régulièrement à la disposition des enseignants de mathématiques. Aux productions de chacun des IREM s'ajoutent celles qui, comme ici, sont le fruit des travaux des commissions nationales inter-IREM (CII). L'ensemble constitue un outil précieux, bien connu et largement utilisé par les collègues.

Mais il se trouve que cette parution arrive vraiment à point nommé, aussi bien par le sujet abordé (l'enseignement du calcul au collège) que par la façon de le traiter, emblématique du travail des IREM et de celui de l'APMEP (qui co-édite cette publication).

Les controverses souvent vives que suscite aujourd'hui l'éducation se cristallisent autour de deux apprentissages de base : celui de la langue et celui du calcul.

Une forte pression s'exerce sur l'école pour qu'elle se concentre sur « les fondamentaux » (entendez : *lire, écrire, compter*). Pour les mathématiciens, le calcul représente donc un enjeu crucial, et l'amélioration de son enseignement un véritable défi.

Pour le relever, la tentation est hélas forte de revenir à des méthodes d'un autre âge, dont l'efficacité, déjà douteuse alors, est contestée aujourd'hui par la grande majorité des spécialistes de l'éducation en général, et de l'enseignement des mathématiques en particulier. Privilégier la répétition mécanique au détriment de la réflexion, l'exécution machinale de routines algorithmiques au détriment d'une compréhension des concepts qui les régissent, le bachotage au détriment du raisonnement : voilà bien une orientation qui risquerait si elle devait prévaloir de compromettre durablement les chances de rendre notre enseignement plus efficace et plus performant.

Cela serait en tout cas en totale contradiction avec la démarche qui a toujours été celle des IREM et de l'APMEP, celle qui exige de nous un questionnement de tous les instants, une adaptation au public auquel nous nous adressons, un recours à l'ensemble des ressources qui sont à notre disposition : expérimentations dans les classes, réflexions théoriques conjuguées des mathématiciens et des didacticiens, croisement des points de vue des acteurs d'horizons divers (universitaires et chercheurs, enseignants de terrain, inspecteurs...), apport de nouvelles technologies, etc. Non, l'enseignement des mathématiques, à quelque niveau que ce soit, n'est pas une simple formalité qu'on pourrait confier à un premier répétiteur venu !

C'est cet état d'esprit qui a animé les membres de la CII *Collège* qui ont réalisé cette brochure. C'est lui qui imprègne les pages qui suivent. Elles s'adressent

des collègues qui se posent des questions et qui conçoivent leur propre formation comme partie intégrante de leur métier. Ils sont nombreux, ces enseignants qui sont, en permanence, demandeurs de formation, demandeurs de ressources actualisées, demandeurs d'espaces de réflexions et d'échanges. Ils sont en tout cas bien plus nombreux que ne pourrait l'indiquer les chiffres de fréquentation d'une formation continue institutionnelle que tout le monde s'accorde à considérer comme sinistrée ¹. Ce que ces collègues trouveront ici, comme toujours dans les publications des IREM, c'est le fruit d'un véritable travail de recherche, mené par des équipes plurielles et conjuguant les apports de la théorie et de la pratique, de la discipline elle-même et de la didactique, en passant par plusieurs champs connexes (histoire, philosophie et épistémologie des mathématiques). Ce travail de recherche n'a hélas pas à ce jour de reconnaissance officielle. Il est pourtant la clé d'une formation continue digne de ce nom et l'institution serait bien avisée de prendre acte de ce besoin. En attendant, il faut saluer le travail accompli, dans des conditions souvent difficiles, par les collègues qui croient en l'utilité de cette démarche et nous livrent donc ici le fruit de leurs réflexions et de leurs expérimentations.

L'ouvrage est structuré en quatre grandes parties, précédées d'un article introductif général qui nous donne quelques outils conceptuels importants permettant d'éclairer l'ensemble. Chacune des trois premières parties est ensuite consacrée à une classe importante de nombres (rationnels, relatifs, irrationnels). On pourrait discuter de l'ordre adopté (qui est, grosso modo, chronologique relativement aux programmes du collège). Mais l'important est que, dans chaque cas, la question traitée fait l'objet d'un tour d'horizon assez complet. Chaque partie est organisée suivant les niveaux d'exposition étudiés, ce qui permettra au lecteur intéressé par un niveau donné d'aller droit au but. Une quatrième partie, particulièrement opportune, vient faire une synthèse de ce qui précède, sous la forme d'un bilan sur la notion de nombre après les apprentissages de la classe de troisième, bilan recommandé par le programme officiel.

Les responsables de l'édition ont eu l'excellente idée de faire débiter chaque partie par une courte présentation de son contenu, et surtout de nous proposer, à titre d'intermèdes, de petits problèmes plaisants et délectables que vous aurez, j'en suis sûr, plaisir à examiner. Enfin on trouvera une bibliographie qui a l'avantage d'être à la fois assez succincte pour ne pas décourager le lecteur et assez riche pour lui ouvrir des perspectives variées de prolongement de son travail.

Venons-en au cœur même de l'ouvrage, c'est-à-dire au contenu des divers articles proposés. Ils ont en commun de s'appuyer systématiquement sur des expérimentations menées dans les classes et d'en proposer un commentaire et

¹Voir le rapport édifiant de l'académie des Sciences : « *La formation des professeurs à l'enseignement des sciences* », novembre 2007, page 14. Le travail des IREM y est d'ailleurs plusieurs fois cité en exemple.

http://www.academie-sciences.fr/actualites/textes/formation_13_11_07.pdf

un éclairage invitant à dépasser le cadre des expérimentations en question, en allant plus loin, en explorant de nouveaux chemins, en réutilisant ce qui a fait ses preuves et en mettant en question ce qui n'a pas convaincu les expérimentateurs. Il est en effet important de souligner que les écueils, les obstacles rencontrés, les éventuels échecs enregistrés, ne sont pas escamotés. Bien au contraire, ils « servent de leçon » et permettent de suggérer des améliorations. Comme d'habitude, le principe de l'analyse *a posteriori* venant en contrepoint des hypothèses de travail initiales s'avère excellent (voir notamment la partie 3). Un exemple très significatif est fourni par le recours à la calculatrice (voir pages 57 ou 84) : l'usage que les élèves en font nous laisse souvent perplexes et est pour nous une source d'interrogation permanente. Certains, un peu timorés en concluront qu'il vaut mieux renoncer à cet outil, d'autres au contraire en développeront l'utilisation, mais en s'entourant de précautions pédagogiques sérieuses.

Sur le contenu mathématique proprement dit, je me bornerai ici à une seule remarque, mais je la crois importante. Nos collègues nous parlent des nombres c'est-à-dire des objets mathématiques par excellence, de ceux qui sont au cœur de notre science, qui en sont la raison d'être. Mais ce qu'ils nous en disent met parfaitement en lumière l'extraordinaire complexité de l'organisation de ces êtres fondamentaux et surtout l'ampleur de la tâche qui consiste à amener nos élèves à les apprivoiser. En lisant l'un ou l'autre de ces articles, sur une question pour nous mathématiquement limpide (par exemple, l'addition des rationnels), on sera frappé par la diversité des points de vue, par le foisonnement des méthodes, mais on le sera encore davantage en constatant que la lecture nous aura suggéré encore d'autres idées, d'autres façons d'aborder la question, d'autres expériences à tenter. On verra clairement combien, sur une question aussi importante et aussi sensible que le calcul au collège, notre enseignement peut tirer profit de ce type de réflexion, de ces échanges, de ce recul.

Au fond, il me paraît plus utile de dire ce que ne sont pas les témoignages et réflexions rassemblés ici, plutôt que de tenter d'en faire une description dont le lecteur se passera fort bien : il jugera lui-même sur pièces !

Ce que cette brochure n'est pas, ce qu'elle ne saurait être, ce qu'aucune brochure IREM ne saurait être, c'est un recueil d'expériences clés en mains, d'activités toutes faites, de séquences de travail pour des séances en classe. La démarche est tout autre : sur des points importants et délicats de l'enseignement des mathématiques, on fait le constat de difficultés rencontrées par les élèves, on élabore dans des conditions données, avec des élèves donnés, un ou plusieurs scénarios d'enseignement, plusieurs façons d'aborder une question, plusieurs approches théoriques, plusieurs dispositifs pratiques. Tout cela est discuté, expérimenté, ré-expérimenté, puis, si les intervenants jugent que c'est opportun, cela est livré à notre réflexion et à notre appréciation. « Voilà ce que nous avons essayé de faire ». « Voilà comment ça s'est passé ». « Voilà les points positifs ». « Voilà

les obstacles ». « Voilà les commentaires que cela nous inspire ». Au lecteur de s'approprier ce qui lui paraît utile. À lui de confronter ce qui lui est proposé avec sa propre expérience, avec ses propres réflexions, avec ses propres compétences, avec son regard personnel, avec les spécificités de son établissement, de ses classes, de ses élèves.

Nos collègues qui s'expriment ici ne prétendent à aucun moment détenir « le » bon point de vue. Ils n'ont rien d'autre à démontrer que des résultats mathématiques ! En nous livrant leur témoignage, ils nous invitent en fait à y adjoindre le nôtre, à contribuer à notre tour à ce précieux échange. Ils auront atteint leur objectif s'ils font des émules. On l'a dit, les conditions ne sont peut-être pas aujourd'hui les meilleures pour cela. Mais la vocation du réseau des IREM, comme celle de l'APMEP, est précisément de favoriser ces échanges et de répondre ainsi à l'attente de nombreux professeurs. N'hésitez pas à y apporter votre contribution.

Je voudrais souligner pour terminer la grande vitalité de notre CII *Collège*, animée par des collègues particulièrement dynamiques, qui a su se renouveler en attirant de jeunes professeurs et assurer une transition sereine en faisant bénéficier ceux-ci de l'expérience des anciens, toujours sur la brèche. Tous portent haut et fort le flambeau et l'esprit des IREM. Ceux qui ont contribué à la réalisation de cette brochure ont fait honneur à notre métier. Qu'ils en soient remerciés.

René CORI

Président de l'ADIREM

Directeur de l'IREM de Paris 7

INTRODUCTION

La Commission Inter IREM Collège poursuit dans cet ouvrage, centré sur l'introduction des nombres, la mise à disposition des enseignants d'articles de réflexion et de propositions d'actions pour les classes.

On peut introduire les nombres en accompagnant les élèves dans une visite comme on visiterait une forêt. Prêtons l'oreille à ce qu'un « grand » expliquerait à un « petit » : « Tu vois, ici il y a des nombres formés de deux entiers séparés par une virgule : ce sont des décimaux. Là, ils sont séparés par une barre : ce sont des fractions. Ceux avec un drôle de chapeau : ce sont des racines et l'autre tout seul, au fond, on dit qu'il est utile aux sages... c'est π ! » Cette métaphore est bien sûr caricaturale. Néanmoins, l'exemple de l'introduction dans les programmes de la racine carrée en quatrième par appui sur le touche  peut conduire, par manque de problématisation, à des conceptions naïves assez proches de celles énoncées ci-dessus.

La pratique du « bain numérique », au delà d'une reconnaissance superficielle conduit à des obstacles qui restent prégnants tout au long de la scolarité. Nous avons choisi une tout autre approche. Il s'agit d'aller à la racine des arbres de la forêt numérique, de voir sur quel terreau ils poussent, c'est-à-dire quels problèmes amènent à l'utilisation de nouveaux nombres, justifiant ainsi leur introduction et leur forme spécifique d'écriture.

Dans un premier article, Dominique BÉNARD fixe le cadre de notre réflexion. Il survole l'ensemble de la forêt, illustrant les continuités, pointant les ruptures là où un problème va rendre nécessaire un saut dans la conception des nombres.

C'est dans cet esprit que nous avons élaboré un ensemble cohérent d'activités où les nouveaux nombres apparaissent comme réponse à un manque. Par exemple, dans le domaine numérique, les entiers ou les décimaux ne permettent pas de compléter certaines égalités. Dans le domaine géométrique, les décimaux ne permettent pas de repérer certains points de la droite graduée, il faut passer aux rationnels pour combler (en partie) cette lacune. Les rationnels montrent aussi leurs limites quand il faut trouver le côté d'un carré d'aire double d'un carré donné.

La fin du collège étant l'occasion d'un bilan, les deux derniers textes proposent des manières de l'effectuer.

Nombres et calculs au collège

instituer une cohérence plutôt que construire des structures

BÉNARD Dominique, IREM du Mans

Repère - IREM n° 47 – avril 2002

Des entiers au calcul littéral, en passant par les décimaux, les écritures fractionnaires, la « touche $\sqrt{\quad}$ » de la calculatrice, le vocable « nombre » englobe une grande diversité d'écritures, de paroles, de gestes, d'algorithmes, de représentations.

Cette diversité, renforcée par la variété des travaux et situations où intervient le numérique, est tout à la fois constitutive d'une activité mathématique foisonnante et source de difficultés spécifiques pour l'apprentissage : l'apparition de divers genres de nombres et de calculs au long d'un cursus scolaire qui se préoccupe peu d'instaurer une cohérence conceptuelle vient appuyer une image déjà éclatée des mathématiques et un rapport éparpillé à sa maîtrise ; d'autant que, automatisme des calculs aidant, s'installe une impression d'insignifiance qui légitime qu'une conception étroitement legaliste (« Est-ce que j'ai le droit de ... ? ») prenne le pas sur une démarche constructrice et transformatrice du sens des activités numériques.

Derrière le vocable « nombre » et au-delà des activités numériques, quels concepts, quelles représentations chez nos élèves ? Mais aussi chez les futurs enseignants, puisque l'approche constructive des ensembles de nombres a presque disparu de tous les niveaux d'enseignement, formation des maîtres comprise ?

Il semble donc important de suggérer, sinon d'élaborer, des activités, de dégager des problématiques susceptibles de mieux faire appréhender par nos élèves (et par nous aussi leurs professeurs) la notion de nombre, son universalité construite, expression d'une diversité toujours présente dans la pratique des travaux numériques. Ce faisant, il est impératif de respecter le fait que les nombres apparaissent au cours de la scolarité en dehors de toute dynamique constructive. Il s'agit donc de viser à instituer une cohérence qui ne repose pas sur la reconstruction formelle (des structures), mais qui passe par un retour sur les significations et leurs transformations des divers usages du nombre en lien avec des problématiques abordables au niveau du collège.

Forme, nombre et calcul

Le nombre sert à compter².

En ce sens premier, qui est celui de la comptine mais aussi des travaux de l'École Élémentaire, il n'y a de nombre qu'entier. Et les premières opérations que l'on réalise peuvent toutes se penser comme courts-circuits de comptages. Si j'ai compté, d'un côté 25 billes et de l'autre 13, l'addition $25 + 13 = 38$ se substitue au geste de rassemblement des deux collections et au comptage de l'ensemble ; la soustraction $25 - 13 = 12$ se substitue au prélèvement par comptage de 13 billes dans la collection de 25 et au comptage des billes restantes. Par ailleurs, la multiplication s'apprend comme court-circuit d'additions, la division avec reste comme court-circuit de soustractions, chacune de ces deux opérations se fonde encore sur le geste, devenu inutile, du comptage.

Mesurer, c'est encore compter.

Il s'agit bien d'abord de compter combien de fois une grandeur prise comme unité est contenue dans la grandeur à mesurer. Là encore, on ne manipule d'abord que des nombres entiers, en écriture décimale, auxquels on adjoint ensuite un nouveau signe, la virgule décimale qui indique la place des unités et l'endroit où l'on en change, par tranches de dix, lorsque le premier geste de mesure « ne tombe pas juste ». Quoiqu'il en soit, toute mesure effective renvoie à un comptage ; que l'on dise par exemple que cette porte mesure 1,53 mètres de large, on signifie alors le comptage possible de 153 centimètres.

Ainsi l'écriture décimale de nombres à virgule ne renvoie pas ici et tout d'abord à la création de nombres nouveaux, mais bien plutôt à une manipulation nouvelle des nombres entiers en écriture décimale, avec indication de la place de l'unité première de mesure. Ce n'est qu'ensuite, lorsque sont abordées les techniques opératoires sur les nombres à virgules que ces derniers acquièrent par ce biais le statut de nombres nouveaux c'est-à-dire ici non entiers. Mais le comptage reste le geste originaire qui en fonde l'écriture et la manipulation opératoire. Au reste, les techniques opératoires sur les nombres décimaux ne diffèrent de celles utilisées pour les nombres entiers que par la prise en compte de décalages induits par la virgule décimale.

Le comptage fonde encore l'écriture fractionnaire.

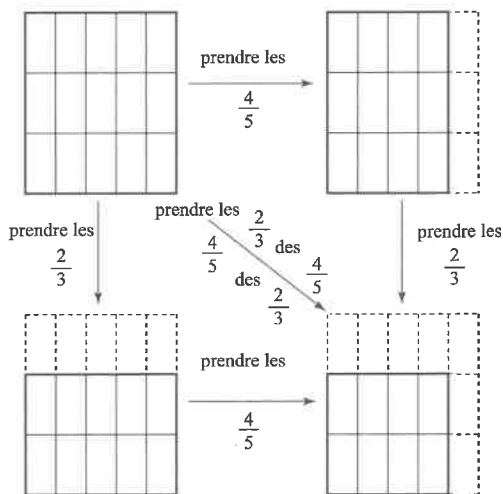
La contenance de ce vase est de $\frac{4}{3}$ de litres. Qu'est-ce à dire, sinon que pour le remplir, il faudra utiliser quatre fois ce bol dont trois seulement rempliront la bouteille appelée « litre » ? Mesure par comptage encore qui, par rapport au nombre décimal, élargit les possibilités de changement d'unité.

Ici encore, il s'agit d'abord d'une manipulation nouvelle du comptage et donc des nombres entiers. Et là aussi, ce n'est qu'à l'instant où des techniques opératoires sont élaborées pour cette écriture nouvelle qu'elle acquiert le statut

²mais aussi à comparer et ordonner. On trouvera dans [1] d'intéressantes considérations sur ces deux aspects, cardinal et ordinal, du nombre entier.

de nombre non nécessairement entier, ou même non nécessairement décimal, quoiqu'elle recouvre tous les nombres exprimés par les écritures précédentes. Peut se poser alors l'intéressante question de discriminer si un nombre exprimé dans cette écriture nouvelle est lui-même bien nouveau en tant que nombre.

Le comptage peut encore servir pour élaborer les techniques opératoires requises par cette forme nouvelle. Ainsi lorsque je veux additionner $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$, il faut, et cela est intéressant, rétablir la possibilité de rassembler deux collections d'objets « identiques », ce qui veut dire ici revenir à la situation où l'unité première a subi le même partage pour les deux fractions. Bien sûr continuer à penser la multiplication comme une addition répétée devient délicat. Mais, si l'on a établi que le produit des nombres entiers p et q permettait de compter le nombre de carrés unité compris dans le rectangle dont les deux côtés comprennent respectivement p et q segments unité, cette signification basique peut être réactivée pour comprendre que dans le rectangle dont les côtés sont respectivement $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$ du segment unité, on peut compter $2 \times 4 = 8$ rectangles dont les côtés sont respectivement $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ du segment unité, alors qu'il en faut $3 \times 5 = 15$ pour paver le carré unité. La recherche d'une unité commune, d'une mesure commune, est au cœur des opérations sur les écritures fractionnaires. La même situation éclaire par ailleurs un aspect qui rôde de manière implicite dans ces premières considérations, l'aspect « opérateur » du nombre qui condense des gestes de découpe, de décalque, de comptage. Car ce même rectangle peut s'obtenir de deux manières différentes à partir du carré unité : soit en en prenant les $\frac{2}{3}$ des $\frac{4}{5}$, soit en en prenant les $\frac{4}{5}$ des $\frac{2}{3}$, les deux voies se ramenant à en prendre les $\frac{8}{15}$ comme l'illustre la figure ci-dessous.



Rien n'est évidemment parfait et l'expression « prendre les $\frac{5}{4}$ de ... » est troublante, comme ces multiplications dont le produit est plus petit que le multiplicande. Mais ce trouble est constitutif de la construction progressive du sens « numérique » du nombre qui permettra, sans confusion, de continuer à utiliser ce verbe « prendre » même dans de telles situations où cela semble impropre « prendre les $\frac{5}{4}$ de ... » c'est quintupler le quart ou prendre le quart du quintuple³.

Faisons le point.

La diversification des procédés de comptage (comptine énumérant des individus ou des regroupements d'individus) et des procédés de mesure (changements d'unité) fonde l'apparition d'écritures nouvelles : écriture décimale entière, puis avec virgule décimale, écriture fractionnaire.

Passer de cette séquence de formes nouvelles à la distinction de trois types de nombres – entier, décimal, rationnel – est une décision opératoire d'existence dont l'examen des conséquences fonde le sens même de ces distinctions et des techniques opératoires nouvelles qui s'y rapportent.

Si, en effet, chacune de ces trois formes identifie une catégorie numérique, il importe de se demander d'abord si ces formes nouvelles produisent des nombres nouveaux ; et dans quelle mesure un même nombre est susceptible de l'une ou l'autre des trois écritures. Ici s'inscrivent les questions et les raisonnements concernant l'inclusion des trois catégories l'une dans la suivante, de l'entier au rationnel, ainsi que la discrimination des décimaux non entiers, des rationnels non décimaux, etc.

Par ailleurs, les techniques opératoires sur les formes nouvelles découlent des gestes premiers qui les fondent (compter et mesurer) et de la nécessité qu'elles prolongent les anciennes. Comment continuer à additionner, soustraire, multiplier, diviser, quand vient s'adjoindre une forme nouvelle (virgule décimale ou écriture fractionnaire) ?

En ce sens, il n'est de calcul que formel, c'est-à-dire sur des formes. Et c'est seulement au travers de cette élaboration opératoire qu'on peut attribuer à la forme nouvelle la vertu de faire émerger du numérique nouveau. Et bien qu'on puisse repérer ici, sous-jacent, l'emboîtement constructif des structures, il reste précisément sous-jacent, ne s'explicite jamais. Et ce sont alors trois gestes caractéristiques du numérique (compter, mesurer, calculer) qui permettent d'en instituer jusqu'ici une cohérence enveloppant la diversité de ses manifestations formelles.

Cette dernière remarque importe d'autant que les deux premiers gestes, compter et mesurer, vont se trouver mis à mal par l'irruption d'une autre forme, la racine carrée.

³Sur les geste et les paroles que condense l'écriture fractionnaire, je recommande [2] et [3].

Le manque du nombre

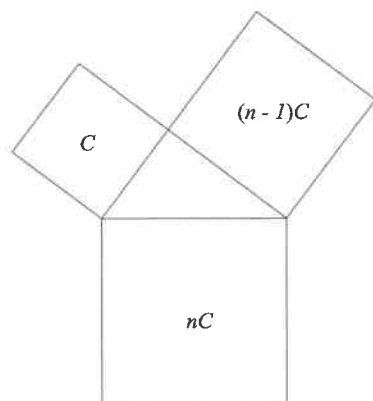
À parler trop vite de nombres irrationnels, et à ne plus parler de grandeurs incommensurables, nous perdons sans doute un point d'appui essentiel pour l'introduction de ces formes numériques nouvelles.

Sur ce sujet, le texte du programme⁴ de Quatrième se présente ainsi :

Contenu	Compétences exigibles	Commentaires
Touche  de la calculatrice	Trouver à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif.	Le théorème de Pythagore fournit l'occasion de calculer des racines carrées de nombres positifs dans des cas qui relèvent d'une situation où le nombre calculé a une signification que l'élève peut identifier. On peut aussi rattacher le calcul d'une racine carrée à des problèmes où interviennent l'aire d'un carré et la mesure de son côté.

Pour penser un enseignement qui se préoccupe d'instituer une cohérence conceptuelle des diverses écritures numériques, peut-être convient-il d'envisager les commentaires comme les véritables contenus mathématiques et le contenu comme commentaire.

Précisons : le théorème de Pythagore (mais pas seulement lui) fournit des situations géométriques où le nombre vient à manquer. De la décision qu'il doit tout de même y avoir « du nombre » découle une forme nouvelle : $\sqrt{\quad}$, et aussi la nécessité d'intégrer cette forme nouvelle aux anciennes, de continuer à calculer. L'intervention de la touche de la calculatrice devient alors un mode par lequel nous tentons de comparer ces nouvelles formes aux nombres décimaux.



Développons un exemple.

Soit à déterminer un carré dont l'aire soit n fois (n entier) l'aire d'un carré donné. Le théorème de Pythagore est l'outil (opératoire) qui permet de résoudre récursivement cette question.

Attention ! Bien que cela puisse évidemment y faire penser, il ne s'agit pas de « l'escargot de Pythagore », souvent rencontré dans les manuels de collège. Ce dernier propose une construction géométrique récursive des racines carrées des entiers, comme longueurs

des rayons de la coquille qu'il déploie. Ici, tout d'abord, il s'agit uniquement des

⁴il s'agit d'un extrait de l'ancien programme de Quatrième puisque cet article a été écrit en 2002.

aires des carrés et le théorème de Pythagore est l'outil de la résolution complet du problème posé. C'est ensuite seulement que je propose de poser la question « Par quel nombre le côté du carré a-t-il été multiplié ? » ou mieux encore : « Y a-t-il un nombre qui, multipliant le côté du carré, produise le même résultat ? » Il y a donc renversement du point de vue de « l'escargot ». Alors que ce dernier fournit une illustration ou une représentation géométrique de racines carrées déjà là, déjà conçues comme nombres (par exemple via la calculatrice), ayant ici la solution géométrique d'un problème nous partons en quête de sa solution numérique et donc des nombres qui la réaliseront.

Le collégien n'est pas tout à fait démuni pour cette recherche, du moins s'il a déjà traversé les deux expériences suivantes :

Exp 1 : De deux carrés, l'aire la plus grande revient à celui qui a le plus grand côté.

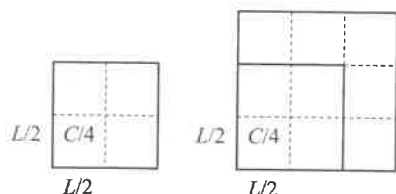
Exp 2 : Si l'on multiplie par l'entier p l'un des côtés d'un rectangle (ce qui s'opère géométriquement) et que l'on multiplie par l'entier q l'autre côté, l'aire du rectangle sera multipliée par l'entier $p.q$, produit arithmétique de p par q ; car, réalisant la chose, le nouveau rectangle est pavé de lignes (ou q colonnes) comportant chacune p copies du rectangle d'origine d'où le résultat conforme aux significations premières des nombres, des opérations, des mesures, propres à l'École Élémentaire.

Multipliant ainsi le côté du carré par l'entier n , son aire sera multipliée par l'entier $n.n = n^2$, d'où le tableau suivant :

Multipliateur du côté	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Multipliateur de l'aire	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	...

Cela saute aux yeux, les multipliateurs entiers du côté du carré sont insuffisants. Il importe alors de ne pas brusquer les choses, retarder encore le moment du doigt sur le fameux bouton, prolonger cette expérience première du manque, et entamer une recherche avec les autres nombres déjà connus.

La deuxième expérience précédemment évoquée s'étend aux nombres rationnels, de sorte que multipliant le côté du carré par $\frac{p}{q}$, l'aire en est multipliée par $\frac{p^2}{q^2}$:



Il faut 4 petits carrés pour paver le carré d'origine, il en faut 9 pour paver le carré obtenu en multipliant le côté par $\frac{3}{2}$.

La recherche, pour doubler par exemple ou tripler l'aire du carré, peut et même doit s'éloigner du sol géométrique, plonger dans le numérique, la question devenant par exemple : « Existe-t-il un nombre rationnel, voire décimal, dont le carré *arithmétique* vaille 3 ? ». S'inaugure un travail par encadrement (Exp 1), pouvant bien avoir recours à la calculatrice (pour calculer des carrés) : ce nombre doit être compris entre 1 et 2, on constate que le milieu 1,5 est trop petit, de même que 1,7, par contre 1,8 est trop grand, etc.

Il faut savoir bien sûr quand et comment interrompre cette recherche, quand et comment annoncer qu'elle ne peut aboutir. Mais que cette annonce s'accompagne ou non d'une démonstration qu'aucun nombre rationnel n'a 3 pour carré, ce résultat n'a pas pour l'instant la signification qu'on lui attribue ensuite d'irrationalité du nombre $\sqrt{3}$, il est bien plutôt la confirmation d'un manque et cela constitue une expérience mathématique importante : à s'en tenir donc aux nombres entiers, décimaux ou rationnels, la solution, géométriquement complète de notre problème comporte bien des lacunes numériques.

Le numérique est en retard sur le géométrique, le nombre sur la figure, le calcul sur la construction raisonnée.

La décision opératoire

Décidons de combler ce retard, c'est-à-dire que, pour chaque entier p , il existe un *nombre* tel qu'en multipliant par ce nombre le côté d'un carré, son aire s'en trouve multipliée par l'entier p . Baptisons-le « racine carrée de l'entier p » et donnons lui la forme « $\sqrt{p}$ »⁵.

Force est maintenant d'examiner les conséquences de ce geste mathématique majeur.

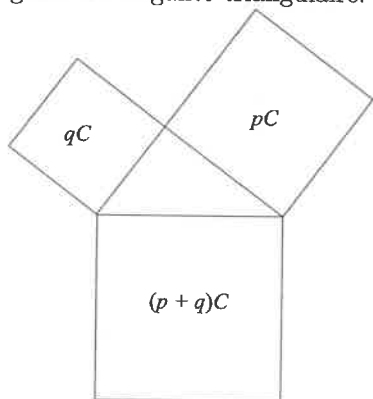
Puisque nous entendons considérer $\sqrt{p}$ comme un nombre, il nous faut comparer, calculer avec cette forme nouvelle et en même temps avec les anciennes. Pour ce faire, nous disposons du problème d'origine qui nous a mis en face du manque, et de la définition conséquente à la décision de le combler ; ensuite nous sommes guidés par la nécessité de continuer à calculer comme avant sur les formes anciennes, autrement dit nous voulons que les techniques nouvelles prolongent les anciennes y compris dans leur rapport au problème géométrique initial.

On en tire, par exemple, que le *carré arithmétique* de $\sqrt{p}$ doit être égal à l'entier p ($\sqrt{p} \cdot \sqrt{p} = p$) ; cette propriété prolonge en fait l'expérience évoquée selon

⁵La décision sur l'existence du nombre et sur son écriture, le signe, se donne ici en deux phrases. Cela semble facile. Historiquement ce ne fut pas le cas. On pourra à ce sujet consulter [4], notamment sur le lien étroit entre la possibilité d'accepter les irrationnels comme nombres et l'invention de signes, de symboles, d'écritures.

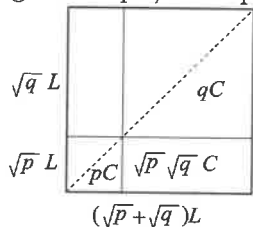
laquelle, multipliant le côté du carré par le nombre rationnel a , son aire sera multipliée par a^2 . Mais aussi que $\sqrt{p^2} = p$.

Un exemple encore : nous pouvons faire l'expérience (par comptage d'ailleurs) que, multipliant le côté du carré par le nombre rationnel a , puis le côté du nouveau carré ainsi obtenu par le nombre rationnel b , au total l'aire aura été multipliée par $a^2 \cdot b^2$; mais le côté aura ainsi été multiplié par le nombre rationnel $a \cdot b$ et donc l'aire aura été multipliée par $(a \cdot b)^2$ de sorte que, nécessairement $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$. Ce qui est important ici n'est pas tant le résultat numérique que sa mise en rapport avec la question géométrique ; si donc je multiplie le côté du carré par $\sqrt{p}$, puis par $\sqrt{q}$, l'aire aura été multipliée par $p \cdot q$, de sorte que le côté aura été multiplié par $\sqrt{p \cdot q}$, d'où suit nécessairement que $\sqrt{p} \cdot \sqrt{q} = \sqrt{p \cdot q}$. La question de $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ peut se régler sur le terrain du problème original grâce à l'inégalité triangulaire.



$$\sqrt{p} + \sqrt{q} > \sqrt{p+q}$$

Mais on peut y adjoindre une démonstration qui, tout en s'appuyant sur la géométrie, n'en opère pas moins un déplacement vers du pur arithmétique :



$$\begin{aligned} (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 &= (\sqrt{p})^2 + (\sqrt{q})^2 + 2\sqrt{p} \cdot \sqrt{q} \\ &= p + q + 2\sqrt{p \cdot q} \end{aligned}$$

On peut ensuite confirmer ce déplacement en s'interrogeant sur la forme $\sqrt{\frac{p}{q}}$ et en répondant sur le terrain numérique, encore contrôlé par la problématique première. En effet, multipliant le côté du carré par $\sqrt{\frac{p}{q}}$, puis par $\sqrt{q}$, l'aire aura été multipliée par $\frac{p}{q} \cdot q = p$, le côté aura donc été multiplié par $\sqrt{p}$, d'où l'identité $\sqrt{\frac{p}{q}} \cdot \sqrt{q} = \sqrt{p}$, de sorte que $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$.

Aller plus loin encore en envisageant la forme $\sqrt{\sqrt{p}}$ par une définition purement numérique, comme le nombre dont le carré arithmétique vaut $\sqrt{p}$.

Il y a ainsi renversement entre le géométrique et le numérique. Celui-ci avance maintenant d'un pas plus rapide que celui-là. Quel est donc le correspondant géométrique de cette forme numérique ? Comment multiplier géométriquement l'aire d'un carré par $\sqrt{p}$? Question intéressante dont la résolution renvoie à des procédures de quadrature du rectangle (construire un carré équivalent en aire à un rectangle donné), procédures abordables en collège, très liées au théorème de Pythagore⁶. Toutefois le renversement que j'évoque est pédagogiquement utile en ce qu'il annonce et prépare le moment nécessaire où la technique numérique va s'éloigner du terrain géométrique et fonctionner pour elle-même avec ses propres règles.

La (re)construction du sens

À nouveau faisons le point.

Quelque chose de tout à fait différent s'est glissé entre le doigt de l'élève et la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice. Ce n'est pas seulement une forme nouvelle, c'est le sens même des opérations qui se trouve déplacé. Et sans doute est-il possible d'amener nos élèves à la conscience de ce déplacement : dire d'un rectangle dont les côtés mesurent respectivement 2 cm et 3 cm, que la mesure de son aire est 6 cm² a le sens d'un comptage de 6 carrés de 1 cm de côté dans la surface du rectangle. Ce sens est irrémédiablement perdu pour un rectangle dont les côtés mesurent $\sqrt{2}$ cm et $\sqrt{3}$ cm et dont l'on dit encore que l'aire mesure $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ cm². Les éventuelles démonstrations d'irrationalité, si elles sont rapportées à cette question de la mesure, marquent alors cette transformation du sens.

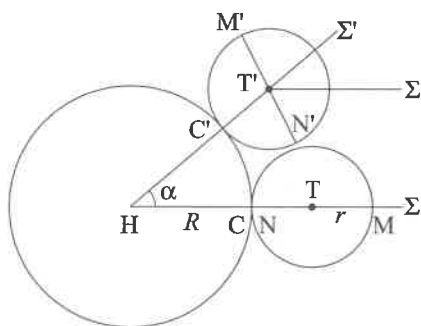
À partir de là, le comptage n'est plus l'expérience sur laquelle peut se fonder le concept de nombre, ni la signification opératoire. $\sqrt{2}$ ne compte rien, et, si elle mesure la diagonale du carré par rapport à son côté, c'est que mesurer ne se réduit plus à compter. Le produit $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ n'est plus le court circuit d'une addition répétée, on ne peut plus le dire « racine de 3 **fois** racine de 5 ». Et si l'on veut maintenir qu'il y a encore du comptage, c'est que ce comptage doit aller à l'infini. Certaines expérimentations sont possibles qui font éprouver une telle nécessité. La considération des développements décimaux, par exemple : ainsi, déterminer pas à pas (par encadrements) le développement décimal de $\sqrt{3}$, ce n'est pas seulement répondre à la question « Combien ça fait ? », c'est aussi placer cette forme numérique nouvelle parmi les anciennes, son irrationalité nous assurant alors que cette procédure ne peut qu'aller à l'infini, de sorte que la réponse à la fameuse question sera définitivement partielle. Des travaux sur la périodicité du développement décimal d'un nombre rationnel permettent

⁶Pour de telles constructions, voir notamment [5], [6], [7] et [8].

de signaler une autre marque de l'irrationalité : alors qu'il est possible de déterminer la mille deux cent trente deuxième décimale de $\frac{37}{7}$ sans avoir à expliciter la totalité des décimales qui la précèdent, pour $\sqrt{3}$ en revanche cette détermination requiert l'explicitation préalable des 1 231 décimales précédentes. On peut également renforcer ce lien du rationnel et de la périodicité par des manipulations du style :

$$A = 2,134\,3434\dots, 10A = 21,343\,434\dots, B = 10A - 21 = 0,343\,434\dots, \\ 100B = 34,343434\dots = 34 + B, \text{ d'où } B = \frac{34}{99} \text{ et } A = \frac{2\,113}{990}.$$

Dans un autre registre, le problème suivant est susceptible de faire éprouver que la distinction rationnel/irrationnel est pertinente pour la compréhension de phénomènes « concrets » voire « naturels ».



La pièce de centre T roule sans glisser sur la circonférence de la pièce de centre H. Quand elle aura fait un tour complet autour de la pièce de centre H, combien de tours autour du centre T aura effectué un point quelconque de sa circonférence comme M ou N ?

Si au départ les points H, C, N, M sont alignés comme indiqués sur la figure dans la direction Σ , au bout de combien de tours retrouvera-t-on la même situation ?

Le problème est ici posé de façon très générale. Il est évidemment recommandable d'expérimenter sur des cas particuliers : pièces identiques ($R = r$), pièces doubles ($R = 2r$ ou $r = 2R$), etc. , faisant émerger progressivement le rapport des deux rayons. Notons au passage que la résolution de ce type de problème nécessite que l'on précise à un moment le sens de l'expression « faire un tour autour de ... », autrement dit que l'on se donne des « repères ». Intéressante nécessité donc qui engage l'élève, et son professeur avec lui, dans un travail réel de modélisation.

Le négatif, l'imaginaire

Dans tout ce qui précède, il n'a pas été question des nombres relatifs. Eux aussi arrivent un jour dans le paysage numérique du Collège et posent à l'enseignement des problèmes particuliers. L'histoire témoigne d'ailleurs de la spécificité des difficultés qui font obstacle à une pensée immédiatement sereine et une manipulation directement évidente des « moindres que rien »⁷. Sort qu'ils partageront avec les « imaginaires », apparus au XVI^e siècle, devenus depuis « nombres complexes ».

⁷Sur cette histoire et sur ses liens avec des problématiques d'enseignement, on pourra consulter [9], [10], [11], [12].

Si dans la décision précédemment évoquée qu'il y a des nombres tels que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, le numérique se désarrime de l'activité de comptage, il reste toutefois fortement lié à la grandeur, à la quantité. Avec l'irruption du négatif, c'est ce dernier lien qui semble rompu : comment penser des grandeurs négatives, alors que le zéro marque l'absence, la disparition de la grandeur ? Ce qui se retrouve au niveau de l'enseignement, puisque le premier modèle qu'on en donne, celui de la droite graduée (températures, ascenseur, etc.), propose le nombre entier relatif non plus comme se rapportant à une quantité mais à une position. Ordonner des positions, cela s'entend, mais les additionner ? les soustraire ? On déplace alors la signification du nombre de la position à sa variation. De sorte que lorsque j'écris « $3 + (-2) = 1$ », le nombre 3 désigne une position, le nombre -2 ce dont elle varie, et le nombre 1 la position finale. Je peux écrire aussi « $(-2) + 3 = 1$ » et les rôles des nombres 3 et -2 se trouvent échangés. À ce stade, l'addition se présente comme opération « externe », l'aspect opérateur du nombre, toujours présent en fait mais souvent de manière implicite, est ici nécessairement explicite. Alors que l'écriture « $3 + 2$ » peut se dire « la quantité 3 augmente de 2 » ou aussi bien « à la quantité 3 j'ajoute la quantité 2 », l'écriture « $3 + (-2)$ » ne peut dans un premier temps que se dire « la quantité 3 a diminué de 2 ». Pour que, dans un second temps, on puisse y entendre « à la quantité 3, j'ajoute la quantité (-2) », il faut avoir reconstruit la signification même du terme « quantité ».

L'épissure qui arrime le nombre irrationnel au comptage, c'est le calcul sur les séries numériques, donc avec l'infini. Celle qui arrime le nombre relatif à la grandeur entrelace quantité et direction (spatiale) dans un concept de « grandeur vectorielle » qui permet également de penser les nombres complexes comme grandeurs⁸.

Mais quoiqu'il en soit des situations dans lesquelles apparaissent les nombres relatifs (repérage, équations, ...), leur statut numérique plein se constitue encore, comme pour la racine carrée, d'une décision qu'il s'agit bien de nombres et de l'examen des conséquences opératoires d'une telle décision. Nous décidons qu'il y a un nombre « -2 » qui s'oppose au nombre « 2 », comme, par exemple, « reculer de 2 pas » s'oppose à « avancer de 2 pas »⁹. Et la pratique opératoire, multiplication comprise, découle encore de la nécessité que cette forme nouvelle s'intègre du mieux possible aux formes numériques qui la précèdent. Même si certaines situations peuvent aider et aident effectivement à l'élaboration et à la compréhension des règles opératoires, le sens profond du numérique réside dans l'opérateur qui est toujours manipulation de formes.

⁸On pourra lire à ce sujet dans [12] p. 217–225, les extraits de l'*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* écrit en 1806, où ARGAND élabore l'idée de « lignes dirigées ».

⁹Lire également dans [12] p. 226–228, les extraits de l'*Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeurs négatives*, écrit en 1763, où Emmanuel KANT distingue l'opposition logique par la contradiction de l'opposition réelle sans contradiction.

Disant cela, je n'entends pas révoquer en doute les activités et modèles concrets utilisés à ce propos dans nos classes. Toutes ces expériences sensibles sont nécessaires, pédagogiquement comme terrains « concrets » d'apparition de formes numériques nouvelles, scientifiquement pour dire le lien possibles de ces formes avec un sensible qui les dépasse mais dont elles deviennent un outil de compréhension. Mais le nombre relatif, et avec lui l'écriture fractionnaire et la racine carrée, n'acquièrent leur plein sens numérique que dans la mesure où se constitue pour ces diverses formes une pratique opératoire qui dépasse et s'éloigne de tous les terrains d'épreuve où elles sont apparues nécessaires.

Conclusion

Il faudrait développer encore cette question du nombre relatif, parler ensuite du calcul littéral ...

Les lignes qui précèdent ne sauraient évidemment prétendre à dresser un panorama complet des problèmes posés par le numérique au Collège. Le geste essentiel sur lequel j'attire ici l'attention est la décision qu'il y a du nombre encore, là où il semble manquer ; décision dont on doit tirer les conséquences tant sur le plan opératoire des manipulations formelles que sur celui des significations et de leurs déplacements ou transformations. Il s'agit aussi de suggérer des pratiques pour faire le point.

Un seul terme « le nombre » ; une multitude de pratiques et de règles, des expériences sensibles, parlantes ici, muettes ailleurs. Où en sommes-nous, nous les professeurs ? Qu'en est-il à ce sujet de la formation des maîtres ? Où en sont nos élèves ? Pouvons-nous nous imaginer faire de temps en temps une pause, pour regarder avec eux les chemins parcourus, les expériences traversées, les pratiques apprises concernant *le* nombre ? Envisager de faire une place dans nos enseignements, au Collège mais aussi au Lycée et dans la formation des maîtres, pour des moments et des activités de reprise et de synthèse, propres à faire mieux appréhender ce qu'est *le* nombre dans ses diverses pratiques opératoires et les multiples situations où il opère ?

Bibliographie

- [1] DANTIZ, TOBIAS *Le Nombre Langage de la Science*, Librairie Albert Blanchard, Paris 1974
- [2] ROUCHE (Nicolas), *Le sens de la mesure*, Didier-Hatier, Bruxelles 1992
- [3] ROUCHE (Nicolas), *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?*, Ellipses, Paris 1998
- [4] BARBIN (Evelyne), Saisir l'irrationnel : dire, montrer, faire toucher, Bulletin APMEP n°400, septembre 1995
- [5] FRIEDELMEYER (Jean-Pierre), *Les aires : outil heuristique, outil démonstratif*, Repères-IREM n° 31, p.39-62, avril 1998

- [6] CHAMONTIN (Françoise), *Des aires sans mesures à la mesure des aires*, Repères-IREM n° 44, pp. 33-62, juillet 2001
- [7] PLANE (Henry), *Démontrer avec les aires, fascicule n° 1*, IREM des Pays de Loire, Centre du Mans, octobre 2000
- [8] GRAVIER (Anne) et JANVIER (Martine), *Démontrer avec les aires, fascicule n° 2*, IREM des Pays de Loire, centre du Mans, mai 2001
- [9] GAUD (Dominique) et GUICHARD (Jean-Paul), *Aperçu historique sur les nombres relatifs*, Repères-IREM n° 2, p.94-123, janvier 1991
- [10] Groupe 1^{er} cycle, *Les nombres relatifs au Collège*, IREM de Poitiers, septembre 1996
- [11] BOYÉ (Anne) et al., *Promenades historiques : les moins que rien et les imaginaires mènent au réel*, IREM des Pays de Loire, Nantes mai 1998
- [12] IREM, *Images, Imaginaires, Imaginations*, Ellipses, Paris 1998

TROIS-CENTS TIROIRS... ? QU'EST-CE ... ?

Trois cents personnes font la queue devant un bloc de trois cents tiroirs fermés numérotés de 1 à 300.



1. La première personne ouvre tous les tiroirs.
2. La deuxième ferme tous les tiroirs qui portent un numéro pair.
3. La troisième s'intéresse aux tiroirs dont les numéros sont des multiples de 3 :
si un tel tiroir est ouvert elle le ferme, s'il est fermé elle l'ouvre.
4. La quatrième s'intéresse aux tiroirs dont les numéros sont des multiples de 4 :
si un tel tiroir est ouvert elle le ferme, s'il est fermé elle l'ouvre.
5. La cinquième s'intéresse aux tiroirs dont les numéros sont des multiples de 5 : et ainsi de suite jusqu'à la trois centième personne.

Combien y a-t-il de tiroirs ouverts et quels sont ils ?
À ce moment là, le tiroir portant le numéro 12, est-il ouvert ou fermé ?

Et le tiroir portant le numéro 16 ?

PARTIE ①

LES RATIONNELS

On peut lire dans le petit Robert 1, édition 1996 :

Nombre : Concept de base des mathématiques, une des notions fondamentales de l'entendement que l'on peut rapporter à d'autres idées (de pluralité, d'ensemble, de correspondance), mais non définir.

Une telle « définition » a de quoi nous surprendre. Pourtant, qu'est-ce qu'un nombre pour nous ? C'est un élément qui appartient à un ensemble, lui-même muni d'une structure. Mais, d'un point de vue épistémologique, cette conception est relativement récente. Les nombres étaient encore récemment vus dans le Grand mémento encyclopédique Larousse de 1937 comme :

L'expression exacte de la quantité, l'expression phonétique ou écrite d'une quantité donnée.

Il paraît donc délicat de vouloir définir formellement avec nos élèves ce qu'est un nombre. Toutefois, nous devons bien manipuler ces nombres, c'est-à-dire, les nommer, les écrire, les comparer et opérer avec eux. Le fait d'opérer avec ces nombres doit arriver très rapidement après les avoir « définis ». Ils ne peuvent exister pour nos élèves qu'à partir du moment où l'on peut opérer avec eux. On retrouve alors la structure dont sont munis les ensembles de nombres.

Pour ce qui est de les nommer, nous trouvons dans la partie « Mathématiques et langages » de nos programmes :

Certaines formulations orales peuvent constituer une aide à la compréhension.

Par exemple il est plus facile, pour un élève, de concevoir $\frac{2}{3}$ plus $\frac{5}{3}$ égale à $\frac{7}{3}$ en verbalisant sous la forme « deux tiers plus cinq tiers est égal à sept tiers » plutôt qu'en oralisant l'écriture symbolique « 2 sur 3 plus 5 sur 3 égale 7 sur 3 ».

Cette oralisation est en effet plus pratique pour effectuer le calcul et nous ne devons pas nous en passer. Pourtant, nous devons garder à l'esprit que lorsque nous utilisons ces formulations, il nous arrive de changer de structure : d'une loi interne nous passons à une loi externe ou réciproquement.

Pour rappel, la construction algébrique de $\mathbb{Q}$ consiste à voir cet ensemble comme le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}$, on peut donc considérer que la multiplication est une loi interne. Or la multiplication est vue aussi comme une réitération et donc une loi externe : le périmètre d'un carré $ABCD$ est 4 fois la longueur du segment $[AB]$ et par suite, une unité étant choisie, la mesure de la longueur AB est multipliée par 4 pour trouver la mesure du périmètre de $ABCD$. Le passage de la longueur à la mesure revient à passer d'une loi externe à une loi interne.

Pour résumer, on choisit le centimètre comme unité. On note différemment ces deux produits et on note p le périmètre du carré $ABCD$ dont le côté mesure 3, on a alors :

$$p = 4 \otimes AB$$

$$mes(p) = 4 \times 3$$

où $mes(p)$ est la mesure de p . Ce point de vue est développé dans la brochure : MOTS, tome VI Grandeur - Mesure, Brochure APMEP. n° 46, 1982.

La multiplication a donc deux sens. Il est pratique de jouer sur les deux sens pour, par exemple, calculer mentalement $\frac{1}{5} \times 23$ et $\frac{1}{3} \times 12$. Dans le premier cas, on peut proposer de reconnaître dans $\frac{1}{5}$ le nombre 0,2 pour effectuer une multiplication « interne » tandis que dans le second cas, un retour à la fraction partage s'impose pour calculer le tiers de 12.

Les articles qui suivent vont aborder ces différents problèmes. Ainsi, l'article « Reconstruction des nombres décimaux », propose, grâce à la notion de fraction partage, de faire le lien entre fraction décimale et écriture des nombres décimaux. Le travail s'organise autour de quatre activités élèves utilisant la demi-droite graduée et intégrant des temps de travail individuel et collectif.

Le deuxième article se place dans le cadre d'une situation problème. En effet, si, comme le dit Kronecker, les nombres entiers sont l'œuvre de dieux et les autres sont l'œuvre des hommes, les mathématiques sont là pour donner une intelligibilité du monde et les rationnels sont là pour... rationaliser le monde (Voir à ce propos l'article de Jean-Claude Duperret : *Mathématiques et valeurs*, PLOT numéro 110, Juillet, Août, Septembre 2004). Des équations du type $ax = b$ avec a et b entiers, ne vont pas avoir de solution dans $\mathbb{D}$ et des rationnels écrits sous forme de fractions, répondront à ce problème, en complétant le lien entre fraction partage et rationnel.

Enfin, le dernier article se propose d'aborder au niveau cinquième le problème d'une opération sur les nombres en écriture fractionnaire : l'addition. Le guide-âne, utilisé comme support, est présenté en annexe.

En sixième : *Reconstruction des nombres décimaux*

Annick MASSOT et Georges PONS - IREM des Pays de la Loire

Avant la mise en place des nouveaux programmes de l'école primaire, nous constatons des erreurs récurrentes dans les cahiers d'évaluation de nos élèves de 6^{ème}, deux en particulier pour un nombre non négligeable d'élèves :

- pour certains, c'est le dénominateur qui indique le nombre de parts à prendre dans un partage déjà réalisé de l'unité,
- pour d'autres, quel que soit le partage de l'unité et quel que soit le dénominateur de la fraction à placer, si son numérateur est 1, elle correspond à la première graduation après 0.

Depuis, ces nouveaux programmes introduisent le nombre décimal à partir des fractions décimales, présentées comme un cas particulier des fractions. Cela semble être la meilleure façon pour éviter un certain nombre d'erreurs, par exemple le fait de considérer un nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule.

Cette activité a été écrite et expérimentée au moment où changeaient les programmes du CM2 puis de la sixième : nous avons considéré qu'il était important de reprendre en sixième la démarche préconisée à l'école primaire, pour revenir à la nature du nombre décimal et à la convention que représente la virgule. D'une part, il faut un certain temps avant que les changements de programme soient intégrés et ils ne le sont pas partout de la même façon. D'autre part, c'est l'occasion de mettre de la cohérence dans des connaissances que les élèves ont acquises ou sont en train d'acquérir, entre les fractions et les nombres entiers par exemple, ou entre les fractions décimales et les nombres décimaux. C'est enfin, en partant de la fraction-partage, l'occasion de préparer le travail sur la fraction-nombre qui est au programme de la classe de sixième.

La demi-droite graduée nous a semblé être un outil privilégié pour permettre cette mise en relation des nombres entre eux (entiers, décimaux, fractions) et faciliter leur comparaison.

1. Première partie

Travail individuel

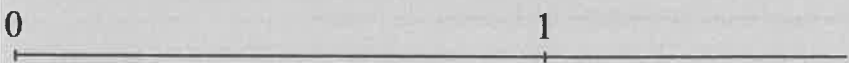


A main levée, sans mesurer, marque un point correspondant à $\frac{1}{3}$ sur la demi-droite graduée ci-dessus.

Puis toujours à main levée, place le point correspondant à $\frac{2}{5}$.



Puis toujours à main levée, place le point correspondant à $\frac{5}{4}$.



Ces travaux individuels sont ramassés par le professeur qui peut ainsi les étudier pour constituer des groupes. Suivant le contenu des travaux individuels, le professeur peut faire le choix de groupes hétérogènes ou homogènes quant à la méthode utilisée :

- hétérogènes, pour privilégier la confrontation de ces méthodes au sein des groupes ;
- homogènes pour que des méthodes utilisées ne disparaissent pas dans les débats au sein des groupes et puissent être ainsi débattues après les présentations des travaux des groupes,

mais, dans les deux cas, les groupes sont hétérogènes quant aux niveaux des élèves.

À la séance suivante :

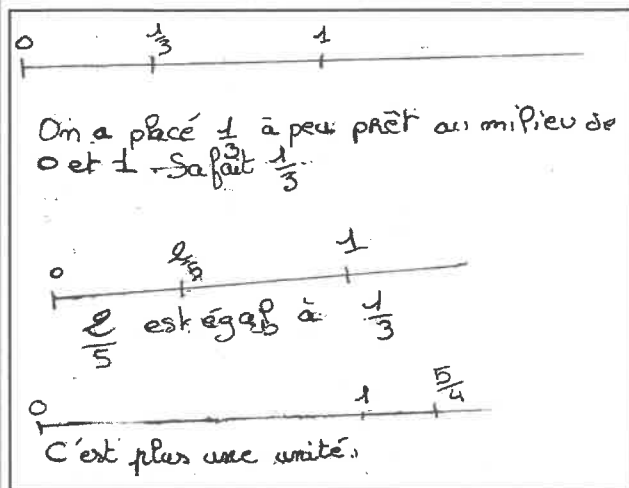
Travail par quatre

Comparez vos résultats, mettez-vous d'accord puis expliquez comment vous avez procédé pour placer les points. Précisez aussi les éventuelles découvertes que vous avez faites.

Votre travail est à mettre sur transparent.

Ensuite, chaque groupe présente son travail et un débat suit.

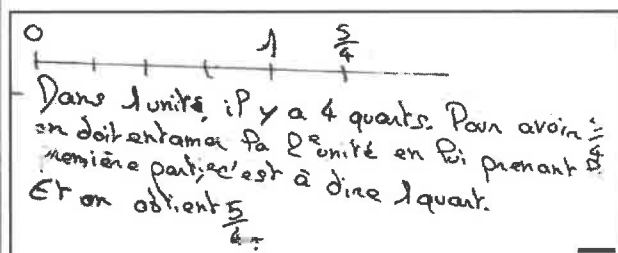
Des productions des groupes, ces groupes ayant été formés à partir des travaux individuels et de façon à être hétérogènes.



1

N°1, 2 et 3: On divise la demi-droite par le nombre du numérateur.

2



3

n°1: On divise l'unité en trois morceaux et on a pris le premier.

n°2: On a divisé l'unité en 5 morceaux et on a pris le deuxième

n°3: On a divisé l'unité en 4 morceaux et on a pris le cinquième

* et comme il en manquait 1 on l'a rajouté après 1 ($\frac{4}{5}$)

4

Remarque :

Il y a cependant une grande diversité entre la production des groupes, entre le groupes 1 et 4 par exemple ! Cette diversité peut provenir de la compréhension de la fraction-partage, de la compréhension de ce qu'est une demi-droite graduée, etc. Le travail en groupes permet :

- aux élèves d'en prendre conscience et de régler un certain nombre d'erreurs entre eux,
- au professeur, qui observe ses élèves travaillant en groupes, de noter leur difficultés.

Le débat qui suit les présentations met en évidence les difficultés résistantes, qu sont autant d'éléments pour la synthèse que le professeur fait après le débat il utilise aussi éventuellement pour cette synthèse les observations qu'il a faite pendant le travail en groupes. Cette gestion de l'activité est une façon de gérer l'hétérogénéité de nos classes.

Ce travail a plusieurs objectifs :

- revenir sur la notion de « fraction de » (partage en parts égales, rôle du dénominateur et du numérateur dans ce partage). Cela est indispensable, en particulier pour les groupes 1 et 2.

- expliciter la procédure pour des fractions plus grandes que l'unité : $\frac{5}{4}$ c'est

5 fois $\frac{1}{4}$, c'est aussi $1 + \frac{1}{4}$ puisque $\frac{4}{4} = 1$.

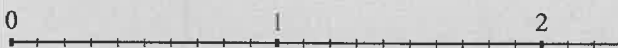
Les égalités correspondantes sont écrites :

$\frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4}$; $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ (voir les travaux des groupes 3 et 4).

- préciser la notion d'abscisse : pour placer un point correspondant à $\frac{1}{3}$, on partage le segment unité en trois parties égales puis on place l'étiquette $\frac{1}{3}$ à l'extrémité du premier tiers à partir de 0. C'est l'abscisse du point (voir les travaux des groupes 3 et 4).

2. Deuxième partie

Travail individuel



Place le point d'abscisse $\frac{2}{3}$ sur la demi-droite graduée ci-dessus.

De même, place le point d'abscisse $\frac{8}{6}$, puis les points d'abscisse $\frac{2}{6}$ et $\frac{12}{6}$.

Quelles remarques fais-tu ? Explique.

Puis compare ces quatre fractions.

Travail par quatre

Comparez vos travaux et mettez-vous d'accord sur un transparent.

La synthèse qui suit les présentations des travaux de groupes et le débat permettent :

- de revenir sur le fait que le dénominateur de la fraction correspond au partage de l'unité, à partir de $\frac{2}{3}$ que certains élèves placent à $\frac{2}{6}$. Il peut s'agir là de la prégnance d'exercices répétitifs (les fractions à placer correspondant toujours à un partage déjà effectué de l'unité) dans lesquels le sens de la fraction n'intervient pas et l'exercice se réduit à un comptage de graduation
- d'écrire $\frac{8}{6} = \frac{6}{6} + \frac{2}{6}$; $\frac{12}{6} = 2$. Suivant les réactions des élèves, on remarque ou pas que cela correspond à $12 : 6$.
- de remarquer que $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ et $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$; pour arriver à $\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \quad \begin{array}{l} 1 \times 2 = 2 \quad / \quad 3 \times 2 = 6 \\ \text{car une fois deux égale deux. 2.} \\ \text{et trois fois deux égale six. 6} \end{array}$$

- dans la comparaison des fractions, de faire la relation entre l'ordre des fractions sur la demi-droite et l'ordre croissant des numérateurs pour un même dénominateur
- de préciser aussi comment il faut comprendre « comparer » dans ce contexte, ce qui n'est pas évident pour tous les élèves (voir ci-dessous).

Je compare: Dans les 3 fractions, le dénominateur est dans la table de 3.

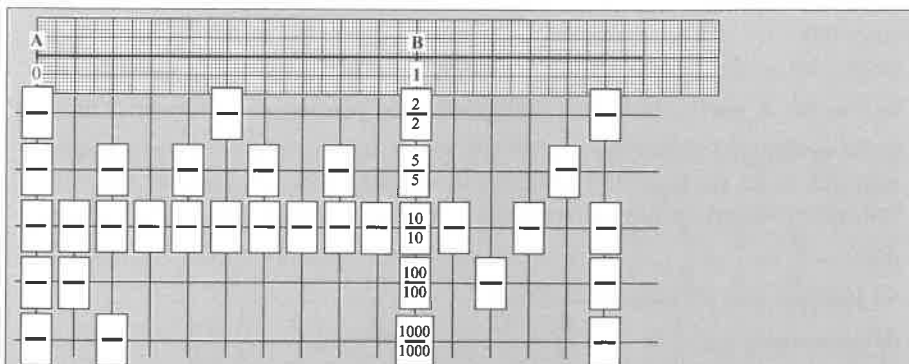
3. Troisième partie

À main levée, sur une demi-droite graduée, place : $\frac{15}{2}$; $\frac{24}{3}$; $\frac{26}{3}$.
C'est un travail individuel.

Les élèves utilisent des méthodes différentes (comptage des tiers, comptage par paquets de 3, quotient). Les envoyer au tableau pour les expliciter permet :

- de faire le point sur ce qu'est une demi-droite graduée (origine, unité, choix de l'unité, graduations),
- de faire un pas de plus vers la fraction-quotient pour ne pas avoir à compter sur la demi-droite graduée,
- de valider l'existence de différentes méthodes.

4. Quatrième partie



Sur la demi-droite graduée apparaît l'unité.

Les autres lignes horizontales, indiquées par des fractions $\left(\frac{2}{2}, \frac{5}{5}, \text{etc.}\right)$ correspondent à des partages possibles de l'unité.

Sur chacune de ces lignes, tu vois des cadres avec seulement une barre de fraction. C'est à toi de compléter ces fractions en écrivant le numérateur et le dénominateur qui manquent. Les lignes verticales sont là pour t'aider à te reporter sur la demi-droite graduée.

C'est un travail individuel.

La synthèse permet, en particulier :

- de définir ce qu'est une fraction décimale,
- de faire remarquer que $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, etc.

Les deux questions suivantes sont des travaux individuels, avec un bilan après chaque question.

En utilisant le papier millimétré ci-dessus, complète l'égalité suivante :

$$\frac{25}{100} = \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{100}.$$

Le bilan permet de vérifier la compréhension de l'utilisation du papier millimétré et de revenir sur $\frac{20}{100} = \frac{2}{10}$; il permet aussi d'introduire la somme de deux fractions de dénominateurs différents à partir de la demi-droite graduée.

Écris $\frac{342}{10}$ sous la forme de la somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale.

Le bilan permet de revenir sur les différentes stratégies possibles, en particulier $\frac{342}{10} = \frac{340}{10} + \frac{2}{10} = 34 + \frac{2}{10}$.

Écris $\frac{34\,025}{1000}$ sous la forme de la somme d'un nombre entier et de fractions décimales.

ont à se prononcer. Les propositions justes sont validées et les égalités écrites. La synthèse permet d'arriver à la décomposition en fractions décimales sous la forme $n + \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1\,000} + \dots$, n étant un nombre entier le plus grand possible, $a, b, c, \dots$, des entiers inférieurs à 10.

À partir de ce moment, le professeur fait le lien entre cette écriture et l'écriture décimale à partir du tableau de numération et met en évidence que la virgule est une notation conventionnelle. Cela intéresse beaucoup les élèves quand on leur montre qu'il y a eu d'autres notations, celle de Stevin en particulier, qui est à l'origine de la nôtre (voir en annexe, page suivante).

Remarque

Les résultats de l'évaluation de la rentrée 2006 laissent à penser, au moins dans notre collège, que les résultats des élèves sur la fraction-partage sont meilleurs que par le passé. Mais peut-être est-ce aussi lié au travail entrepris sur ce point avec les professeurs des écoles dans le cadre d'une liaison écoles-collège, depuis plusieurs années. Il n'en reste pas moins que la première partie de l'activité est toujours indispensable pour un certain nombre d'élèves. Cela amène donc à envisager deux utilisations de cette activité :

- une utilisation en classe entière pour une classe « faible » ;
- une utilisation « différenciée » pour une classe de niveau « normal ». Dans ce cas, la première partie pourrait être faite avec les élèves en difficulté, dans une structure type « aide individualisée ». Le reste de l'activité serait alors poursuivi en classe entière, en commençant par une situation analogue à celle de la première partie, mais sur une demi-droite graduée n'ayant que 1 et 2 comme graduations marquées :

Travail individuel

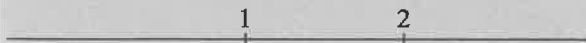


À main levée, sans mesurer, marque un point correspondant à $\frac{2}{3}$ sur la droite graduée ci-dessus.

Puis toujours à main levée, place le point correspondant à $\frac{2}{5}$.



Puis, encore à main levée, place le point correspondant à $\frac{5}{4}$.



Annexe La première partie de la disme - Des définitions (d'après un texte de Simon Stevin, merci à Fabienne Lanata pour la transcription).

DEFINITIONS 1

Disme est une espèce d'Arithmétique, inventée par la Dixième progression, consistant en caractères des chiffres, par lesquels se décrit quelques nombres, et par laquelle on dépêche par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes.

EXPLICATIONS

Soit quelque nombre de mille cent onze, décrit par caractères des chiffres en cette sorte, auxquels appert que chaque 1 est la dixième part de son prochain caractère précédent. Semblablement en 2 378, chaque unité du 8, est la dixième part de chaque unité du 7. Et ainsi de tous les autres. Mais parce qu'il est convenable que les choses desquelles on veut traiter, ayant des noms, et que cette manière de computation est trouvée par considération de telle dixième ou disme progression, voire qu'elle consiste entièrement en cela, comme apparaîtra ci-après, nous nommons ce traité proprement et convenablement la DISME. Par là même on peut opérer avec nombres entiers sans rompuz en tous les comptes se rencontrant en nos affaires, comme sera démontré au suivant.

DEFINITION 2

Tout nombre entier proposé se dit COMMENCEMENT, son signe est tel ①.

EXPLICATION

Par exemple quelque nombre proposé de trois cent soixante quatre, nous le nommons trois cent soixante quatre commencements, les décrivant en cette sorte 364 et ainsi de tous les autres semblables.

DEFINITIONS 3

Et chaque dixième partie de l'unité de commencement nous la nommons PRIME, son signe est tel ①; chaque dixième partie de l'unité de prisme nous la nommons SECONDE, son signe est tel ②. Et ainsi des autres chaque dixième partie, de l'unité de son signe précédent, toujours en l'ordre, un d'avantage.

EXPLICATION

Comme 2① 1① 7② à dire 2 Commencements 1 Primes 7 Secondes; et ainsi se pourrait procéder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire, que selon cette définition, les dits nombres font $2 \frac{1}{10} \frac{7}{100}$ ensembles $\frac{217}{100}$.

Semblablement 8① 9② 3③ 7④ valent $\frac{8}{10} \frac{9}{100} \frac{3}{1000} \frac{7}{10000}$ ensembles $\frac{8937}{10000}$. Et ainsi d'autres semblables. Il faut aussi savoir que nous n'usons en la DISME d'aucun nombre rompuz, aussi que le nombre de multitude des signes, excepté n'excède jamais le 9. Par exemple, nous n'écrivons pas 7① 12② mais en leur lieu 8① 2② car ils valent autant.

DEFINITION 4

Les nombres de la précédente seconde et troisième Définition se disent en général NOMBRES DE DISME.

Fin des Définitions

En sixième : *Saut de puce*

Groupe didactique des maths - IREM d'Aquitaine

Dans cette activité, la division des nombres entiers est abordée dans le cas où le quotient n'est pas un nombre décimal. De nouveaux nombres apparaissent pour lesquels il n'existe pas d'écriture décimale finie.

L'écriture fractionnaire, jusque là associée à la notion de fraction-partage, montre son utilité pour représenter ces nouveaux nombres.

La notion de fraction quotient en 6^{ème} est ici introduite en deux temps.

Dans le premier temps, les élèves prennent conscience, en travaillant sur la recherche d'un facteur manquant, que les entiers et les décimaux ne suffisent pas pour répondre. Il y a un manque dans les nombres déjà connus.

La fraction-partage étudiée à l'école primaire répond à ce problème et devient fraction-quotient dans le second temps. Elle prend alors un statut de nombre.

1. Ce que dit le programme de cycle 3

- Des écritures fractionnaires, telles que $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{7}$, ont été rencontrées en tant que fractions-partage (partage d'un segment, d'un disque, d'un rectangle).
- $\frac{4}{3}$ a été rencontré comme mesure de la longueur d'un segment nécessitant le partage de l'unité en trois parties égales.

2. Place dans la progression

- La notion de fraction-partage a été réactivée (pliage de bandes de papier, placement de points repérés par des fractions sur une droite graduée).
- La multiplication des nombres entiers et la multiplication d'un nombre entier par un nombre décimal ont été retravaillées. Les élèves ont donc contrôlé des résultats en utilisant le dernier chiffre, l'ordre de grandeur ou encore la multiplication par un nombre plus petit que 1, etc.

Exemple : Entoure le résultat des opérations suivantes.

$3,26 \times 7 = ?$	22,28	22,82	23,03	22,83
$4,7 \times 23 = ?$	2108,1	708,1	108,1	207,1
$36 \times 0,93 = ?$	36,48	33,48	360,48	330,48

- La division par un nombre entier a été revue lorsque le quotient est un nombre entier et prolongée dans le cas où le quotient est un nombre décimal. La notion de quotient a été abordée par l'intermédiaire de multiplications à trou.

3. Étape 1 : « On constate un manque »

Énoncé proposé aux élèves

Compléter les égalités suivantes, lorsque cela est possible :

a) $4 \times \dots = 20$	b) $\dots \times 7 = 7$
c) $16 \times \dots = 432$	d) $15 \times \dots = 48$
e) $5 \times \dots = 2$	f) $\dots \times 2 = 1$
g) $0 \times \dots = 3$	h) $3 \times \dots = 4$

Analyse du choix des variables didactiques

Les deux premières égalités peuvent être complétées en utilisant les tables de multiplication.

L'égalité c) a été choisie de sorte que les élèves soient amenés à poser la division mais le nombre à trouver reste entier.

Les égalités d), e) et f) permettent le passage à un quotient décimal.

Les égalités e) et f) permettent de revoir que la multiplication n'agrandit pas toujours.

L'égalité g) met les élèves face à l'impossibilité de compléter ce type de multiplication à trou et permet de rappeler que la division par zéro est impossible. L'égalité h) permet d'introduire l'écriture fractionnaire du quotient.

Compte-rendu d'expérimentation

Une discussion s'installe dans la classe pour la dernière égalité.

Certains élèves proposent : 1,3 ; 1,33 ; 1,333, etc. Ces propositions sont invalidées à chaque fois par le calcul de : $3 \times 1,3$; $3 \times 1,33$; $3 \times 1,333$; etc.

Des élèves proposent alors 1,334 que l'on écarte de la même façon.

Éventuellement, avec la sollicitation du professeur, les élèves montrent, en posant la division, que le résultat a une partie décimale « qui ne s'arrête pas ». D'autres réinvestissent le travail sur le dernier chiffre non nul de la partie décimale. Ils montrent que le produit de ce chiffre par 3 ne peut se terminer par 0. Quelques rares élèves proposent alors d'écrire $3 \times (4 : 3) = 4$.

Il n'existe pas de nombre décimal qui complète l'égalité à trou $3 \times \dots = 4$.

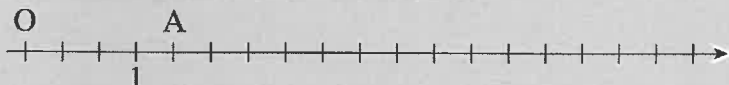
Aucun élève n'a encore proposé d'écrire $3 \times \frac{4}{3} = 4$. Cette constatation n'est pas étonnante puisque la fraction en tant que quotient doit être vue au collège.

Plutôt que de donner directement la solution, le professeur propose alors aux élèves l'étape 2 dont le but est de discuter de la nature de $4 : 3$.

4. Étape 2 : « *La fraction apporte une solution* »

Voici une situation :

Une puce se déplace sur la demi-droite graduée ci-dessous en faisant des bonds de longueur OA . Au bout de combien de bonds tombe-t-elle pour la première fois sur un nombre entier et quel est ce nombre ?



But de cette étape

Cette situation permet de trouver une écriture du nombre qui permet de compléter $3 \times \dots = 4$ et de faire le lien avec la notion de fraction-partage.

Compte-rendu d'expérimentation

Lorsque le professeur propose cette étape, certains élèves réagissent en disant : « alors on va mettre une fraction ... ».

Les élèves trouvent qu'au bout de 3 bonds, la puce tombe sur le point d'abscisse 4. Le professeur écrit alors $3 \times OA = 4$. Certains élèves font le lien avec ce qui a été fait à la séance précédente. Si tel n'est pas le cas, le professeur demande aux élèves la mesure de la longueur OA .

Les élèves trouvent alors la solution de l'étape 1. On a $3 \times \frac{4}{3} = 4$.

Il reste à justifier ce résultat.

$3 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$. Le professeur s'appuie sur la demi-droite graduée pour expliquer les étapes trouvées oralement par certains élèves. Les élèves ne font pas le passage par $\frac{12}{3} = \frac{4 \times 3}{3} = 4 \times \frac{3}{3}$.

À cette époque de l'année, les élèves ne connaissent pas la multiplication d'une fraction par un nombre entier. Ils voient, comme au cycle 3, $\frac{12}{3}$ (12 tiers) comme 4 fois 3 tiers sur la droite graduée et donc comme 4 fois l'unité.

Par la suite, on demande aux élèves de reprendre les égalités à trou de l'étape 1 et de les compléter à l'aide d'un nombre en écriture fractionnaire. On retravaille les différentes écritures d'un même nombre.

Enfin, on peut compléter le tableau :

Opération à trou	Réponse	Écriture décimale du quotient	Écriture fractionnaire du quotient
$4 \times \dots = 20$	$4 \times 5 = 20$	5	$\frac{20}{4}$
$\dots \times 7 = 7$	$1 \times 7 = 7$	1	$\frac{7}{7}$
$2 \times \dots = 1$	$2 \times 0,5 = 1$ ou $2 \times \frac{1}{2} = 1$	0,5	$\frac{1}{2}$
$5 \times \dots = 2$	$5 \times 0,4 = 2$ ou $5 \times \frac{2}{5} = 2$	0,4	$\frac{2}{5}$
$3 \times \dots = 4$	$3 \times \frac{4}{3} = 4$		$\frac{4}{3}$

On insiste sur les égalités :

$$5 = \frac{20}{4} \quad 1 = \frac{7}{7} \quad 0,4 = \frac{2}{5} \quad 0,5 = \frac{1}{2}.$$

Bilan de l'activité :

- Pour compléter $16 \times \dots = 48$, on divise 48 par 16. Le quotient est $\frac{48}{16} = 3$ qui est le nombre manquant.
- On ne peut pas compléter $3 \times \dots = 4$ avec un nombre décimal. Le nombre manquant est le quotient $\frac{4}{3}$. On a $3 \times \frac{4}{3} = 4$.

5. Prolongement

Un travail très important sur les différentes écritures d'un nombre peut prolonger cette activité. Le professeur peut par exemple écrire au tableau différentes écritures d'un même nombre ($3,5$; $\frac{35}{10}$; $\frac{7}{2}$; $3 + \frac{5}{10}$ etc.) et demander aux élèves combien il y a de nombres écrits au tableau.

En cinquième : *Introduction de la somme de deux nombres en écriture fractionnaire*

Vincent PAILLET - IREM d'Orléans
Mireille SAUTER - IREM de Montpellier

En classe de cinquième, le travail sur les écritures fractionnaires se poursuit avec l'objectif, comme en classe de sixième, de renforcer le fait qu'elles représentent des nombres rationnels. Le fait d'opérer sur ces nombres est une occasion supplémentaire de renforcer ce statut. Deux approches sont proposées dans cet article :

l'une utilisant les guide ânes, l'autre des représentations graphiques (longueurs et aires).

1. Introduction de la somme de deux nombres rationnels à l'aide du guide-âne

Le guide-âne¹⁰ est un outil permettant en classe de sixième de montrer l'équivalence entre les fractions définies en référence au partage de l'unité (école primaire) et les fractions quotients, c'est-à-dire les nombres rationnels (collège). Cet aspect sera aussi retravaillé au cours de cette activité.

Un autre intérêt est de permettre de placer des points d'abscisses rationnelles de façon assez précise sur une droite graduée, mais aussi de lire une abscisse.

L'activité suivante a donc pour but d'introduire la somme de deux nombres en écriture fractionnaire tout en continuant à travailler l'aspect nombre des écritures fractionnaires.

L'addition proposée se place volontairement dans un cas non exigible du programme de 5^{ème}. Le fait de se limiter aux exigibles du programme¹¹ risque d'entraîner des théorèmes élèves faux du type :

« Le dénominateur commun est le plus grand des deux dénominateurs » ou
« On ne peut additionner deux fractions que lorsque l'un des dénominateurs est multiple de l'autre ».

Les classes dans lesquelles a été testée cette activité avaient vu le produit de quotients et la simplification quelques semaines auparavant.

¹⁰L'utilisation du guide-âne est décrite dans l'annexe 1.

¹¹À savoir « l'un des dénominateurs est multiple de l'autre. »

Déroulement de la séance

Consigne écrite au tableau :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = ?$$

Il est précisé aux élèves que l'on cherche la valeur exacte de cette somme.

1^{ère} partie : Les élèves proposent leurs solutions

Après une phase d'appropriation assez courte, les élèves énumèrent leurs réponses. Trois propositions sont apparues. Elles ont été notées au tableau de façon à en débattre.

- Utilisation de la règle spontanée pour additionner : $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}$

Cette proposition peut être invalidée par l'observation que les termes $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont supérieurs à 0,5 et donc que la somme est supérieure à 1 alors que le nombre $\frac{5}{7}$ est inférieur à 1.

On peut aussi déterminer par le calcul mental ou par le calcul instrumenté des valeurs décimales approchées de cette somme et de $\frac{5}{7}$. C'est ici l'occasion d'observer que cette somme n'est pas un nombre décimal $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \approx 0,666 + 0,75$ donc $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \approx 1,416$.

- Simplification par 3.

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$$

Les mêmes méthodes que précédemment permettent d'invalider l'égalité. Un élève note qu'on a simplifié comme si on avait une multiplication $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} = 1 \times \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$.

- Un élève a proposé l'idée d'une mise au même dénominateur, mais il ne voit ni comment faire ni quoi en faire. La classe ne s'est pas saisie de cette proposition.

À ce stade nous disposons donc d'une valeur approchée de la somme $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$. L'incertitude sur cette valeur justifie le fait de continuer la recherche.

2^{ème} partie : Détermination géométrique - Utilisation des guides-ânes¹²

La question suivante est posée :

Trace une demi-droite graduée d'unité 4 cm et place les points d'abscisses $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$.

Remarque :

Le choix de l'unité a été fait en fonction des guides ânes disponibles.

Le choix des guides-ânes proposés prend ici toute son importance.

Les élèves placent alors les points d'abscisses $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sur la droite graduée. Certains élèves utilisent pour cela l'aspect fraction partage et d'autres l'aspect fraction quotient¹³.

Lors de cette partie, les différents positionnements des points et l'utilisation des guides ânes sont aussi réalisés au rétro projecteur.

La question suivante est alors posée :

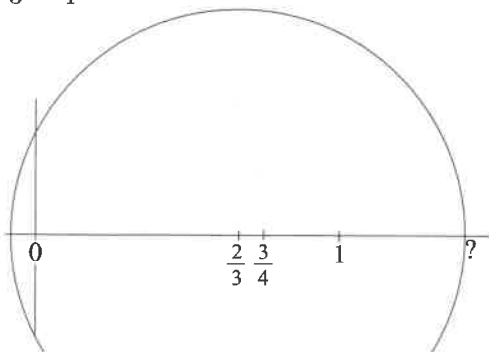
Quelqu'un peut-il montrer sur la droite graduée un segment de longueur $\frac{2}{3}$?

C'est ici l'occasion de rappeler ce qu'est la distance à l'origine. En effet, il est important que les élèves fassent bien le lien entre l'abscisse d'un point et sa distance à l'origine pour comprendre que le point trouvé par la suite aura pour abscisse $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

Puis

Comment construire un segment de longueur $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$?

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ est alors construit par le report de la longueur $\frac{3}{4}$ à la suite de $\frac{2}{3}$.



$$? = \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

¹²Voir annexe 1

¹³Voir annexe 2.

Nous avons donc un point dont l'abscisse est égale à $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$. Reste à déterminer la valeur de cette abscisse.

Le premier guide-âne de l'annexe est alors utilisé.

Ici seul l'aspect fraction de l'unité est utilisable.

On cherche un fractionnement de l'unité sur lequel se trouve aussi le point d'abscisse cherchée.

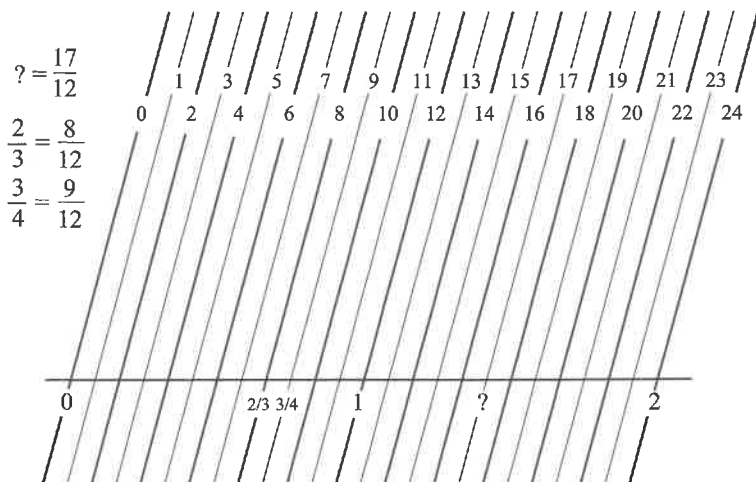
La droite n° 0 du guide âne doit donc passer par le point d'abscisse 0, une autre par le point d'abscisse 1 et une troisième par celui d'abscisse $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$. Cette partie a dû être guidée car peu d'élèves se rappelaient comment déterminer l'abscisse d'un point à l'aide du guide âne.

À ce stade il est indispensable de passer dans les rangs et d'être très actif.

Afin d'aider certains élèves, il leur a été précisé qu'une droite doit passer par le point d'abscisse $\frac{2}{3}$ et qu'une autre droite doit passer par le point d'abscisse $\frac{3}{4}$.

Le placement des points et la construction de la somme sont délicats. Le problème majeur est lié à un manque de précision. Certaines erreurs sont rapidement invalidées par les élèves.

Deux propositions se dégagent : $\frac{14}{10}$ et $\frac{17}{12}$. Or la première partie a permis de constater que cette somme n'était pas un nombre décimal. Seul $\frac{17}{12}$ semble donc convenir. On a ainsi $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$.



La demi-droite est alors graduée en douzième à l'aide du guide-âne.

La droite graduée complétée permettra ainsi d'établir que :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{8+9}{12}.$$

3^{ème} partie : Justification algébrique - Factorisation (règle de la distributivité étendue aux rationnels)

Ce travail s'est fait à partir de la question suivante :

Comment pourrions-nous justifier par le calcul que

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12} ?$$

La 2^{ème} partie rend cette justification plus accessible aux élèves. La mise au même dénominateur ne pose plus de problème car les élèves souhaitent transformer ces quotients en douzièmes.

Les élèves proposent spontanément l'égalité :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$$

Par contre la justification de l'égalité : $\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{8+9}{12}$ a été guidée.

Elle repose sur l'extension à $\mathbb{Q}$ de la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Une fois de plus l'utilisation au préalable du guide-âne facilite la compréhension de $\frac{8}{12} = 8 \times \frac{1}{12}$.

Le recours à la somme itérée peut être aussi utilisé

$$\frac{8}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = 8 \times \frac{1}{12}$$

(on reporte huit fois le segment de longueur $\frac{1}{12}$).

Le fait d'avoir abordé la multiplication de quotients avant l'addition permet aussi de le justifier. $\frac{8}{12} = \frac{8 \times 1}{12} = 8 \times \frac{1}{12}$.

Si la factorisation n'a pas posé de problème, il a été difficile d'obtenir « nous avons factorisé $\frac{1}{12}$ » ce qui n'est pas forcément étonnant en classe de 5^{ème}.

On peut remarquer que le recours à la somme itérée permet aussi de justifier que $\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$.

$$\begin{aligned} \frac{8}{12} + \frac{9}{12} &= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \\ &+ \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12} \end{aligned}$$

On peut donc écrire la justification suivante :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{3}{4} &= \frac{2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} \\ &= 8 \times \frac{1}{12} + 9 \times \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (8 + 9) \times \frac{1}{12} \\
 &= \frac{8 + 9}{12} \\
 &= \frac{17}{12}
 \end{aligned}$$

On peut aussi justifier cette égalité en utilisant la définition du quotient.

$\frac{17}{12}$ est le nombre qui multiplié par 12 est égal à 17.

$$\text{Or } 12 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) = 12 \times \frac{2}{3} + 12 \times \frac{3}{4} = \frac{24}{3} + \frac{36}{4} = 8 + 9 = 17.$$

Donc $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ est aussi le nombre qui multiplié par 12 est égal à 17.

$$\text{Conclusion : } \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}.$$

4^{ème} partie : Écriture d'une règle de calcul

Pour additionner deux quotients :

- ▷ on les met au même dénominateur,
- ▷ on conserve le dénominateur commun,
- ▷ on ajoute les numérateurs.

Le choix de donner une règle de calcul à la fin de l'activité est discutable. Le programme de 5^{ème} ne nous y invite pas : « *L'objectif n'est pas d'aboutir à une règle de calcul. Celle-ci sera établie en classe de quatrième* ».

On peut cependant s'interroger sur la signification de cette phrase.

Faut-il comprendre qu'aucune règle de calcul ne doit être écrite ou que la démonstration de cette règle et l'utilisation d'une écriture littérale relève de la classe de 4^{ème} ?

Dans le document d'accompagnement « *Du numérique au littéral* »¹⁴ on peut lire : « ... en classe de 4^{ème} la règle de sommation de deux quotients en écritures fractionnaires de même dénominateur, installée en classe de 5^{ème}, peut être démontrée ». Ce qui peut justifier l'écriture, en classe de 5^{ème}, de cette règle dont la démonstration se fera l'année suivante.

Dans un premier temps les élèves sont invités à rédiger toutes les étapes de calcul (y compris la factorisation) ce qui doit permettre une meilleure appropriation de la règle et moins de confusion avec la multiplication.

Remarques et conclusions

Une difficulté pour mener à bien cette activité est l'utilisation du guide-âne par

¹⁴ « *Du numérique au littéral* », Collège – Mathématiques – projet de document d'accompagnement, 5 avril 2006, p. 6

les élèves. Dans la situation expérimentée, les élèves n'avaient que peu d'expérience de celui-ci (seulement une séance préparatoire alors qu'ils ne l'avaient jamais rencontré en classe de sixième).

De ce fait l'activité a dû être trop guidée, ce qui ne favorise pas le questionnement des élèves.

L'activité aurait pu débiter par des cas où le recours à des nombres décimaux ou entiers permet d'effectuer la somme pour aboutir à la dernière opération posant problème.

Par exemple : $2 + \frac{9}{3} = ?$ $\frac{5}{2} + \frac{12}{6} = ?$ $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = ?$

Cela aurait eu l'intérêt de pouvoir revenir ensuite sur ces premiers calculs et de voir si la méthode de calcul trouvée fonctionne aussi.

2. Introduction de la somme de deux nombres rationnels par des représentations graphiques

Avec les mêmes objectifs que dans l'activité précédente c'est-à-dire éviter de proposer des situations d'addition de fractions trop simples (ces situations entraînant l'élaboration de règles partielles qui seront des obstacles à des apprentissages futurs), il est demandé aux élèves :

Quelle est la valeur de la somme $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$?

Ce travail est donné à faire individuellement ou en groupe pendant environ une demi heure. Puis les différentes réponses sont réunies au tableau et un débat est organisé.

Comme dans l'activité précédente, les réponses des élèves sont en général $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{4}$ ou des valeurs approchées ($0,75 + 0,6$ ou $0,75 + 0,66\dots$).

Les réponses « valeurs approchées » méritent d'être étudiées avec attention avant d'être refusées comme réponse au problème, car elles ne nous donnent pas la valeur exacte de la réponse que nous recherchons ici. Cependant elles permettent de rejeter des réponses fausses (comme $\frac{5}{7}$ et $\frac{2}{4}$ par exemple). Il est donc essentiel d'insister avec les élèves sur le type de valeur trouvée « approchée » ou « exacte », en faisant justifier les réponses.

Après débat, les élèves voient que ces valeurs approchées donnent un ordre de grandeur mais qu'elles ne peuvent être la réponse exacte ; ils disent que la réponse doit être une fraction du type de $\frac{2}{3}$ (« où la division ne s'arrête pas »), mais comment la trouver ?

On demande alors aux élèves :

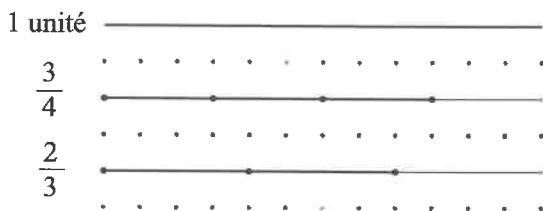
Peut-on représenter $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$?

La recherche se fait à nouveau individuellement ou en groupe. L'enseignant circule dans la classe en insistant sur le mot représentation. Son objectif est d'amener les élèves à avoir recours à des représentations graphiques qui font appel à la notion de fraction partage qu'ils ont vu antérieurement.

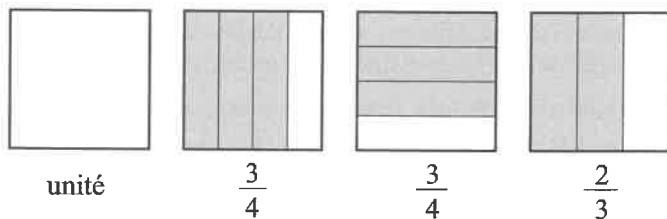
À l'école primaire la fraction est introduite en référence au partage d'une unité, le dénominateur indiquant la nature du partage et le numérateur le nombre de parts considérées (trois quart, $\frac{3}{4}$, est compris comme « trois fois un quart »). Au collège, ces connaissances sont réactivées en sixième et il est d'ailleurs intéressant d'introduire l'écriture $3 \times \frac{1}{4}$. Cette notion de fraction partage est utilisée dans les représentations à partir de longueurs ou d'aires ; s'appuyer sur les grandeurs et la manipulation géométrique des ces représentations peuvent être une aide précieuse pour des élèves en difficulté avec les fractions et qui ont encore besoin d'image et de références concrètes aux grandeurs.

Pour la recherche du problème, il n'est pas nécessaire de préciser aux élèves le type de grandeur et dans leurs recherches, ils vont naturellement dessiner :

Pour les longueurs



Pour les aires



En réunissant les représentations de $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$ les élèves voient facilement que la somme est représentée par une grandeur plus grande que l'unité. Les réponses $\frac{5}{7}$ et $\frac{2}{4}$ sont alors invalidées, si elles n'ont pas été déjà invalidées avec les valeurs approchées.

On repose la question :

Comment trouver la somme $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$?

Après ce travail de représentation, tous les élèves sont d'accord pour dire que si les partages (c'est-à-dire les dénominateurs) sont identiques il suffit d'additionner les numérateurs.

Ce que le professeur peut justifier au tableau de la manière suivante :

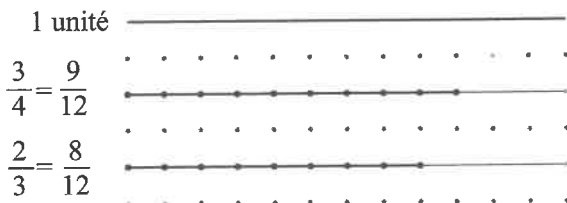
$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = 2 \times \frac{1}{7} + 4 \times \frac{1}{7} = (2 + 4) \times \frac{1}{7} = \frac{2 + 4}{7} = \frac{6}{7}$$

De fait ces écritures sont encore difficiles pour certains élèves. Les commentaires des programmes notent que beaucoup sont convaincus par l'énoncé oral « deux septièmes plus quatre septièmes est égal à deux plus quatre soit six septièmes ». De fait, les « septièmes » fonctionnent comme sous unités de mesure, ce que l'on retrouve également dans les représentations géométriques.

Pour trouver la somme $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ certains élèves proposent donc d'essayer de faire le même partage, c'est-à-dire d'écrire les fractions avec le même dénominateur.

Pour trouver ce même dénominateur, on peut travailler à nouveau sur les représentations de chaque fraction en cherchant une subdivision commune. Suivant le niveau des élèves, cette recherche peut être individuelle avec mise en commun des différentes idées ou bien menée par l'enseignant classe entière.

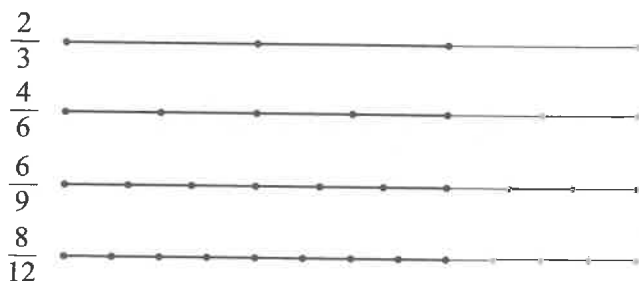
On trouve alors à partir de la représentation par des longueurs :



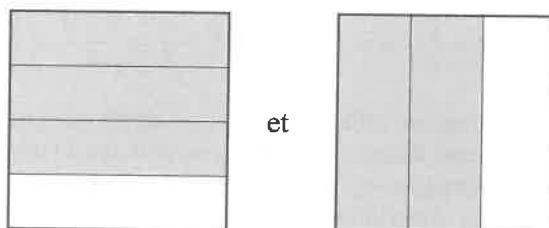
Ou bien faire un rappel sur les différentes écritures d'une fraction.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} \qquad \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

Ces différentes écritures sont à mettre en correspondance avec les représentations, on réactive alors des connaissances de sixième :



Un travail identique avec la représentation par des aires est aussi intéressant. Par la superposition des carrés



l'idée de partage en douze apparaît.

On arrive donc aux écritures suivantes : $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$.

On peut demander aux élèves d'écrire des règles pour additionner des fractions. On obtient des formulations du type :

- il faut regarder les dénominateurs ;
- on ne peut additionner que si les partages sont pareils ;
- on doit écrire les fractions avec le même dénominateur ;
- quand les partages (ou dénominateurs) sont pareils on additionne les numérateurs.

ANNEXES

Annexe 1 : Différentes méthodes d'utilisation d'un guide-âne

Le problème d'un guide-âne est qu'il doit se trouver en dessous de la feuille sur laquelle est tracée la droite graduée afin de pouvoir écrire sur cette dernière. Une première idée est de voir le guide-âne en transparence en prenant du papier 60g par exemple (l'utilisation du papier calque est aussi possible).

Une autre possibilité est de demander aux élèves de tracer leur droite graduée sur un quart de feuille A4 (l'important est que la feuille soit volante).

Les graduations ne doivent pas être trop petites et dépasser des deux côtés de la droite.

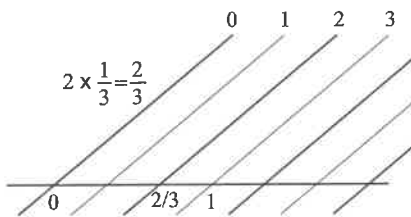
En pliant cette feuille le long de la droite graduée, les élèves peuvent voir leurs graduations, la pliure correspondant à la droite graduée, et la visualisation du guide-âne est optimale, ce qui conditionne la réussite de l'activité.

L'idée de numéroté les droites parallèles, reprise d'une brochure de l'IREM de Lyon, est très utile. Le fait d'utiliser deux couleurs¹⁵ en alternance pour tracer le guide-âne facilite grandement la lecture. L'utilisation en parallèle du rétro-projecteur est indispensable.

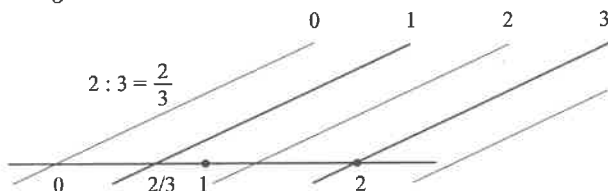
Annexe 2 : Différentes méthodes de construction du point d'abscisse $\frac{2}{3}$ à l'aide d'un guide-âne

a) On partage l'unité en trois parties égales et on prend deux parties.

Le deuxième guide-âne de cette annexe permet le fractionnement de l'unité : on place l'origine sur la droite n° 0, et le point d'abscisse 1 sur la droite n° 3. La droite n° 2 coupe la droite graduée au point d'abscisse $\frac{2}{3}$. L'aspect fraction partage est ici utilisé.



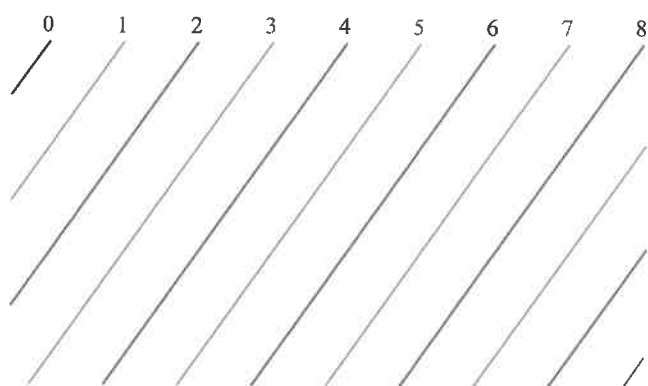
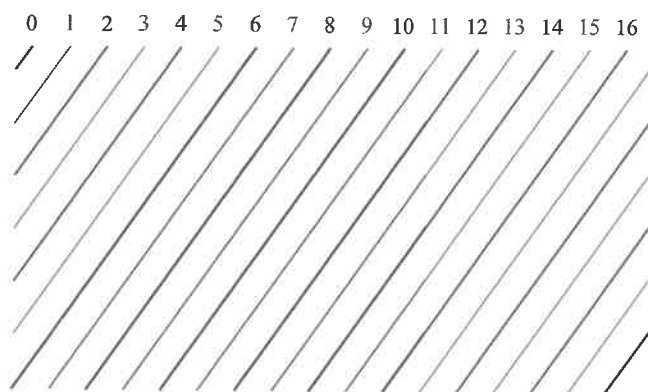
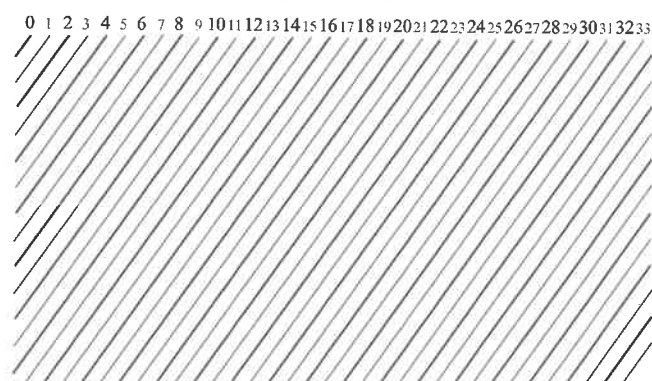
b) On partage deux unités en trois. On divise 2 par 3. Le troisième guide-âne permet d'effectuer cette division : on place l'origine sur la droite n° 0, et le point d'abscisse 2 sur la droite n° 3. La droite n° 1 coupe la droite graduée au point d'abscisse $\frac{2}{3}$. L'aspect quotient est alors utilisé.



Le fait que la droite n° 2 donne la solution dans un cas alors que c'est la n° 1 qui la donne dans l'autre cas pose des problèmes à certains élèves. L'égalité $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$ (qui sera réutilisée dans la 3^{ème} partie) a permis de les éclairer sur ce point. Pour un élève il a fallu écrire $1 \times \frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$.

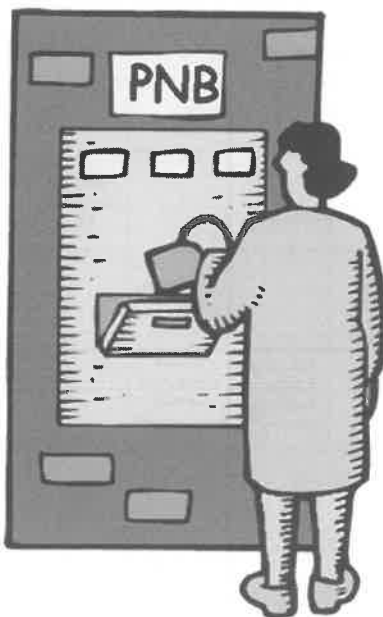
¹⁵Pour des raisons de monochromie, nous avons, dans cette brochure, remplacé les deux couleurs par des traits d'épaisseurs différentes.

Guides-ânes



CARTE BANCAIRE

Épitette Delinotte est très distraite. Par exemple, elle oublie tout le temps le numéro du code secret de sa carte bancaire.



Elle sait bien que c'est un nombre à 4 chiffres, tous impairs et tous différents et que ce nombre est un multiple de 5 et de 9.

Ces renseignements lui permettent-ils d'utiliser sa carte dans un distributeur alors que cette machine n'autorise que trois essais lorsqu'elle demande le code ?



UN SUDOKU PARTICULIER

Après avoir retrouvé les chiffres « déguisés », compléter la grille de telle sorte que chaque chiffre de 1 à 9 n'apparaisse qu'une seule fois dans chaque ligne, chaque colonne et chaque « région » (une région étant l'un des 9 carrés matérialisés par un trait gras).

	$\sqrt{25}$		$3 \cos(0)$		$\frac{48}{8}$			Sur deux faces opposées d'un dé
				$4\sqrt{4}$	Somme des solutions de $(x-2)(x-3)=0$		Nombre de diviseurs de 5021	Nombre de faces d'une pyramide à base triangulaire
	dernier chiffre	2^3	$-(5-9)$	Nombre d'axes de symétrie d'un rectangle		Nombre de faces d'un cube		
$\frac{\sqrt{324}}{2}$		27^0			Numérateur de la fraction irréductible égale à $\frac{9261}{33957}$	Nombre maximum de solutions d'une équation du 2d degré		PGCD de 11760 et 2574
	$\sqrt{1} + \sqrt{4}$						$\frac{10^{-2}}{0,01}$	
$\frac{125}{25}$		Solution de l'équation $x+9=3x-5$	$\sqrt{1} \times \sqrt{4}$	Nombre de diviseurs de 20		Numérateur de $\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4}$		$(2\sqrt{2})^2$
Le quart du seizième de 256		Nombre de côtés d'un pentagone		Tiers du triple de la moitié du double de neuf		Nombre d'axes de symétrie d'un triangle équilatéral	Nombre de sommets d'un cube	
	$\frac{(2\sqrt{3})^2}{12}$		$3 \begin{array}{c} ? \\ \square \\ 4 \end{array}$	Nombre de jours de la semaine				$\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2$
$6 - (3^2 - 11)$			$2^? = 2$		Nombre d'axes de symétrie d'un carré		$\sqrt{81} - \sqrt{4}$	

PARTIE ②

LES RELATIFS

Comment introduire les nombres relatifs ? Cette question reste toujours épineuse, pas seulement pour l'enseignant débutant ! Beaucoup d'entre nous (tous ?) ont changé plusieurs fois de méthode...

C'est bien parce qu'il n'existe pas LA méthode efficace pour l'introduction de ces nombres.

Alors, sans doute faut-il varier les approches et les situations de telle sorte que tous les élèves y trouvent leur compte, ceux qui accepteront les nombres relatifs comme un jeu intellectuel, comme ceux qui auront besoin de se raccrocher, momentanément nous l'espérons, à une situation concrète.

Mais même quand on est convaincu de l'intérêt de varier les approches, il faut bien UNE introduction, que l'on va choisir en fonction de l'efficacité qu'on lui suppose, des obstacles didactiques qu'elle peut créer, de sa propre façon de fonctionner, etc.

De ce point de vue, les deux articles suivants présentent des choix différents.

La première activité de l'IREM d'Aquitaine, fait le choix d'introduire les nombres relatifs dans un contexte interne aux mathématiques : le nombre négatif est le nombre qui rend possible la soustraction impossible jusqu'alors. L'analyse du groupe est que le choix d'une situation concrète pourrait créer des obstacles didactiques pour la soustraction et, a fortiori, la multiplication des nombres relatifs.

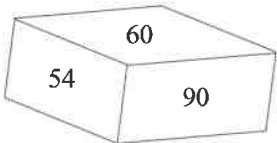
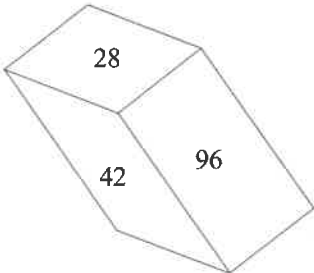
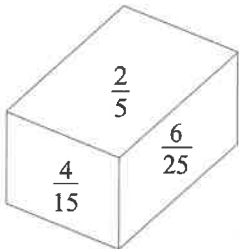
Le groupe de l'IREM des Pays de la Loire fait le choix d'une introduction à partir du codage de déplacements sur une droite, l'addition apparaissant immédiatement pour coder deux déplacements successifs. Il ne s'agit pas non plus d'une situation concrète, mais elle fournit aux élèves qui en ont besoin, un support « matériel » à leur compréhension, tandis que la majorité des élèves n'y font rapidement plus aucune référence.

Là où les deux groupes se retrouvent, c'est sur l'inutilité du signe + pour désigner un nombre positif et celle des parenthèses, sauf s'ils sont nécessaires pour éviter une ambiguïté. Concernant la soustraction et la multiplication des nombres relatifs, le lecteur pourra se référer à : GOBIN Chantal, GUICHARD Jean-Paul, MAROT Madeleine et al., *Les nombres relatifs au collège*, Poitiers, IREM, 1996.

— Un petit problème —

BATTONS LE PAVÉ

Connaissant l'aire des faces d'un pavé droit, comment trouver son volume ?

	$V = ?$
$V = ?$	
	$V = ?$

En cinquième : *Des équations pour introduire les nombres relatifs*

Groupe didactique des mathématiques – IREM d'Aquitaine

1. Les différents contextes d'emploi des nombres relatifs

Un regard historique

Si les chinois utilisaient les négatifs et les règles de calcul dès le I^{er} siècle, il a fallu attendre, en occident, la fin du XIX^e siècle pour que les négatifs prennent le statut de nombres, avec la construction formelle de l'ensemble des nombres relatifs (Hankel 1867). Les nombres négatifs sont apparus en occident au XV^e siècle avec les travaux de Nicolas Chuquet. Mais les scientifiques refusaient l'existence de quantités négatives, qu'ils qualifiaient de nombres « moindres que rien » (Carnot 1803).

Le contexte dans lequel sont apparus les nombres négatifs est celui des équations où ils seront longtemps utilisés comme auxiliaires de calcul. Les données et les résultats sont positifs, mais la résolution impose le passage par des nombres négatifs. Ainsi, l'histoire nous montre bien que les nombres négatifs sont apparus non pour une modélisation du monde réel mais par nécessité interne aux mathématiques.

Les différents contextes d'emploi

Les situations permettant d'introduire les nombres relatifs sont de trois types :

① *Contextes concrets*

- recettes et dépenses
- gains et pertes
- températures
- altitudes
- chronologie
- ascenseur

Dans ce genre de situation, le nombre relatif peut avoir deux significations différentes.

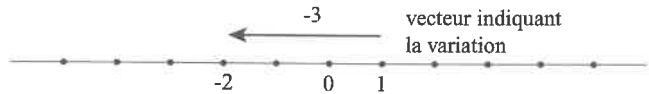
Il peut traduire :

- o un état : il fait -3°C ou l'année de naissance d'un personnage est 50 av J.-C.
- o une variation : la température a baissé de 3°C ou l'ascenseur est descendu de 3 étages.

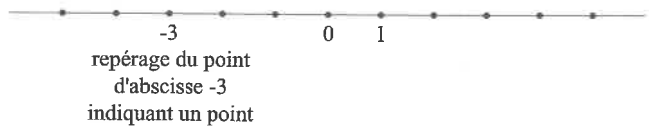
② Contexte de la droite graduée

Dans ce contexte, le nombre relatif peut aussi avoir ces deux significations.

- 1) -3 est une variation.

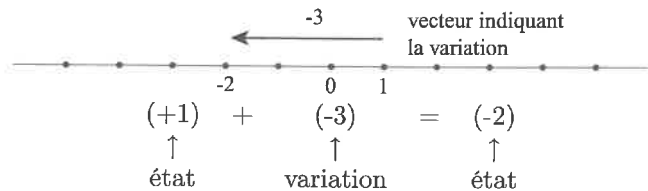


- 2) -3 est un repère indiquant un état.



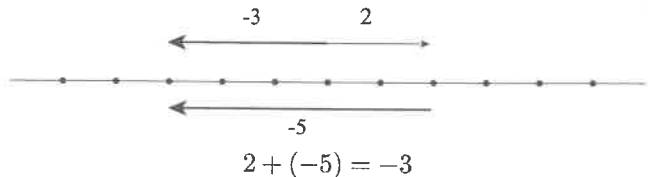
Un même nombre relatif peut donc traduire des situations différentes :

- 1)



Dans ce calcul, les nombres relatifs ont des statuts différents.

- 2)



Ce calcul fait le bilan de deux variations.

Les nombres relatifs ont le même statut.

Pour introduire l'addition, il est préférable de travailler seulement avec des variations. On ne manipule que des nombres qui ont le même statut.

③ *Contexte interne aux mathématiques*

Dans ce contexte :

- on résout des équations
- on énonce les règles de l'addition ou de la soustraction de deux nombres relatifs.

Conclusion

Aucun mode d'introduction ne peut à lui seul, permettre d'atteindre tous les buts recherchés. Il est donc important de varier les situations : repérage, gains et pertes, variations à appliquer à un état, etc.

Il faut aussi prendre de la distance par rapport aux contextes concrets de façon à donner un statut de nombres aux relatifs, aussi bien positifs que négatifs, sans discrimination, et à ne pas créer d'obstacles didactiques à la mise en place des règles de l'addition et surtout de la multiplication ¹⁶.

Le contexte concret permet de construire des images mentales variées mais peut aussi faire perdre le statut de nombres aux relatifs. De même, la droite graduée et la translation peuvent aider à la compréhension de l'addition mais elles peuvent aussi constituer un obstacle pour l'introduction de la multiplication. Nous pensons donc qu'il est plus judicieux d'introduire les nombres relatifs par les équations.

2. Les choix didactiques

La construction de ce nouvel ensemble d'objets mathématiques doit être vue comme une extension du sens de ce que l'on nomme nombre pour qu'il n'y ait pas une coupure entre les nombres négatifs et les nombres positifs déjà connus. Les nombres relatifs ne prendront rapidement le statut de nombres que si l'élève opère avec eux. Ces opérations devront amener les élèves à ne pas imaginer séparément les anciens et les nouveaux nombres mais à considérer les négatifs comme une partie de l'ensemble des relatifs.

Ceci a deux conséquences sur nos choix didactiques.

- Dans une écriture de la forme $(+3) + (-2)$, les deux signes $+$ n'ont pas le même statut, le premier (celui du nombre positif 3) est un signe prédicatoire et le deuxième est un signe d'addition.

Il y a donc pour les élèves une source de confusion possible. Dans un premier temps, nous n'introduirons donc pas d'écritures du type $(+3)$. Elles seront exprimées plus tard par opposition à (-3) .

Nous préférons garder au signe $+$ le seul statut opératoire au détriment d'une cohérence de notation dans l'ensemble $\mathbb{Z}$.

Nous avons donc choisi dès le départ de présenter $(+3)$ et 3 comme deux écritures d'un même nombre. Nous pensons qu'ainsi, les élèves voient mieux l'inclusion de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. La simplification des écritures s'en trouvera facilitée.

¹⁶ D'après *Suivi scientifique cycle central* tome 1, Poitiers, IREM

- Nous avons décidé d'introduire les nombres relatifs à partir d'égalités à compléter du type : $9 + \dots = 7$. Tout comme $\frac{2}{3}$ avait été vu en classe de sixième comme le nombre qui multiplié par 3 égale 2, (-2) est introduit comme le nombre qui additionné à 9 égale 7.

3. Les situations proposées aux élèves

Étape 0 : Établir que $a + b - c = (a + b) - c = a + (b - c)$

Cette étape n'est pas nécessairement à faire juste avant l'introduction des relatifs mais plus tôt dans l'année lors du chapitre sur l'organisation des calculs par exemple.

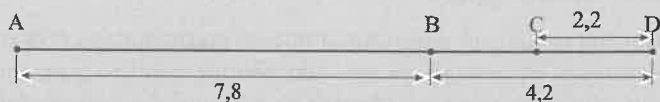
Exercice 1

Margot va à la librairie. Elle achète deux articles : un cahier à 2,75 € et un livre à 8,25 €. Le libraire lui fait une réduction de 0,50 € sur le prix du livre. Calculer le prix total que Margot doit payer de deux façons différentes et, pour chaque façon, écrire les calculs sur une seule ligne.

Lors de la mise en commun, le professeur écrit l'égalité suivante :

$$2,75 + 8,25 - 0,50 = (2,75 + 8,25) - 0,50 = 2,75 + (8,25 - 0,50)$$

Exercice 2



Calculer la distance AC de deux façons différentes et, pour chaque façon, écrire les calculs en une seule ligne.

On obtient l'égalité : $7,8 + 4,2 - 2,2 = (7,8 + 4,2) - 2,2 = 7,8 + (4,2 - 2,2)$

Bilan

Étant donnés trois nombres a , b et c quelconques, on a l'égalité :

$$a + b - c = (a + b) - c = a + (b - c)$$

Les deux égalités étant au tableau, le professeur demande aux élèves d'écrire d'autres égalités du même type avec des nombres de leur choix pour s'assurer que les élèves ont bien repéré la structure commune à ces deux égalités. Ensuite il demande aux élèves de formuler une propriété à l'aide de lettres, comme ils l'ont déjà fait pour la distributivité.

Étape 1 : Égalités à trous

Compléter les pointillés :

$$\begin{array}{rclcl} 12 & + & \dots & = & 27 \\ 38 & + & \dots & = & 83 \\ 438 & + & \dots & = & 705 \\ 58 & + & \dots & = & 58 \\ 9 & + & \dots & = & 7 \end{array}$$

Les élèves complètent d'abord en calculant mentalement puis, lorsque les nombres deviennent compliqués, ils posent la soustraction. S'ils n'ont pas l'idée de la soustraction, on peut leur autoriser la calculatrice et leur demander de préciser l'opération tapée pour trouver la solution. Beaucoup d'élèves disent que la dernière égalité est impossible car on ne sait pas calculer $7 - 9$ mais certains proposent -2 (trouvé grâce à la calculatrice ? Peut-être est-il donc préférable de ne pas l'autoriser ?).

Le professeur relance alors le travail en insistant pour que cette dernière opération devienne possible. Il explique que, jusque là, effectivement, c'était impossible, mais qu'aujourd'hui, un grand pas va être franchi...

Des élèves demandent alors si on peut remplacer les pointillés par autre chose qu'un nombre tout seul. Le professeur leur répond « oui ».

Des élèves proposent de mettre $7 - 9$ à la place du trou. Ayant occulté la nécessité des parenthèses, le calcul devient alors possible. En effet, on effectue : $9 + 7 = 16$ et $16 - 9 = 7$.

Le professeur incite alors les élèves à trouver plusieurs autres solutions. Les élèves proposent $6 - 8$ ou $5 - 7 \dots$ ou encore $0 - 2$.

Lors de la mise en commun, les élèves confrontent leurs solutions et vérifient qu'elles répondent bien au problème posé. On peut en déduire que : $7 - 9 = 2 - 4 = 1 - 3 = \dots = 0 - 2$.

Le professeur explique alors que le nombre $0 - 2$ sera désormais noté -2 . Dans un souci de simplification, on s'affranchit dès le départ des parenthèses autour de -2 sauf s'il est situé après un signe opératoire.

Le nombre négatif est donc introduit comme différence de deux entiers dans le cas où le nombre soustrait est plus grand que le nombre auquel on le soustrait. Ceci est cohérent avec l'introduction des nombres rationnels positifs, vu en classe de 6^{ème}, comme quotient de deux entiers.

Exercice

Écrire plusieurs égalités ayant -2 comme solution.

Les élèves peuvent écrire :

$$\begin{array}{lll} 3 + (-2) = 1 & \text{et} & 1 - 3 = -2 \\ -2 + 5 = 3 & \text{et} & 3 - 5 = -2 \\ 2 + (-2) = 0 & \text{et} & 0 - 2 = -2 \end{array}$$

Bilan

On peut effectuer des soustractions pour lesquelles le premier nombre est plus petit que le deuxième.

Le résultat est un nombre négatif. Il s'écrit avec un signe $-$.

$$-2 = 0 - 2 = 1 - 3 = 7 - 9 = \dots$$

On a alors : $9 + (-2) = 7$.

Étape 2 : Les nombres opposés**Exercice**

Compléter les égalités suivantes :

$$\dots + 7 = 0$$

Etc.

On redonne des additions à trous avec une solution positive ou négative, en variant la place du nombre manquant, et on glisse parmi ces exercices, l'égalité ci-dessus.

Bilan

Deux nombres sont opposés quand leur somme vaut zéro.

$$-7 + 7 = 7 + (-7) = 0.$$

Les deux nombres 7 et -7 sont opposés.

Par opposition au nombre négatif -2 , le nombre 2 sera appelé nombre positif et pourra se noter $+2$.

L'ensemble des nombres positifs et négatifs est appelé l'ensemble des nombres relatifs. Il est composé des nombres que nous connaissions déjà (les nombres positifs) et des nombres négatifs.

Ainsi, nous avons introduit les nombres relatifs à partir d'un besoin mathématique et en cohérence avec les nombres déjà connus. Reste maintenant à généraliser l'addition, à repérer ces nombres sur une droite graduée, à introduire la soustraction.

Ces parties sont développées dans la brochure : Groupe didactique des mathématiques au collège, *Entrées dans l'algèbre 6^{ème} et 5^{ème}*, Bordeaux, IREM, 2007.

En cinquième : *Des déplacements pour introduire les nombres relatifs*

Christian JUDAS et Georges PONS – IREM des Pays de la Loire
D’après une idée de Martine JANVIER

Parmi les différentes introductions possibles pour les nombres relatifs, bilans de gains et de pertes, ascenseur, chronologie, opérations à trou, etc., l’utilisation de déplacements sur la droite graduée nous a semblé particulièrement intéressante puisque cela permet en même temps d’introduire les nombres relatifs et de les faire vivre tout de suite avec l’introduction de l’addition à partir de deux déplacements successifs.

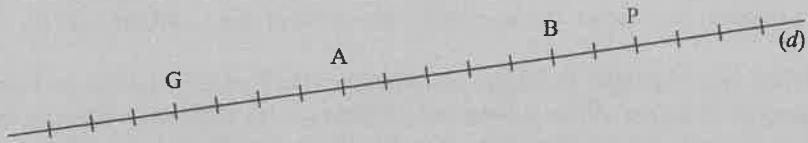
Nous avons expérimenté une introduction utilisant la composition des déplacements. La première expérimentation de cette activité, décrite ci-dessous, nous a amené à prolonger notre réflexion et à la modifier de façon importante.

Premières expérimentations

Deux expérimentations de cette activité ont eu lieu dans deux classes de deux collèges, avec des déroulements un peu différents.

Introduction des entiers relatifs

Un déplacement sur une droite



Complète le tableau et place les points manquants sur la droite selon les indications suivantes :

Déplacement de...	A à B	A à G	à B	A à P	P à G	B à S	F à A	S à P	F à F	A à S	G à P	à	à	B à F
Codage correspondant	+5	-4				-4	-4					+4	-3	

Note comment tu as procédé et écris toutes tes remarques.

Dans les deux classes, les élèves ont démarré rapidement et trouvé facile le travail demandé. Leurs productions individuelles ont été ramassées pour analyse.

Sur les deux classes :

- 12 élèves placent F en G (quelquefois légèrement à côté pour que les deux points ne soient pas confondus...) et ne peuvent donc pas trouver de déplacement de codage -3 ;
- 3 ou 4 autres font des erreurs marginales.

Concernant leurs méthodes, la plupart font des remarques sur la façon de se déplacer sur la droite graduée :

- o la majorité en faisant référence à la droite ou à la gauche, d'autres à la montée ou la descente, à l'avant ou l'après ;
- o une référence au point de départ ;
- o quelques références au nombre de segments ou de « traits ».

Dans une des classes, des travaux rapides en groupes de quatre ont permis de corriger *toutes* les erreurs, il n'y avait donc pas matière à faire présenter les travaux de groupes pour en débattre. Deux travaux de groupes ont été retroprojetés pour montrer qu'il y avait trois solutions pour l'antépénultième colonne et pour trouver toutes les solutions de la pénultième colonne.

Dans l'autre classe, le professeur n'a pas jugé utile de faire des travaux de groupes.

Dans les deux cas, la synthèse a facilement pu se faire en classe entière sur les objectifs prévus :

- mettre en place la convention sens positif/sens négatif ;
- remarquer à quoi correspondent deux nombres opposés et de donner l'expression ;
- remarquer qu'à un même codage peuvent correspondre plusieurs déplacements.

On ne désigne pas encore ces nombres comme étant des nombres relatifs.

La facilité avec laquelle les élèves ont réussi cette première partie de l'activité nous a posé question. Nous savons par expérience les difficultés qui surgissent lorsqu'on introduit la soustraction : certains élèves semblent alors perdre tout ce qu'ils ont « appris » sur l'addition. L'introduction des nombres relatifs marque une vraie rupture dans l'apprentissage (« soustraire, c'est additionner ! »). Mais différer la prise de conscience des ruptures, et l'affrontement aux difficultés, nous semble de nature à les aggraver.

Le choix d'introduction fait dans cette première activité s'appuie au maximum sur les connaissances préalables des élèves. Pour composer -2 et -3 , $+7$ et $+12$, -3 et $+5$, ils n'ont besoin de rien découvrir de nouveau. Dans les deux premiers cas, il faut une addition de naturels et dans le second cas une soustraction. La seule nouveauté, composer 2 et -7 , est facilement résolue

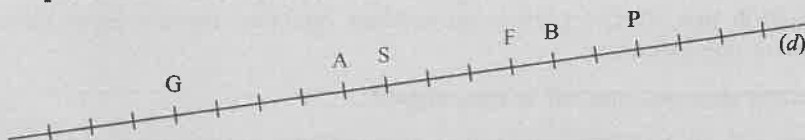
dans un contexte concret. En effet, dans cette activité, les déplacements sur la droite pourraient être remplacés par n'importe quelles variations (ascenseur, température, etc.). Ce qui est spécifique à la droite graduée c'est-à-dire la présence d'un point origine et d'une unité, ce qui entraîne que les nombres y ont deux statuts (repère, variation ou déplacement), n'est pas présent dans cette première activité. Finalement, on a introduit un codage nouveau sans toucher au sens de l'addition, sans pointer le rôle de 0.

Cette première étape est-elle vraiment utile ? Il nous a semblé que non, d'où la nouvelle version de cette activité.

Des déplacements pour introduire les nombres relatifs

Première séance

I - Déplacement sur une droite



Utilise la droite graduée ci-dessus pour compléter le tableau, soit par les noms des points, soit par les codages correspondants (Co).

	Co		Co		Co		Co		Co		Co
Le déplacement...	de A à B	+5	de G à A	...	de ... à ...	de A à F	...	de ... à ...	-4	de ... à ...	-4
suivi du déplacement...	de B à P		de ... à ...	S à G	-5	de ... à ...	+3	de G à P		de ... à ...	+5
c'est le déplacement...	de ... à ...		de G à P	P à G		de ... à ...		de ... à ...	+7	de ... à ...	

Deux ou trois minutes après la distribution de la feuille, le professeur s'assure que la consigne est comprise, ainsi que la façon dont se lit le tableau. Les élèves continuent en travail individuel pour un temps à apprécier. Il y a sans doute matière à un travail en groupes. Le professeur ramasse donc les feuilles pour les étudier et préparer ainsi la séance suivante, en constituant des groupes en fonction du contenu des productions des élèves.

Deuxième séance

Pour gagner du temps, le professeur a photocopié des tableaux sur des feuilles A3 (une par groupe).

Pour le travail en groupes, le professeur rend les feuilles individuelles et donne les consignes suivantes :

Dans chaque groupe :

- vous vous mettez d'accord sur le tableau,
- vous écrivez comment vous avez procédé pour le faire,
- vous écrivez toutes vos remarques.

Tout cela est à faire sur une affiche sur laquelle vous collerez le tableau compléter que je vous ai distribué sur une feuille A3.

Quand ce sera fini et que toutes les affiches seront exposées, je désignerai l'un d'entre vous qui aura à répondre si d'autres élèves ont des questions à poser ou des remarques à faire sur votre affiche.

L'exposition des affiches permet de corriger quelques erreurs éventuelles et d'arriver à une synthèse :

- convention sens positif et sens négatif;
- constat qu'un même codage peut correspondre à plusieurs déplacements;
- désigner ces nombres comme des nombres relatifs;
- établir que le signe + n'est pas nécessaire pour les nombres positifs, ceux-ci étant assimilés aux nombres naturels.

Certains groupes (4 sur les 12 groupes de deux classes lors d'une expérimentation) remarquent qu'il est possible de faire des additions ou des soustractions pour trouver le codage de la dernière ligne, sans indiquer cependant comment ils déterminent le signe.

Voici quelques remarques effectuées par les élèves sur les affiches.

La première lettre de la ligne "le déplacement" et la deuxième lettre de la ligne "suivi du déplacement" est égal à la ligne "c'est le déplacement". (C'est comme si on enlevait la deuxième lettre de la ligne "le déplacement" et la première lettre de la ligne "suivi du déplacement").

Pour trouver le résultat de la ligne "c'est le déplacement", il faut additionner ou soustraire les nombres de la première et de la deuxième ligne de la même colonne.

On a vu qu'en additionnant ou en faisant une soustraction avec les deux premiers chiffres, on trouvait le résultat de la troisième ligne.

$$\begin{array}{r|l} \text{Ex: } 5+2=7 & 4+3=7 \\ 4+7=11 & 11-4=7 \\ 6+5=11 & 11-6=5 \end{array}$$

En fonction des chiffres trouvés, nous avons pu placer les lettres.

C'est l'occasion pour le professeur de partir de ces remarques pour poser la question à la classe :

Par quelle opération pourrait-on représenter les deux déplacements successifs de chaque colonne ?

Les élèves travaillent individuellement, puis le professeur relève les réponses.

Certains élèves proposent de faire des additions ou des soustractions. Quand ils les écrivent, il apparaît qu'il s'agit d'additions ou de soustractions de la longueur des déplacements et non des nombres relatifs eux-mêmes.

D'autres (non redoublants !) proposent une addition, en écrivant les nombres relatifs. Cette proposition déconcerte mais elle est défendue avec comme argument : « comme ça, c'est la même opération pour toutes les colonnes ». La plupart n'écrit pas seulement l'opération demandée, mais aussi son résultat.

La synthèse permet :

- de valider l'addition pour représenter deux déplacements successifs,
- d'écrire les sommes correspondantes avec leur résultat,
- de fixer la convention des parenthèses serviront qui évitent l'ambiguïté de deux signes + et - qui se suivent.

Le but de la consigne suivante est de faire fonctionner l'addition des nombres relatifs :

Complète les égalités suivantes :

$$\begin{array}{llll} 7 + (-9) = \dots & -6 + (-6) = \dots & 1 + (-9) + (-1) = \dots \\ 0 + (-8) = \dots & -32 + 54 = \dots & 2.7 + (-5, 2) = \dots \end{array}$$

Il n'est pas nécessaire de prévoir un travail en groupes après ce travail individuel.

Mais il est intéressant de faire le point sur les méthodes :

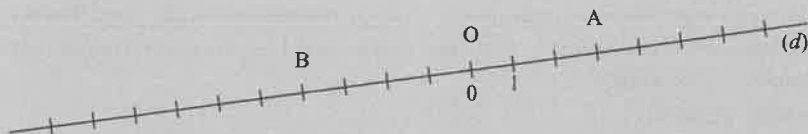
- peu d'élèves utilisent effectivement la droite graduée ;
- certains donnent des explications du genre : « On se déplace de 7 unités dans le sens positif. Pour les 9 unités dans le sens négatif, on en fait d'abord 7 qui annulent les 7 dans le sens positif puis on en fait encore 2 dans le sens négatifs donc -2 . » ;
- d'autres expliquent que : « quand il y a deux déplacements en sens contraires, on regarde lequel a le plus d'unités, et c'est le signe du résultat, puis on fait la soustraction des longueurs des déplacements. » ;
- d'autres encore expliquent que : « 1 et -1 , ça s'annule. ». Ils répondent ainsi à ceux qui contestent que l'ordre dans lequel se font les déplacements n'a pas d'importance, ils l'ont vérifié.

Le professeur peut alors :

- valider les méthodes énoncées pour additionner les nombres relatifs en complétant avec tous les cas ;
- en particulier, écrire : $7 + (-9) = 7 + (-7) + (-2) = -2$
et $-32 + 54 = -32 + 32 + 22 = 22$
- définir les nombres relatifs opposés comme des nombres dont la somme est nulle.

À ce stade, aucune règle n'est écrite mais des exercices fréquents d'additions de nombres relatifs, en calcul écrit et aussi en calcul mental, seront l'occasion de les énoncer systématiquement.

II - Comparaison



On a vu en 6^{ème} que l'abscisse est un nombre qui permet de repérer un point sur une demi-droite graduée.

On peut imaginer que cela correspond aussi au codage d'un déplacement à partir de l'origine, le point O.

Ainsi, on dira que 3 est l'abscisse de A car cela correspond à un déplacement de 3 unités dans le sens positif à partir de O.

De même, on dira que l'abscisse de B est -4 puisque cela correspond au codage d'un déplacement négatif de 4 unités à partir de l'origine O.

Complète par le symbole $>$ ou $<$ pour comparer les deux abscisses :

$-6 \dots 1$; $2 \dots -5$; $0 \dots 7$; $0 \dots -7$; $-4 \dots -1$
 $2 \dots -2$; $-7 \dots 7$; $-7 \dots 0$; $-1 \dots -10$

Écris ta méthode pour comparer deux nombres relatifs et note tes remarques.

D'après les expérimentations, les élèves font très peu d'erreur dans les comparaisons de nombres relatifs. Un travail en groupe n'est donc pas nécessaire. Les difficultés des élèves sont dans l'expression de leurs méthodes. Il est intéressant par conséquent que le professeur photocopie sur transparent quelques formulations pour les projeter à la classe, dans la mesure où elles mettent en évidence la nécessité d'une expression pour parler « du nombre sans le signe ».

Voici quelques propositions d'élèves :

2^o quand c'est un nombre négatif je prend le plus proche de 0 et quand c'est nombre positif je prend le plus loin de 0 et quand c'est un nombre négatif et positif je prend le nombre positif.

Les nombres relatifs avec le ^{signe} ~~moins~~ sont toujours inférieur au signe plus.

Si il y a deux nombres relatifs avec le signe moins c'est toujours le plus grand nombre qui est inférieur à un nombre plus petit.

Si il y a deux nombres relatifs avec le signe plus c'est toujours le plus grand nombre qui est supérieur au plus à un nombre plus petit.

* Quand les deux nombres sont négatifs, il suffit de regarder le déplacement (le nombre d'unités passées). Le nombre avec le plus d'un grand déplacement est le nombre le plus petit lorsqu'ils sont tous les deux négatifs.

* Quand il s'agit d'un nombre négatif et d'un nombre positif, c'est toujours le nombre négatif le plus petit.

Pour comparé il y a plusieurs méthodes:

- Quand se sont 1 nombre positif et 1 nombre négatif, on sait déjà que le nombre positif sera supérieure au nombre négatif.
- Lorsqu'il y a 2 nombre négatif celui qui se rapproche le plus de 0 est le plus grand
- Lorsqu'il y a 2 nombre positif celui qui se rapproche le plus de 0 est le plus petit.

Cette présentation permettra donc

- d'introduire l'expression « distance à zéro »
- de l'utiliser pour énoncer des règles de comparaison des nombres relatifs.

Pour aller plus loin...

Nous pensons que l'introduction de la soustraction des nombres relatifs doit suivre immédiatement celle de l'addition. Nous savons que, quelque soit le choix fait pour l'introduction des nombres relatifs, l'apparition de la soustraction amènera des confusions chez les élèves avec l'addition. C'est la confrontation, dès que possible, de ces deux opérations qui permettra au mieux de les différencier.

Un petit problème

DIVISION PAR 7

A. On pose la division de 1 par 7.

$$\begin{array}{r}
 1,000000\dots \\
 \begin{array}{r}
 30 \\
 20 \\
 60 \\
 40 \\
 50 \\
 1\dots
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 7 \\
 \hline
 0,142857\dots
 \end{array}$$

Quel est le millième chiffre après la virgule ?
Et quel est le 2008^{ème} ?

B. Sans calcul !

Quelle division donne 0,285714285714... ?

C. Quel est le troisième chiffre après la virgule de $\frac{3}{7}$?

Le cinquième chiffre de $\frac{5}{7}$?

Et le 16^{ème} chiffre de $\frac{16}{7}$?

PARTIE ③

LES IRRATIONNELS

Aperçue en quatrième, la racine carrée prend vraiment son statut de nombre en troisième. Comment mettre en défaut les nombres connus jusqu'à présent ? Comment aider les élèves à franchir ce pas qui, dans l'histoire des mathématiques, fut un véritable obstacle ?

Les deux premières activités « Carré d'aire double » et « Rectangle d'aire 2 » s'appuient sur la géométrie ; partant de la découverte de grandeurs incommensurables, les rationnels faisant défaut pour les mesurer, de nouveaux nombres apparaissent qui nécessitent l'existence de nouvelles notations pour les écrire.

En tant que coefficient d'agrandissement, la racine carrée perd son statut de mesure dans l'activité « La racine carrée en troisième ». Dans cette situation, ce nouveau nombre est performant si l'on conserve sa valeur exacte, de plus le produit de deux racines carrées prend ici vraiment du sens.

Les nombres prennent pleinement leur statut lorsqu'on opère avec eux ; dans l'activité de l'IREM de Poitiers, en travaillant, sur leurs différentes écritures, les règles de calcul sont mises en place. À partir d'une figure géométrique particulière, il est demandé la recherche de la longueur d'un segment ; la réponse se présente sous des formes d'écritures très variées suivant les procédures adoptées, ce qui justifie et motive un travail sur les règles de transformations et de calculs avec des racines carrées.

Pour compléter ces activités, on peut citer un article de Marc Picot « $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ on ne peut pas le faire » dans le n° 49 de la revue Repère-IREM. En utilisant le support de la droite graduée, il construit et place ces nouveaux nombres comme les décimaux et les rationnels ont été placés les années précédentes. De même, il opère avec eux et montre, dans le véritable sens de voir, quelques calculs simples.

En troisième : *La racine carrée au collège*

Jean-Claude FÉNICE, Guillaume FRANÇOIS,
 Fabienne LANATA
 Béatrice LEGOUPIL-FRACKOWIAK, Dominique POIRET
 Commission Inter-IREM Collège

Beaucoup d'activités peuvent être menées en classe autour de la racine carrée.

Dans nos programmes, on nous incite à présenter la notation $\sqrt{}$ avant d'avoir travaillé sur la racine carrée d'un nombre positif en tant que nombre et d'avoir démontré son irrationalité dans certains cas. On peut s'interroger sur le sens que l'on donne alors à cette nouvelle notion.

Les programmes du collège proposent que l'on démontre l'irrationalité de $\sqrt{2}$ après avoir introduit la notation, mais ne serait-ce pas parce qu'il y a irrationalité que nous avons besoin de ce nouveau symbole ?

La notion de racine carrée introduit pour les élèves de quatrième une nouvelle catégorie de nombres puisque, pour la première fois, les élèves sont confrontés à des longueurs dont ils ne peuvent pas exprimer la mesure. Intéressons-nous à l'un d'entre eux : $\sqrt{2}$.

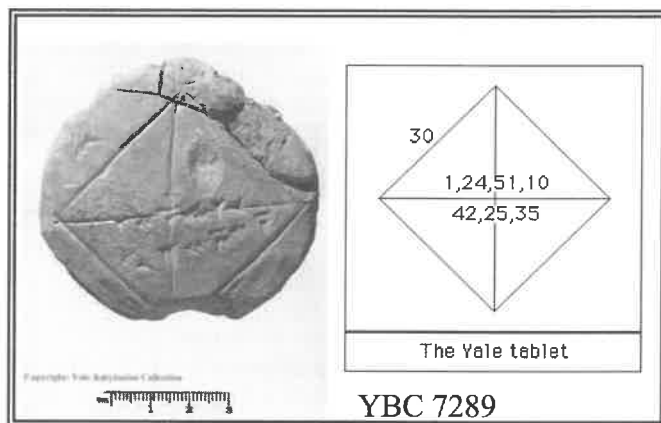
$\sqrt{2}$ est un nombre qui a passionné les mathématiciens depuis longtemps et qui pourtant est peu connu du grand public, ce qui n'est pas le cas d'autres irrationnels comme π ou le nombre d'or. $\sqrt{2}$ a pourtant son importance puisqu'il intervient dans notre vie courante (le format standard des feuilles de papier en est un exemple ¹⁷).

Le fait de s'intéresser à l'histoire de la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ peut permettre de nous éclairer sur la place de sa démonstration dans nos classes. Ne faudrait-il pas garder à l'esprit que démontrer cette irrationalité n'a pas pour seul but d'apprendre à effectuer des déductions mais doit aussi aider l'élève à définir $\sqrt{2}$?

La première représentation connue de $\sqrt{2}$ date d'environ 1700 avant J.-C. Ce nombre apparaît sur une tablette d'argile babylonienne nommée YBC 7289. Nous pouvons y voir un carré avec ses diagonales, les mesures des segments et une valeur approchée de $\sqrt{2}$. Nous pouvons imaginer que le problème devait être la recherche de la mesure de la diagonale d'un carré de côté 30 et la réponse donnée par cette tablette est :

¹⁷Voir annexe 1

« Je multiplie trente par 1,24,51,10 et on obtient une diagonale de 42,25,35 (en écriture sexagésimale). ».



Ici, $\sqrt{2}$ est une constante géométrique qui est le nombre par lequel il faut multiplier la mesure du côté d'un carré pour obtenir celle de sa diagonale. Quatre questions, présentées dans le tableau suivant, nous viennent à l'esprit. Elles pourraient être utilisées comme fil conducteur pour découvrir $\sqrt{2}$ dans nos classes et surtout faire prendre conscience à nos élèves que c'est un nombre.

	Questions	Eléments de réponse	Activités correspondantes
1	Comment les babyloniens savaient-ils que ce nombre était le rapport entre la diagonale d'un carré et son côté ?	Une méthode pour montrer que $\sqrt{2}$ est le rapport entre la diagonale d'un carré et son côté est proposée dans l'exercice de la duplication du carré. La réponse à la question se trouve dans le Ménon de Platon. Nous ne pouvons pas affirmer que les Babyloniens ont eu recours à une telle méthode mais cela reste probable.	Activité « Carré d'aire double » extraite de la brochure <i>Autour de la notion d'activité</i> de l'IREM de Rouen. Lecture du texte de Platon ¹⁸ en collaboration avec le professeur de lettres de la classe.
2	Comment ont-ils calculé ce nombre (qui multiplié par lui-même donne 2) à une précision au cent millièrme ?	On a retrouvé des tablettes d'argile : ils essayaient de construire des rectangles de même aire, de plus en plus proches du carré en partant d'un rectangle de dimensions 1 et 2 (donc d'aire 2).	Construction de tels rectangles dans l'activité « Rectangles d'aire 2 ».

¹⁸Voir annexe 2

	Questions	Éléments de réponse	Activités correspondante
3	À quoi ce nombre pouvait-il leur servir ? Mais alors, pourquoi voulait-on une évaluation aussi précise ? Ce nombre est-il un décimal ? Ce nombre est-il rationnel ?	Sans doute pour l'architecture, notamment pour tracer un carré sur le sol, assez grand afin de construire un bâtiment. Certains pensent que c'était par jeu intellectuel, par défis. Sûrement pas par les Babyloniens mais cette question est souvent soulevée par nos élèves. Ce sont les Pythagoriciens qui ont démontré les premiers que $\sqrt{2}$ était irrationnel.	Afin de démontrer rationalité de $\sqrt{2}$, rymonne LE BERRE l'IREM de Lyon propose deux exercices dans « PGCD aux nombres irrationnels - approche métrique » dans un article de Repères IRI (n° 46, janvier 2002).
4	Comme les racines carrées sont des nombres, nous pouvons alors opérer avec elles. Mais comment ?		Activité « La racine carrée en 3 ^{ème} » d'après situation proposée Éric RODITI. Activité « Calculer avec les irrationnels » issue de l'article <i>Enseigner à partir d'activités, est-ce toujours raisonnable ?</i> dans Repères IREM (n°8, juillet 1992).

Dans l'activité « Carré d'aire double » à partir de *Autour de la notion d'activité* de l'IREM de Rouen, « racine carrée de 2 » est vue comme la mesure du côté d'un carré d'aire 2. Les élèves font le constat que ce n'est pas un nombre décimal, ni un nombre rationnel¹⁹ : c'est donc un nouveau nombre. On le note $\sqrt{2}$.

L'activité « Rectangles d'aire 2 » permet d'approcher $\sqrt{2}$ par des rationnels.

L'activité « La racine carrée en troisième » d'après une situation proposée par Éric RODITI²⁰ reprend le questionnement précédent. Elle utilise $\sqrt{2}$ comme coefficient d'agrandissement et non plus comme une mesure, consolidant ainsi son statut de nombre. Simultanément, la règle sur le produit des racines carrées émerge.

¹⁹L'activité ne permet pas de l'établir. Si les élèves proposent que racine de 2 est un rationnel, le professeur peut proposer une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ ou simplement signaler qu'il en existe. Une de ces démonstration est proposée en annexe 3.

²⁰RODITI Éric, Cahier n°17, La racine carrée en troisième : Etude d'une activité, IREM Paris 7. 1996.

Avec l'activité « Calculer avec les irrationnels »²¹, les élèves sont amenés à rencontrer différentes écritures d'un même nombre et donc à conjecturer les règles opératoires justifiant leur égalité. Elle permet également d'invalidier le théorème-élève relatif à la somme des racines²².

Carré d'aire double

Le problème : un carré étant donné, obtenir un carré d'aire double.

1. Différentes manières de faire vivre la situation : scenarii et déroulements prévus

Objectif commun aux trois scénarii : les élèves doivent découvrir qu'il leurs manque un nombre pour exprimer la longueur du côté d'un carré d'aire double d'un carré donné.

Scénario 1

Objectif

Cette activité est destinée à faire prendre conscience aux élèves de l'existence d'un nombre positif dont le carré est 2 puis à proposer l'écriture exacte de ce nombre.

Énoncé

Consigne n° 1 : Est-il possible d'obtenir un carré d'aire 2 dm^2 ?

Consigne n° 2 : Est-il possible d'obtenir un carré d'aire double d'un carré de 1 dm^2 ?

Consigne n° 3 : Est-il possible d'obtenir un carré d'aire double de celui qui est représenté ci-dessous ?

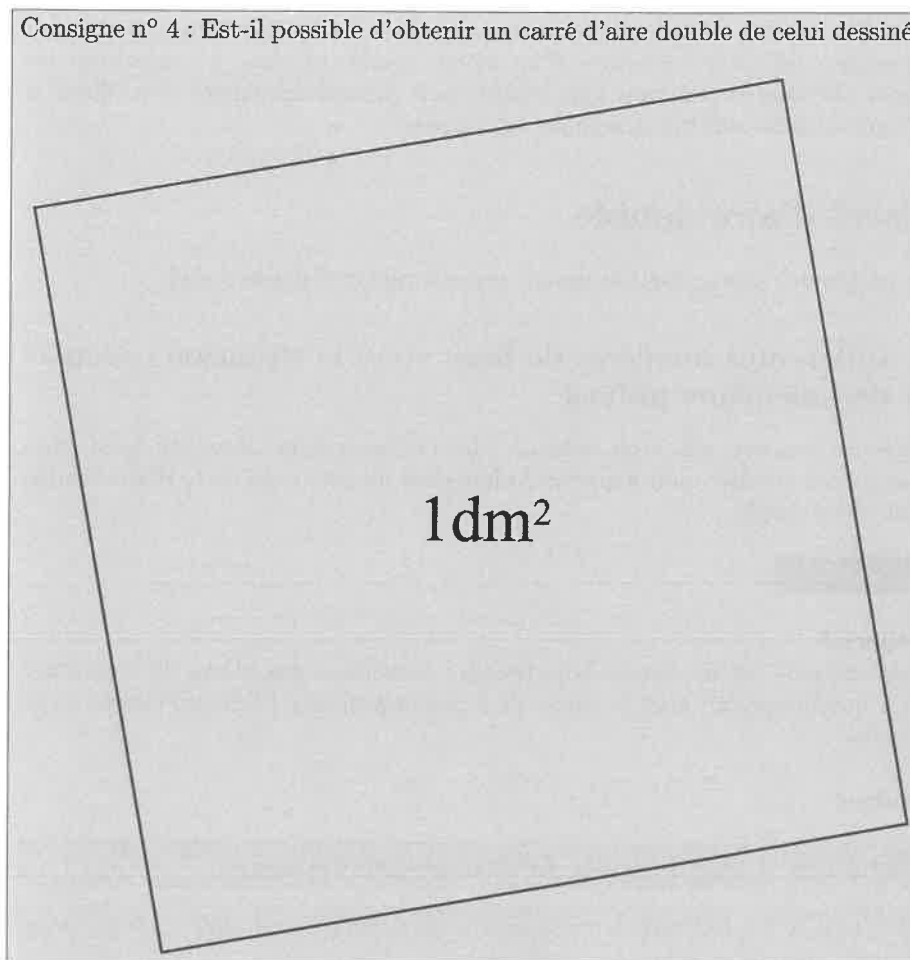


Dans cette consigne, le carré n'est pas représenté en vraie grandeur.

²¹MATHIAUD Michèle « Enseigner à partir d'activité, est-ce bien raisonnable ? », in Repères-IREM n°8, 1992, pages 15-16 et 28-31 à partir d'un travail de l'IREM de Poitiers.

²²Une activité de PICOT Marc, « Racine de 2 + racine de 3, on peut pas le faire », in Repère-IREM n°49, 2002, p. 5-16 non présentée dans cet article permet aussi d'invalidier le théorème-élève relatif à la somme des racines.

Consigne n° 4 : Est-il possible d'obtenir un carré d'aire double de celui dessiné



Dans cette consigne, le carré est représenté en vraie grandeur.

Mode de travail

Des groupes de niveau sont formés avec une consigne différente dans chaque groupe.

La première amène directement les élèves à s'interroger sur la mesure du côté d'un carré d'aire donnée. Alors que les consignes suivantes soulèvent la question du passage d'un carré à un autre carré d'aire donnée. Les 3^{ème} et 4^{ème} consignes sont supposées inciter plus fortement à une résolution par découpage du carré et recomposition d'un second carré avec le double de pièces.

Déroulement prévu

La formulation « Est-il possible de ... » permet aux élèves d'aborder la question de manière ouverte. Un cadre précis de réflexion ne leur est pas imposé. Des procédures numériques, algébriques (résolution de l'équation $x^2 = 2$) et au

moins une construction géométrique vont se confronter au terme du travail des groupes, pour établir que le côté de ce carré existe et qu'il existe donc aussi un nombre qui le mesure.

On essaie ensuite de déterminer une écriture décimale de ce nombre, par essais erreurs. L'insuccès des premiers essais amène l'enseignant à institutionnaliser (en admettant le résultat ou en le démontrant) que l'écriture de ce nombre n'est ni décimale, ni fractionnaire²³ ; il propose la notation $\sqrt{2}$ comme une convention.

Scénario 2

Énoncé

L'énoncé est le même que celui du scénario 1.

Mode de travail

Phase individuelle de recherche, puis travail en groupes, avec les mêmes consignes que précédemment ; mais les 4 consignes cohabitent dans chaque groupe.

Déroulement prévu

Un débat sur l'équivalence des consignes s'ouvre dans chaque groupe, dès le début de la recherche. Les élèves prennent conscience que les quatre consignes correspondent à un même problème. Les procédures évoquées dans le scénario précédent vont alors cohabiter dans un même groupe. On attend ainsi que les élèves fassent eux-mêmes le lien entre la recherche du nombre d tel que $d^2 = 2$, dans le cadre numérique ou algébrique, et celle d'une construction géométrique qui assure l'existence de la mesure du côté solution du problème.

Scénario 3

Énoncé

Construire deux carrés de telle sorte que le deuxième ait une aire double de celle du premier.

Mode de travail

Ce travail est mené sous forme de narration de recherche²⁴.

Déroulement prévu

La possibilité de la construction ne peut pas être remise en cause par les élèves, mais l'absence de mesure laisse à celui qui veut s'engager dans une procédure numérique l'initiative du choix d'une valeur de l'aire du carré. Le problème étant posé uniquement dans le cadre géométrique mais difficile à résoudre dans ce cadre, on attend que la recherche s'oriente aussi vers l'utilisation de nombres. L'enseignant établit le diagnostic des représentations de la notion de racine carrée chez les élèves. Il peut alors construire un scénario adapté pour les faire évoluer au sein d'un débat.

²³Cf. note 19.

Quelques productions

Extrait de la narration de Jimmy :

Expliquer la solution à un élève :

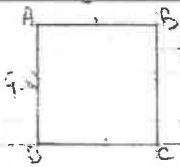
D'abord tu dois tracer un carré.
Ceci étant fait tu calcules l'aire de ce carré :
pour cela tu multiplies un côté du carré avec un autre
côté du carré, ou bien tu calcules le côté du carré au
carré (exemple : si le côté est 5, cela fera $5 \times 5 = 25$
ou alors $5^2 = 25$).

Ensuite il suffit de se dire que d'après ces valeurs
le côté du carré n°1 sera égal au $\sqrt{\text{de l'aire}}$
(dans l'exemple : $\sqrt{25}$).
le côté du carré n°2 sera égal au $\sqrt{\text{de l'aire}}$
(dans l'exemple : $\sqrt{32}$).

Ainsi en faisant le calcul pour trouver le carré
n°2, on pourra construire un carré car tout
les côtés d'un carré ont même mesure.
(dans l'exemple, cela donnera :
 $(\sqrt{32}) \approx 5,656854$
On arrondira à 5,66.
Et on pourra faire un carré dont tout les côtés
auront pour mesure 5,66 cm (ce ne sera pas la même
des cm).

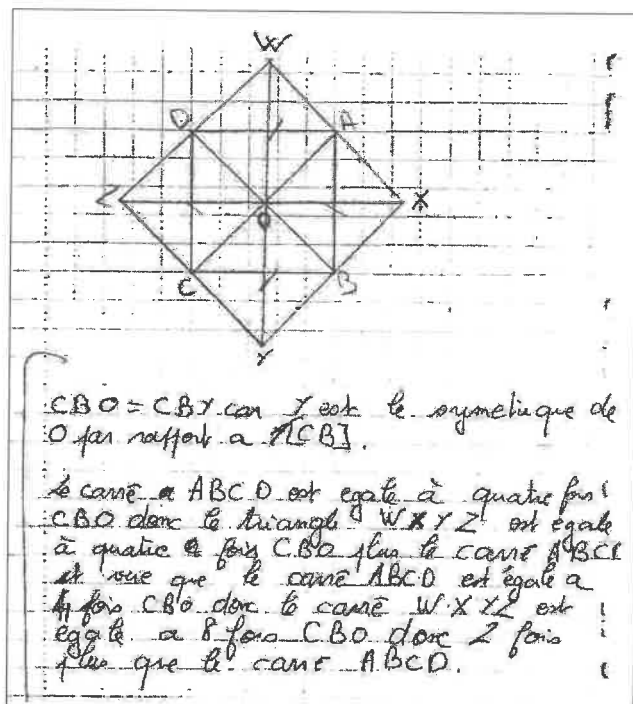
Extraits de la narration de Maxime :

A)



le carré ABCD fait 4 cm de côté donc
son aire est égale à $4 \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2$.
Donc le double de cette aire est 32 cm
donc $\sqrt{32}$ est égal à environ 5,66 cm
donc un carré de 5,66 cm de côté aura
une aire égale au double de l'aire du
carré ABCD.

(l'aire on c'est pas égal) Bonne remarque
à l'application
B) voir dernière



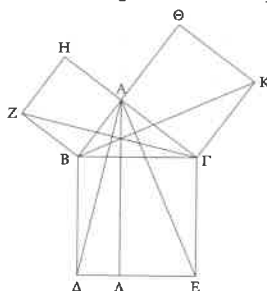
Jimmy reste dans le cadre numérique, il utilise la touche racine carrée de sa calculatrice et ne se pose pas la question de la validité de son résultat ($7,07 \times 7,07 = 50$?).

Quant à Maxime, il résout lui aussi le problème dans le numérique, mais la solution ne lui convient pas (pourquoi? Il est dommage de ne pas avoir de commentaires) et se convainc par une démonstration géométrique.

2. Les connaissances favorisant l'atteinte de l'objectif

Pour exploiter au mieux cette activité, il est souhaitable que les élèves :

- connaissent le théorème de Pythagore comme une relation entre des aires de carrés, et non seulement sous son aspect numérique.



(Figure de la proposition 47 du Livre I des *Éléments* d'Euclide)

- sachent manipuler (comparer, ajouter) des aires sans recours à la mesure;

- connaissent les propriétés du produit de deux nombres en écriture décimale (partie décimale, dernier chiffre...);

$$\sqrt{2} = 1,414213562$$

Car, c'est possible que le côté soit égal à 1,414213562

$$\begin{array}{r} 1,414213562 \\ \times 1,414213562 \\ \hline \end{array}$$

Non, c'est impossible car ça donnera obligatoirement un nombre pair.

- considèrent la notation $\frac{a}{b}$ comme représentant un nombre.

3. Analyses a posteriori

Les erreurs rencontrées dans la réalisation de ces scénarii :

- proportionnalité entre côté et aire du carré : « le côté du carré d'aire double est 2 dm ». Des élèves pensent que doubler l'aire d'un carré revient à doubler son côté :

impossible
- $1 \text{ dm}^2 \times 2 = 2 \text{ dm}^2$

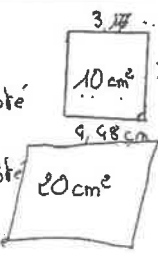
$\sqrt{10 \text{ cm}^2} \approx 3,17 \text{ cm de côté}$

$\sqrt{20 \text{ cm}^2} \approx 4,48 \text{ cm de côté}$

impossible car si on multiplie le côté du carré

$3,17 \text{ cm} \times 2 \approx 6,34 \text{ cm}$

Donc le double du carré de 10 cm^2 devrait faire $6,34$ alors qu'il fait $4,48$



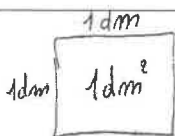
- confusion entre double et carré : « le double de 1 dm^2 est 1 dm^4 » :

aire d'un carré = côté x côté



Nous avons commencé par penser que le double de 1 dm^2 pouvait être 1 dm^4 .
Après réflexion et concertation, nous avons déduit la solution suivante, le résultat est : 2 dm^2 (confusion entre le double et le carré).
Résultat : toutes nos solutions sont simplement impossibles.

- ignorance des nombres non entiers, pour résoudre ce problème. Des élèves cherchent l'aire des carrés de côté 1 dm et 2 dm et concluent que le carré d'aire 2 dm^2 n'existe pas.



aire = côté $\times$ côté
 donc $1 \text{ dm} \times 1 \text{ dm} = 1 \text{ dm}^2$
 ce n'est pas possible car si l'aire est double de
 celle du carré, cela donnera 2 dm^2
 et comme
 $2 \text{ dm} \times 2 \text{ dm} = 4 \text{ dm}^2$
 donc l'aire du carré n'est pas le double de 1 dm^2
 et on obtiendra pas de carré.

- problèmes de conversion :

$$200 \text{ cm}^2 = 20 \text{ dm}^2$$

- confusion valeur exacte/valeur approchée :

$$\sqrt{20} = 4,5 \text{ dm}$$

- découpages homomorphes à la figure de départ (recherche d'un pavage avec des carrés, à la rigueur avec des rectangles) :

Nous avons découpé un carré
 de 10 cm de longueur :

- en carré de 2,5 cm
- en rectangle de 2,5 cm sur 5 cm
- en triangle de 7 cm sur 5 cm (isocèle)

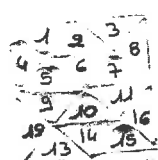
Puis nous les avons assemblés pour
 trouver un carré d'aire double de
 celle du carré.

Mais nous n'avons pas réussi avec les petits
 ■ et les ///.

Mais la solution avec les triangles a
 réussi.

Voilà la solution :

qui n'existe, car
 on a réussi



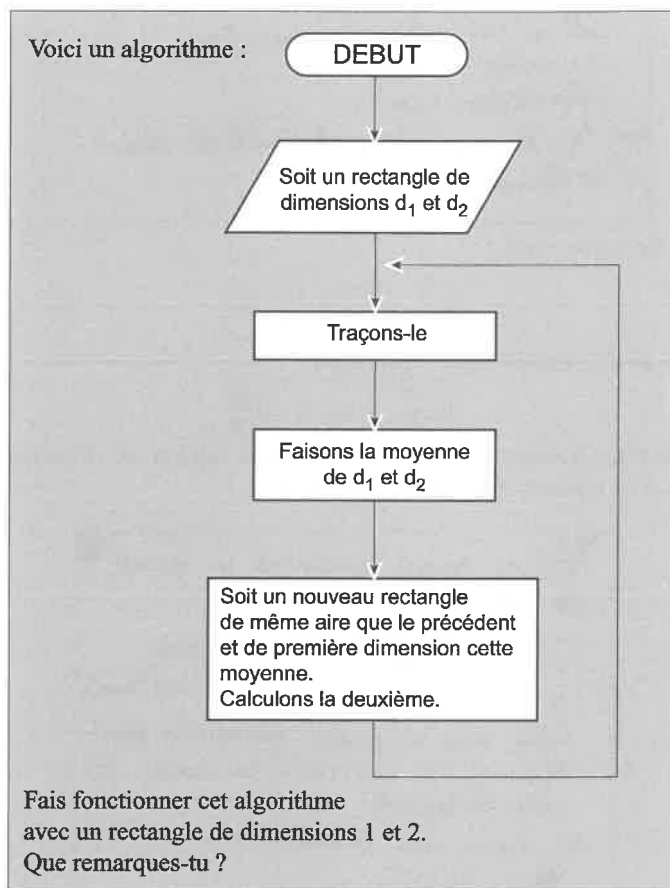
Duchonaud

Rectangles d'aire 2

Objectif

Approcher par un encadrement de fractions, la mesure du côté d'un carré dont l'aire vaut 2 (méthode historique).

Énoncé



Mode de travail

Phase individuelle de recherche, puis travail en groupe.

On prévoit un rapporteur par groupe afin d'exposer les résultats à l'aide d'un transparent.

Déroulement prévu

Les groupes exposent leurs travaux et une discussion se fait autour de cette suite de rectangles. Deux questions sont soulevées :

- Quel est le rectangle limite ?
- Quelles sont les limites des deux dimensions ?

Les tâches prévues pour l'élève sont les suivantes :

- tracé d'un rectangle ;
- connaissant l'aire et une des dimensions d'un rectangle, calcul de l'autre dimension ;
- calcul d'une moyenne arithmétique.

Analyse a priori

- On obtient une suite de rectangles d'aire 2 « de plus en plus carrés ».
- Les dimensions de ces rectangles sont de plus en plus proches du nombre qui multiplié par lui-même donne 2 et ces dimensions peuvent s'exprimer en fractions.
- Tous les élèves font des calculs avec des décimaux, mais peu le font avec des fractions. Lors de la présentation des rapporteurs, il faudra leur demander : « Avez-vous des valeurs exactes des dimensions ? » afin de relancer le débat et de les renvoyer faire leurs calculs avec des fractions.
- Question de l'enseignant : « Les rectangles ont-ils été construits (à la règle non graduée et au compas) ou tracés (avec tous les instruments que l'on souhaite) ? » Cette question pourra se substituer à la précédente pour lancer le débat sur valeur approchée ou écriture fractionnaire.

Bilan

On fait le constat avec les élèves que les fractions obtenues encadrent de plus en plus finement le côté du carré d'aire 2. On pourra alors les renvoyer à des lectures de textes qui expliquent que les égyptiens utilisaient des fractions comme valeurs approchées de $\sqrt{2}$. On vient de trouver des fractions approchant le nombre cherché. On ne sait toujours pas si ce nombre est rationnel, mais on peut dire qu'il n'est pas si facile à déterminer.

Après cette activité, on peut avoir une discussion sur l'irrationalité et introduire le symbole $\sqrt{\quad}$.

La racine carrée en troisième

Étude d'une activité²⁵ proposée par Eric RODITI

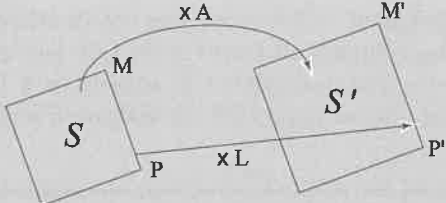
Objectifs

Trois objectifs principaux se dégagent :

1. Donner du sens à la racine carrée, lui donner statut de nombre ; pour cela l'écriture d'un nombre avec le radical doit être plus performante, plus utile que sa valeur approchée : « L'idée fondamentale de l'activité est que, si $\sqrt{2}$ mesure le côté d'un carré d'aire 2, on n'a pas intérêt à conserver la valeur exacte mais plutôt à en écrire une approximation décimale. En revanche, si $\sqrt{2}$ mesure l'agrandissement qui multiplie les aires par 2, on a intérêt à en conserver la valeur exacte (comme c'est le cas pour l'écriture fractionnaire des coefficients de proportionnalité) ».
2. Permettre un contrôle aux élèves des simplifications et des calculs avec les racines carrées.
3. Trouver une situation qui donne sens au produit de deux racines carrées.

Première séance

Énoncé



	MP	S	$M'P'$	S'	L	A
1	5					
2		16				
3		3				
4	5				2	
5	5		15			
6		4		100		
7		9		36		
8		7		35		
9		3		60		

Mode de travail

Les élèves travaillent individuellement, puis par deux et enfin par quatre.

Il s'agit de faire fonctionner la relation entre le côté et l'aire du carré, déterminer l'effet d'un agrandissement sur les longueurs, déterminer l'effet d'un agrandissement sur les aires et la relation avec l'échelle, conférer à la racine

²⁵Roditi Éric, Cahier n° 18, *La racine carrée en troisième : Étude d'une activité*, IREM Paris 7, 1996

carrée la double représentation du côté d'un carré d'aire donnée et de l'échelle de l'agrandissement qui multiplie les aires par un nombre donné.

Déroulement prévu

Les élèves doivent déterminer les nombres demandés. Les trois premiers cas permettent de s'assurer de la dévolution du problème. Du cas 4 au cas 9, deux nombres sont donnés, quatre sont à chercher. Une rupture est marquée à la ligne 8, si l'élève utilise des valeurs approchées pour les racines il arrive à des contradictions. Il y a plusieurs procédures pour remplir les deux dernières colonnes.

Dans un deuxième temps, l'élève doit exprimer par écrit les relations liant les variables de la situation.

On trouve « dans un agrandissement, l'aire aussi est multipliée », « l'aire est multipliée par le carré de l'échelle », « on peut trouver les résultats dans des ordres différents, ça permet de contrôler », « quand on multiplie des racines, ça multiplie les nombres », « quand on contrôle, ça ne tombe pas toujours juste avec les décimaux », ... ;

- la ligne 8 nous « donne » : $\sqrt{7} \times \sqrt{5} = \sqrt{35}$;

- la ligne 9 : $\sqrt{3} \times \sqrt{20} = \sqrt{60}$.

On peut alors conjecturer sur la propriété du produit de deux racines carrées et du carré du coefficient d'agrandissement (si cela est non acquis). On peut prolonger par d'autres cas à étudier pour enrichir les égalités de racines carrées :

	MP	S	$M'P'$	S'	L	A
10		25				9
11		7				
12	5					16
13	5					6

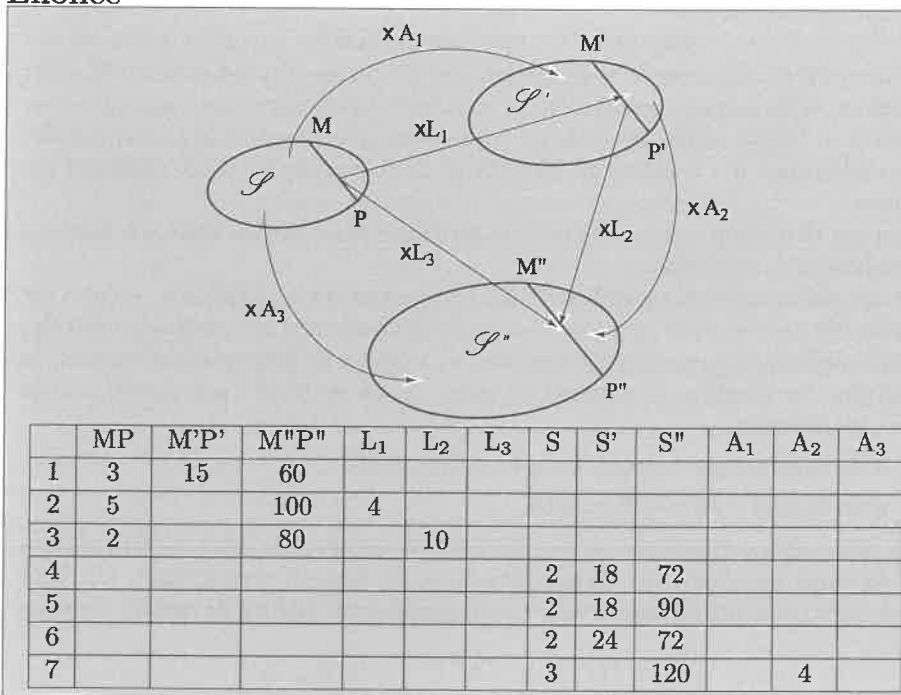
Ce second tableau permettra l'écriture des égalités

$$\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7 ; 5 \times \sqrt{6} = \sqrt{150}.$$

On peut également poursuivre par une deuxième séance. Il s'agit de composer deux agrandissements, compléter les représentations de la multiplication de deux racines carrées – y compris d'un entier par une racine carrée – et effectuer des calculs pour lesquels les valeurs exactes des racines carrées sont utiles.

Deuxième séance

Énoncé



Déroulement normal

Même dispositif que précédemment, on obtient alors des résultats de la forme :

$$3 \times \sqrt{5} = \sqrt{45} ; \sqrt{12} \times \sqrt{3} = 6 ; \sqrt{10} \times 2 = \sqrt{40}.$$

À la fin de la première séance, les élèves ont au moins deux représentations de la multiplication qui fonctionnent avec les racines carrées (*longueur* $\times$ *longueur* = *aire*) et (*longueur* $\times$ *échelle* = *longueur*). Après cette séance, les élèves ont composé deux agrandissements de figures qui ne sont pas des carrés ; ils ont constaté sur les exemples numériques que la transformation composée est un agrandissement dont le coefficient est égal au produit des deux coefficients, et ainsi ils ont fait fonctionner la multiplication de deux racines carrées avec deux scalaires et non avec des mesures de longueur comme cela est fait le plus souvent.

Ce sens permet le contrôle des calculs par l'élévation au carré dont le sens est attaché à une situation problématisée, puisque, durant l'activité, l'effet sur les longueurs est « couplé » à l'effet sur les aires.

Calculer avec les irrationnels

Objectif

L'objectif de cette activité est de faire découvrir les règles de calculs sur les racines carrées.

Elle se décline en deux parties :

- la première permet l'obtention de différentes écritures d'un même nombre dans un cadre géométrique ;
- la deuxième partie va mettre en évidence les règles opératoires qui justifient le passage d'une écriture à l'autre.

1. Première partie

Mode de travail

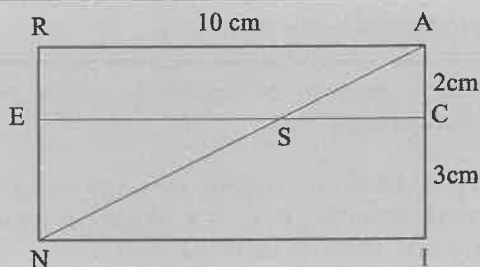
Phase individuelle faite en classe ou à la maison puis confrontation des différentes réponses en groupe puis en classe entière.

Enoncé

RAIN est un rectangle.

$(EC) \parallel (NI)$.

Calculer la valeur exacte de SN de plusieurs façons.



Déroulement prévu

Le but de cette partie est d'obtenir différentes écritures de la longueur SN à l'aide des théorèmes de Thalès et de Pythagore.

Compte rendu d'activité

Les réponses rencontrées sont les suivantes :

- Calcul de AN (Pythagore dans RNA), puis calcul de SN (Thalès avec $(SE) \parallel (AR)$).
 $SN = 3 \times \sqrt{125} : 5$.
- Calcul de SC (Thalès avec $(SC) \parallel (NI)$), calcul de SA (Pythagore dans SAI , puis Thalès avec $(AC) \parallel (EN)$). $SN = \frac{\sqrt{20} \times 3}{2}$.
- Calcul de AN (Pythagore dans RAN), Thalès avec $(RA) \parallel (ES)$, puis Pythagore dans SAC .
 $SN = \sqrt{125} - \sqrt{20}$.
- Calcul de SC (Thalès avec $(SC) \parallel (NI)$), calcul de SE , calcul de SN (Pythagore dans NES).
 $SN = \sqrt{45}$.

- Calcul de AN (Pythagore dans ANI), calcul de AS (Thalès avec $(EC)/(NI)$)
 $SN = \sqrt{125} - \sqrt{20}$
 $SN = \sqrt{125} - \sqrt{125} \times 0,4$
- Calcul de SC (Thalès avec $(SC)/(NI)$), calcul de SA (Pythagore dans SAC), calcul de AN (Thalès avec $(SC)/(NI)$).
 $SN = \sqrt{20} \times \frac{5}{2} - \sqrt{20}$.
- Il peut arriver qu'un élève utilise la trigonométrie :
 $SN = 3 : \cos(\tan^{-1}(2))$.
 $SN = \sqrt{125} - 2 : \cos(\tan^{-1}(2))$.

Après la phase individuelle, les élèves confrontent leurs réponses en groupe. Les réponses trouvées étant différentes, le doute s'installe. Ils vérifient alors les valeurs trouvées en les comparant avec la calculatrice, en mesurant sur la figure en grandeurs réelles, en vérifiant les méthodes géométriques utilisées, ce qui permet d'invalider les résultats erronés. Ils sont alors convaincus qu'il y a différentes méthodes pour calculer SN .

Le professeur recense ensuite les différentes réponses au tableau.

La question suivante est posée :

« Est-ce que ces différentes écritures sont celles d'un même nombre ? »

En fait, le problème de l'égalité ne se pose pas puisqu'elle est prouvée de fait géométriquement.

Mais pour les élèves, l'égalité ne va pas de soi. Certains, il est vrai, argumentent la preuve géométrique, mais la plupart utilisent les valeurs données par leur calculatrice, et d'autres ne savent pas. . .

La majorité des élèves se contente de constater que les valeurs données par la calculatrice des différentes écritures sont les mêmes pour être convaincue qu'il y a égalité.

Le professeur relance le débat en demandant :

« Est-ce que la calculatrice permet de prouver que deux nombres sont égaux ? »

Il est intéressant de leur demander quelle réponse est attendue si on calcule $\sqrt{125} - \sqrt{20} - \sqrt{45}$ et de le taper sur la calculatrice. La plupart des calculatrices ne donnent pas zéro. C'est une occasion de leur faire prendre conscience que la calculatrice n'est pas un outil de preuve pour l'égalité dans ce cas.

Le problème posé est alors celui de l'équivalence des écritures : comment passer de l'une à l'autre ?

Il apparaît donc nécessaire de connaître les règles de calcul et une bonne compréhension de $\sqrt{x}$ pour passer d'une expression à une autre et montrer leur égalité.

Un temps est donné au groupe classe pour tenter de les découvrir.

La non-règle suivante apparaît tout de suite : $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$ en constatant que $\sqrt{125} - \sqrt{20} \neq \sqrt{105}$.

Il peut arriver que certaines règles émergent spontanément à cette étape. Dans le cas contraire, la deuxième partie permet de les découvrir.

2. Deuxième partie

Mode de travail

Phase individuelle faite en classe ou à la maison, puis confrontation des différentes réponses en classe entière.

Déroulement

Les quatre exercices de cette deuxième partie sont indépendants les uns des autres et amènent les quatre égalités suivantes.

Exercice 1 : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

Exercice 2 : $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

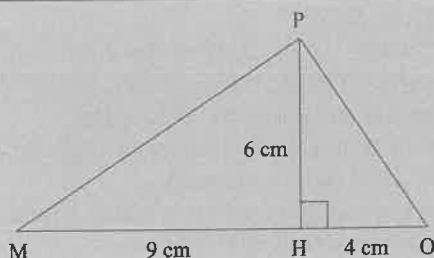
Exercice 3 : $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$.

Exercice 4 : $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ avec $a > 0$.

Exercice 1

Énoncé

- Démontrer que POM est un triangle rectangle.
- Calculer l'aire du triangle POM de plusieurs façons.



Déroulement prévu

Les élèves doivent calculer PM et PO , puis démontrer que POM est rectangle en P afin d'obtenir deux façons de calculer l'aire du triangle POM .

- *Première façon*

$$\text{Aire} = (9 + 4) \times 6 : 2 = 39.$$

- *Deuxième façon*

Avec Pythagore dans PHM et PHO , on a $PM = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117}$ et $PO = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$.

À l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore, on démontre que POM est un triangle rectangle en P .

$$\text{Puis calcul de l'aire de } POM : \text{Aire} = \sqrt{117} \times \sqrt{52} : 2.$$

D'où l'égalité suivante : $\sqrt{117} \times \sqrt{52} = 78$.

Il est alors demandé de trouver la règle de calcul permettant de transformer $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ en 78.

Les élèves remarquent que : $\sqrt{117} \times \sqrt{52} = \sqrt{6\,084} = 78$.

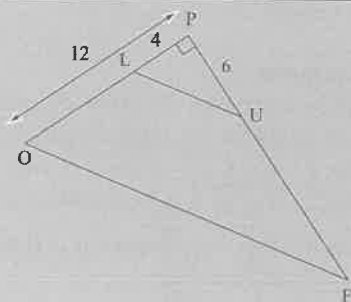
Cette égalité permet de conjecturer que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$ égalité que l'on peut admettre pour l'instant ou démontrer par passage aux carrés.

Exercice 2

Énoncé

Les droites (LU) et (OF) sont parallèles.

Calculer FO de plusieurs façons.



Déroulement prévu

• Première façon

Avec Pythagore dans PLU , on a $LU = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$.

Puis avec Thalès $((LU) \parallel (OF))$, on a $FO = \sqrt{52} \times 12 : 4 = 3\sqrt{52}$.

• Deuxième façon

Avec Thalès $((LU) \parallel (OF))$, on a $PF = 6 \times 12 : 4 = 18$.

Puis, avec Pythagore dans PFO , on a $FO = \sqrt{144 + 324} = \sqrt{468}$.

D'où l'égalité suivante : $3\sqrt{52} = \sqrt{468}$.

Il est alors demandé de trouver la règle de calcul permettant de transformer $3\sqrt{52}$ en $\sqrt{468}$ ou inversement.

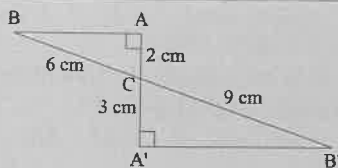
Les élèves remarquent que $3 = \sqrt{9}$ et utilisent la règle de calcul concernant le produit de deux racines carrées.

Cette égalité qui permet de conjecturer que $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$, égalité que l'on peut admettre pour l'instant ou démontrer par passage aux carrés.

Exercice 3

Énoncé

Les droites (BA) et $(A'B')$ sont parallèles. Donner plusieurs méthodes pour calculer $\frac{AB}{A'B'}$.



Déroulement prévu

- *Première façon*

Avec Pythagore dans ABC et $A'B'C$, on a $AB = \sqrt{32}$ et $A'B' = \sqrt{72}$.

D'où $\frac{AB}{A'B'} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}$.

- *Deuxième façon*

Avec Thalès ($(AB) \parallel (A'B')$), on a $\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3}$.

D'où l'égalité suivante : $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}} = \frac{2}{3}$.

Il est alors demandé de trouver la règle de calcul permettant de transformer $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}$ en $\frac{2}{3}$ ou inversement.

Les élèves remarquent que $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. Cette égalité permet de conjecturer que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$, que l'on peut admettre pour l'instant ou démontrer par passage aux carrés.

Exercice 4

Énoncé

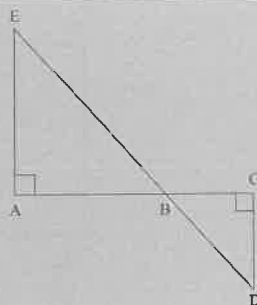
$$EB = \sqrt{2}$$

$$BD = 1, CD = \frac{1}{2}$$

Calculer BC .

Calculer AB .

Calculer AE de plusieurs façons.



Déroulement prévu

Pour les calculs de BC et AB :

$$BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (en utilisant le théorème de Pythagore dans } BCD).$$

$$AB = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (en utilisant le théorème de Thalès dans } ABE \text{ et } CBD).$$

Pour le calcul de AE :

- *Première façon*

Avec Pythagore dans EAB , on a : $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- *Deuxième façon*

Avec Thalès, on a : $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où l'égalité suivante : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Il est alors demandé de trouver la méthode permettant de transformer $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou inversement.

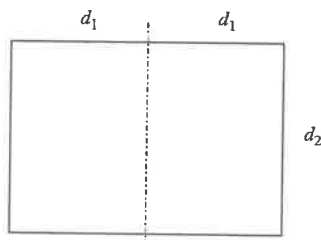
Les élèves remarquent que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cette égalité permet de conjecturer que $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ avec $a > 0$, que l'on peut admettre pour l'instant ou démontrer par passage aux carrés.

Annexe 1

Le format standard des feuilles de papier (A0, A1, A2, A3...)

Le format standard des feuilles de papier a été choisi de telle façon que la moitié d'une feuille soit homothétique à la feuille initiale, et que la longueur de la deuxième soit la largeur de la première.



$$\frac{2d_1}{d_2} = \frac{d_2}{d_1}, \text{ donc } \frac{d_2}{d_1} = \sqrt{2}.$$

Il reste à choisir le format de départ.

Le format A0 est une feuille de 1 m^2 .

On a donc $\ell \times \ell\sqrt{2} = 1$, soit $\ell \approx 0,841 \text{ m}$ et $\ell\sqrt{2} \approx 1,189 \text{ m}$.

On en déduit les résultats suivants :

	A0	A1	A2	A3	A4	A5	...
ℓ (en mm)	841	594,5	42	29,7	21	14,8	...
L (en mm)	1189	841	594,5	42	29,7	21	...

Annexe 2

Dialogue de Platon (extraits)

SOCRATE.— *Maintenant, dis-moi, mon garçon, sais-tu que ceci est un espace carré ?*



L'ESCLAVE.— *Certes.*

SOCRATE.— *C'est donc un espace carré ayant toutes ces lignes, qui sont quatre, égales ?*

L'ESCLAVE.— *Certainement.*

SOCRATE.— *Et celles-ci, par le milieu, ne sont-elles pas égales aussi ?*



L'ESCLAVE.— *Si.*

SOCRATE.— *Un tel espace ne pourrait-il être soit plus grand, soit plus petit ?*

L'ESCLAVE.— *Très certainement.*

SOCRATE.— *Si donc ce côté-ci était de deux pieds et celui-là de deux, de combien de pieds serait le tout ? Mais examine [les choses] ainsi : si celui-ci était de deux pieds, mais celui-là d'un pied seulement, n'est-il pas vrai que l'espace serait d'une fois deux pieds ?*



L'ESCLAVE.— *Oui.*

SOCRATE.— *Mais puisque celui-là est aussi de deux pieds, cela ne fait-il pas deux fois deux ?*

L'ESCLAVE.— *Cela fait.*

SOCRATE.— *Cela fait par conséquent deux fois deux pieds ?*

L'ESCLAVE.— *Oui.*

SOCRATE.— *Combien font donc les deux fois deux pieds ? Fais le calcul et dis-moi.*

L'ESCLAVE.— *Quatre, Socrate.*

SOCRATE.— *Ne pourrait-il y avoir, par rapport à cet espace, un autre, double, mais semblable, ayant toutes les lignes égales, comme celui-ci ?*

L'ESCLAVE.— *Si.*

SOCRATE.— *De combien de pieds serait-il ?*

L'ESCLAVE.— *Huit.*

SOCRATE.— *Eh bien, voyons ! Essaie de me dire de quelle longueur sera chaque ligne ce celui-ci. Celle de celui-là est en effet de deux pieds ; mais qu'en sera-t-il de celle de celui qui est double ?*

L'ESCLAVE.— *Il est tout à fait évident, Socrate, qu'elle sera double.*

.....

SOCRATE.— *Tu vois, Ménon, que je ne lui enseigne rien, mais que j'interroge continuellement. Et pour l'instant, celui-ci pense savoir quelle est celle à partir de laquelle on construira l'espace de huit pieds. Ou bien n'est-ce pas ton avis ?*

MÉNON.— *Si, en effet.*

SOCRATE.— *Le sait-il donc ?*

MÉNON.— *Non certes.*

SOCRATE.— *Mais il pense assurément [que c'est] à partir de la double ?*

MÉNON.— *Oui.*

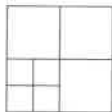
SOCRATE.— *Observe-le maintenant se remémorant progressivement, comme il faut se remémorer.*

.....

Mais toi, dis-moi, c'est à partir de la ligne double que tu dis que l'espace double est construit ? Voici ce que je veux dire : non pas l'une longue, l'autre courte, mais qu'il soit égal de tous côtés, comme pour celui-ci, mais double de celui-ci, de huit pieds. Mais vois si c'est encore ton avis que ce sera à partir de la [ligne] double ?

L'ESCLAVE.— *Oui, certes.*

SOCRATE.— *Eh bien, celle-ci ne devient-elle pas double de celle-là, pour peu que nous ajoutions à partir de là une autre aussi grande ?*



L'ESCLAVE.— *Tout à fait.*

SOCRATE.— *C'est donc à partir de celle-ci, dis-tu, que sera [construit] l'espace de huit pieds, pour peu que quatre aussi grandes soient tracées ?*

L'ESCLAVE.— *Oui.*

SOCRATE.— *Dessignons donc d'après celle-ci quatre [lignes] égales. Ne serait-ce pas là ce que tu dis être l'espace de huit pieds ?*

L'ESCLAVE.— *Tout à fait.*

SOCRATE.— *Eh bien, n'y a-t-il pas dans celui-ci ces quatre-là, dont chacun est égal à celui de quatre pieds ?*

L'ESCLAVE.— *Si.*

SOCRATE.— *De quelle grandeur est-il donc ? N'est-il pas quatre fois aussi grand ?*

L'ESCLAVE.— *Comment non ?*

SOCRATE.— *Est donc double ce qui est quatre fois aussi grand ?*

L'ESCLAVE.— *Non, par Zeus.*

SOCRATE.— *Alors, combien de fois plus grand ?*

L'ESCLAVE.— *Quatre fois plus grand.*

SOCRATE.— *A partir de la [ligne] double, donc, mon garçon, l'espace devient, non pas double, mais quadruple.*

L'ESCLAVE.— *Tu dis vrai.*

SOCRATE.— *En effet, quatre fois quatre font seize, non ?*

L'ESCLAVE.— *Oui.*

SOCRATE.— *Mais alors, celui de huit pieds, à partir de quelle ligne ? N'est-il pas en effet quadruple à partir de celle-ci ?*

L'ESCLAVE.— *Je l'admets.*

SOCRATE.— *Mais le quart celui-ci à*

partir de celle-ci, qui fait la moitié ?

L'ESCLAVE.— *Oui.*

SOCRATE.— *Bon ! Mais celui de huit pieds n'est-il pas d'une part le double de celui-ci, d'autre part la moitié de celui-là ?*

L'ESCLAVE.— *Oui.*

SOCRATE.— *Ne sera-t-il pas [construit] sur une ligne plus grande que celle-ci, mais plus petite que celle-là ? Ou quoi ?*

L'ESCLAVE.— *M'est d'avis que c'est effectivement ainsi.*

SOCRATE.— *Bien ! Réponds en effet à cela selon ton avis, et dis-moi : celle-ci n'était-elle pas de deux pieds, et celle-là de quatre ?*

L'ESCLAVE.— *Si.*

SOCRATE.— *Il faut donc que la ligne de l'espace de huit pieds soit plus grande que celle-ci, celle de deux pieds, mais plus petite que celle de quatre pieds.*

L'ESCLAVE.— *Il le faut.*

SOCRATE.— *Essaye maintenant de dire de quelle longueur tu prétends qu'elle est.*

L'ESCLAVE.— *De trois pieds.*

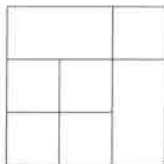
SOCRATE.— *Eh bien, si toutefois elle doit être de trois pieds, nous prendrons en plus la moitié de celle-ci et ça fera trois pieds. Ceux-ci font en effet deux, et celui-là un ; et de là pareillement, ceux-ci deux, celui-là un. Et ça devient l'espace que tu dis.*

L'ESCLAVE.— *Oui.*

SOCRATE.— *Eh bien alors, si celle-ci est de trois et celle-ci de trois, l'espace entier devient de trois fois trois pieds.*

L'ESCLAVE.— *C'est clair.*

SOCRATE.— *Mais combien de pieds font trois fois trois ?*



L'ESCLAVE.— *Neuf.*

SOCRATE.— *Mais de combien de pieds le double devait-il être ?*

L'ESCLAVE.— *Huit.*

SOCRATE.— *Ce n'est donc pas encore à partir de celle de trois pieds que se forme l'espace de huit pieds.*

L'ESCLAVE.— *Non, certes !*

SOCRATE.— *Mais alors, à partir de laquelle ? Essaie de nous le dire exactement, et si tu ne veux pas dire un nombre, alors montre à partir de laquelle.*

L'ESCLAVE.— *Mais, par Zeus, Socrate, je n'en sais vraiment rien.*

.....

(Socrate explique à Ménon qu'il ne fait qu'interroger l'esclave pour que celui-ci découvre par lui-même la solution)

.....

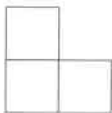
SOCRATE.— *Dis-moi donc, toi : ceci n'est-il pas pour nous l'espace de quatre pieds ? Comprends-tu ?*

L'ESCLAVE.— *Certes.*

SOCRATE.— *Mais nous pourrions lui accoler un autre qui lui soit égal ?*

L'ESCLAVE.— *Oui.*

SOCRATE.— *Et ce troisième ici, égal à chacun d'eux ?*



L'ESCLAVE.— *Oui.*

SOCRATE.— *Et ne pourrions-nous donc pas combler ce vide dans le coin ?*

L'ESCLAVE.— *Tout à fait.*

SOCRATE.— *N'est-il donc pas vrai qu'il en résulte quatre espaces égaux là ?*

L'ESCLAVE.— *Si.*

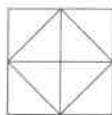
SOCRATE.— *Quoi encore ? Ce tout, combien de fois plus grand que celui-ci devient-il ?*

L'ESCLAVE.— *Quatre fois plus grand.*

SOCRATE.— *Or il devait devenir double pour nous ; ne t'en souviens-tu pas ?*

L'ESCLAVE.— *Tout à fait.*

SOCRATE.— *Eh bien, cette ligne d'angle à angle ne coupe-t-elle pas en deux chacun de ces espaces ?*



L'ESCLAVE.— *Si.*

SOCRATE.— *Eh bien, cela ne fait-il pas quatre lignes égales, entourant l'espace que voici ?*

L'ESCLAVE.— *Ça les fait.*

SOCRATE.— *Examine maintenant : de quelle grandeur est cet espace ?*

L'ESCLAVE.— *Je ne vois pas.*

SOCRATE.— *Est-ce que, de ces quatre-là, chacune de ces lignes n'a pas séparé la moitié intérieure de chacun ? Ou quoi ?*

L'ESCLAVE.— *Si.*

SOCRATE.— *Combien donc y en a-t-il de la même taille dans celui-ci ?*

L'ESCLAVE.— *Quatre.*

SOCRATE.— *Mais combien dans celui-là ?*

L'ESCLAVE.— *Deux.*

SOCRATE.— *Mais que sont les quatre par rapport aux deux ?*

L'ESCLAVE.— *Le double.*

SOCRATE.— *Alors, pour celui-ci, combien de pieds cela fait-il ?*

L'ESCLAVE.— *Huit.*

SOCRATE.— *Sur quelle ligne ?*

L'ESCLAVE.— *Sur celle-ci.*

SOCRATE.— *Sur celle qui est tracée d'angle à angle dans celui de quatre pieds ?*

L'ESCLAVE.— *Oui.*

SOCRATE.— *Or les spécialistes l'appellent justement « diagonale » ; de sorte que, si « diagonale » est son nom, ce serait sur la diagonale, à ce que tu dis, serviteur de Ménon, que se formerait l'espace double.*

L'ESCLAVE.— *Très certainement, Socrate.*

VIDE-GRENIERS

Voici un problème proposé à une classe.

Caroline est à la recherche d'un sac original. Elle se rend à un « vide-greniers », où elle commence par en acheter un pour 20 €. Peu de temps après, elle rencontre une copine qui le lui rachète pour 30 €.

Comme elle ne trouve rien d'autre qui lui plaise, elle se ravise et rattrape la copine. Celle-ci est dure en affaires, elle consent à lui revendre le sac, mais pour 40 € !

Finalement, Caroline n'est pas très contente d'elle, aussi lorsque quelqu'un lui propose 50 € pour le sac, elle accepte et le revend.

En fin de compte, Caroline a-t-elle gagné ou perdu de l'argent ? Combien ?

Et voici des réponses d'élèves.

Réponse A :

Caroline a vendu 50 € un sac qu'elle avait acheté 20 € au départ. Bonne affaire ! Elle a gagné 30 €.

Réponse C :

Le total des ventes est 80 €. Le total des achats est 60 €. Caroline a donc gagné 20 €.

Réponse D :

Caroline a fait des achats de 20 puis de 40 €. Entre le premier et le deuxième prix d'achat, elle a perdu 20 €. Elle a fait des ventes de 30 €, puis 50 €. Entre le premier et le deuxième prix de vente, elle a gagné 20 €. Au total, le bilan est nul. Elle n'a **ni gagné ni perdu**.

Réponse B :

Ce n'est pas une si bonne affaire que ça.

A la première revente, Caroline a gagné 10 €. ($30 € - 20 € = 10 €$)

En rachetant le sac, elle a perdu 10 €. ($30 € - 40 € = -10 €$).

Dans sa dernière vente, elle a gagné 10 €.

($50 € - 40 € = 10 €$).

Au total, elle a gagné 20 € et perdu 10 €, donc le bilan est un gain de 10 €.

Réponse E :

On ne peut pas savoir. Tout dépend de l'argent que Caroline avait dans son porte-monnaie au départ.

PARTIE ④

UN BILAN SUR LES NOMBRES AU COLLÈGE

Après l'introduction des irrationnels, la classe de troisième est le moment d'un premier bilan sur les nombres, comme l'y incitent les programmes.

C'est le thème des deux activités qui constituent ce chapitre.

La première est l'occasion de « mettre de l'ordre » dans tous les nombres apparus jusque-là, en donnant une perspective d'ensemble (avec et sans jeu de mots !) à des découvertes fortes que les élèves ont faites au collège : un nombre entier est un nombre décimal, π n'est pas un nombre décimal, etc.

Dans la seconde, les recherches historiques faites par les élèves seront l'occasion d'un nouvel éclairage sur les connaissances mathématiques enseignées au collège, éclairage qui enrichira celui apporté par la première activité. Le travail de recherche et de présentation sous la forme de dossier et d'exposé qu'elle propose, est en rapport avec plusieurs des compétences du socle commun.

En troisième : *Synthèse sur les nombres au collège*

Annick MASSOT et Georges PONS – IREM des Pays de la Loire

Le travail sur les nombres initié à l'école primaire se poursuit au collège. Un début de classification des différents ensembles de nombres du point de vue de l'inclusion (même si ce mot n'est pas utilisé) est introduit à partir de questions rencontrées ou posées par les élèves : un entier est-il un décimal ? Les nombres rationnels sont-ils tous décimaux ? Qu'en est-il de π ?

Tous ces nombres sont utilisés dès la classe de sixième. D'autres, les irrationnels commencent à être découverts en quatrième, mais surtout en troisième.

En troisième, il nous semble intéressant, conformément au programme, de faire le point sur ces nombres.

Objectifs

- Faire un point sur les nombres rencontrés au collège.
- Repréciser la différence entre nombre décimal et écriture décimale d'un nombre, entre nombre fractionnaire et écriture fractionnaire d'un nombre.
- Faire découvrir ou redécouvrir qu'un nombre entier est un nombre décimal, etc.

Prérequis

L'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Déroulement

Première séance

L'enseignant annonce aux élèves que l'activité va commencer avec une séance « Autour du mot » et explique le fonctionnement correspondant si nécessaire : le professeur écrit un mot sur un transparent rétroprojeté (plutôt qu'au tableau, ce qui permet de garder une trace de l'activité) ; en silence les élèves réfléchissent, puis chacun à leur tour (les autres restant silencieux) disent un mot qu'ils associent au mot écrit et le professeur le note. Ainsi par association d'idées, une suite de mots est écrite. Puis, toujours dans une classe silencieuse, les élèves, chacun à leur tour, choisissent les mots qu'ils gardent (mots soulignés) ou qu'ils rejettent (mots barrés). Cela s'arrête quand plus personne n'a rien à dire.

Après les explications, l'enseignant écrit « Les différentes sortes de nombres » et l'activité commence.

À partir de la production de la classe (voir un exemple en annexe), un débat s'engage dans l'objectif de faire un tri pour écarter ce qui ne répond pas à la consigne (voir le paragraphe « Remarques »). Aucune institutionnalisation n'est faite après cette séance « Autour du mot », son objectif était d'établir, collectivement, une liste (éventuellement incomplète, suivant la production des élèves) des nombres rencontrés au collège.

Deuxième séance

Le professeur distribue ensuite la consigne, éventuellement après avoir projeté la production de la séance précédente.

Voici une liste de 15 nombres :

$$-2,7 ; \pi ; -1 ; \frac{10}{3} ; \frac{28}{4} ; \frac{-60}{6} ; \sqrt{4} ; 4,25 ;$$

$$\frac{3}{10} ; 0 ; \sqrt{2} ; \sqrt{9} ; -\frac{1}{7} ; -\sqrt{3} ; \sqrt{0,09}.$$

Classe ces nombres dans le tableau suivant :

Nombres décimaux relatifs	Nombres non décimaux relatifs	Je ne sais pas

Après un temps de travail individuel, le professeur relève les propositions des élèves et le débat s'engage. Il permet d'établir la définition d'un nombre décimal et l'inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$. C'est aussi l'occasion pour le professeur d'utiliser à nouveau le mot « rationnel », qui a été introduit quand l'irrationalité de $\sqrt{2}$ a été mise en évidence.

Les élèves notent :

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale. Exemple : $4 = \frac{40}{10}$; $3,25 = \frac{325}{100}$.

L'ensemble des nombres entiers relatifs constitue une partie de l'ensemble des nombres décimaux relatifs.

Le professeur donne alors la consigne suivante :

Maintenant, classe ces mêmes nombres dans le tableau suivant :		
Nombres rationnels	Nombres non rationnels	Je ne sais pas

Avec la même gestion que précédemment, le débat permet d'institutionnaliser dans un premier temps la définition d'un nombre décimal et d'établir l'inclusion $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Dans un deuxième temps, sont abordés les nombres qui restent (π ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$) : le terme « irrationnel » est introduit ainsi que celui « d'ensemble des réels ».

Le résumé (voir feuille résumé) est ensuite distribué aux élèves. Il permet de revenir sur tous les ensembles de nombres, d'introduire leurs symboles et de faire vivre ces définitions en complétant le schéma ensembliste.

Remarques

Le débat peut porter aussi sur d'autres points que ceux qui sont les objectifs de l'activité. Ainsi, dans l'exemple en annexe, le débat a permis de revenir sur :

- la différence entre opération et résultat d'opération
- la différence entre point et coordonnées d'un point
- les différents sens possibles d'un même mot (échelle, chiffre...).

L'enseignant peut faire le choix de ne pas aborder immédiatement tous les points soulevés pendant une séance « Autour du mot » et les noter pour y revenir à d'autres occasions.

ANNEXE

LES DIFFERENTES SORTES DE NOMBRES

<u>Négatifs</u>	Superlatif	Soustraction
<u>Positifs</u>	Droite graduée	Graphique
<u>Nul</u>	Echelle	Abscisse
<u>Cardinaux</u>	Inconnue	Ordonnée
<u>Ordinaux</u>	Inégaux	Chiffre
<u>Egal</u>	Fractionnaires	Proportionnels
<u>Entier</u>	Inférieur	Croissant
Décimaux	Supérieur	Pourcentage
<u>Signe</u>	Différent	Degré
Infini	Ordonnée	Algèbre
<u>Relatif</u>	Opération	

Feuille résumé

SYNTHÈSE DES NOMBRES AU COLLÈGE

N L'ensemble des entiers naturels : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ...

Les nombres entiers naturels constituent un ensemble, noté $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}$ L'ensemble des entiers relatifs ... -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ...

Les nombres **entiers positifs et négatifs** constituent l'ensemble des **entiers relatifs** noté $\mathbb{Z}$

$3 = +3$ L'ensemble $\mathbb{N}$ est une partie de l'ensemble $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{D}$ L'ensemble des décimaux relatifs

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

Exemple : $0,2 = \frac{2}{10}$; $-3,25 = -\frac{325}{100}$. 4 peut s'écrire $\frac{40}{10}$, donc 4 est un nombre décimal.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est une partie de l'ensemble $\mathbb{D}$.

$\mathbb{Q}$ L'ensemble des rationnels

Les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des **entiers relatifs**, b étant non nul, constituent l'ensemble des **nombres rationnels** noté $\mathbb{Q}$.

Par exemple : $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{2}$; $-\frac{5}{7}$ sont des rationnels. $5,124 = \frac{5124}{1000}$ donc 5,124 est un nombre rationnel.

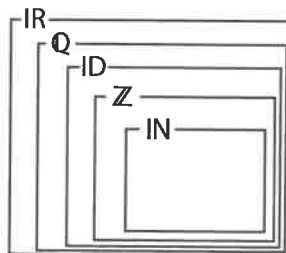
L'ensemble $\mathbb{D}$ est une partie de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ L'ensemble des réels

Il existe aussi des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers relatifs (π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$...). Ces nombres sont appelés **irrationnels**.

Les nombres **rationnels et irrationnels** constituent l'ensemble des **nombres réels**, noté $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$.



En troisième : *Des exposés... pour lire, écrire et dire sur les mathématiques*

Annick MASSOT et Georges PONS – IREM des Pays de la Loire

On peut lire dans la présentation du programme de troisième : « *Dans le domaine numérique... faire une première synthèse sur les nombres avec un éclairage historique...* ». Cette idée est reprise dans les commentaires : « *Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves.* ».

Dans cette même présentation, on lit : « *Comme dans les classes antérieures, la démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves et concourt à celle du citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, et en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.* ».

Il nous a semblé particulièrement adapté de travailler les points ci-dessus à partir d'exposés. Après le point fait sur les nombres dans l'activité « Les nombres rencontrés au collège », il est proposé trois ou quatre sujets d'exposés à se répartir en groupes, de façon que chaque sujet soit traité par deux groupes (voir les remarques d'élèves pour les raisons de ce choix).

Les consignes pour ce travail sont projetées aux élèves (voir feuille transparent 1) qui posent des questions éventuellement. Ces consignes seront à nouveau projetées aux cours des semaines en fonction des demandes des élèves.

Quinze jours avant les présentations d'un thème, les deux groupes concernés doivent présenter à l'enseignant un plan détaillé, sous forme écrite, de leur travail. Cela permet à l'enseignant de recadrer certains points, que ce soit sur le contenu ou la présentation, pour « booster », accompagner ou encourager les élèves dans leur travail.

Lors de la première séance de présentation, les consignes pour la classe sont projetées (voir la feuille transparent 2).

L'enseignant prend note des remarques faites par la classe à l'occasion de chacun des deux points qui suivent les présentations. Une synthèse sur transparent est faite avec la classe.

Au début de la séance suivante de présentation, l'enseignant rappellera à la classe la synthèse faite à la séance précédente. Ce transparent sera éventuellement complété par le bilan de la séance.

De même à chacune des séances de présentation.

Le bilan ainsi réalisé à partir de la série d'exposés pourra être mis au propre et distribué à tous les élèves, par exemple sous la forme « Pour bien présenter un dossier... Pour bien mener un débat... ».

Remarques d'élèves d'une classe après la présentation des exposés

- *Maintenant, on connaît un peu l'histoire des nombres. Avant, on ne savait pas d'où cela venait.*
- *Comme il y avait deux groupes sur un même sujet, on pouvait se compléter.*
- *Ce sont des mathématiques différentes de d'habitude, je préfère.*
- *Ça nous apprend à nous exprimer, d'habitude c'est en français. En maths, c'est plutôt recherche, problèmes et calcul.*
- *Le fait d'avoir à exposer oralement nous a fait préparer l'exposé différemment : s'exprimer par oral, ce n'est pas la même chose que par écrit.*
- *Le fait d'exposer oralement en fait profiter tout le monde.*

Remarques

• sur l'étalement des exposés sur l'année :

La première fois, ces exposés avaient été présentés sur une période courte. Il ne pouvait donc pas y avoir d'évolution d'une présentation à l'autre. Les étales sur l'année permet de mieux tirer profit des maladresses de présentation à l'écrit, à l'oral, et des réussites. Il est ainsi possible de constater s'il est tenu compte ou pas des remarques formulées lors d'une présentation et de mesurer des évolutions (par exemple, avoir bien prévu le partage des tâches, éviter de lire un document un peu long, ne pas faire circuler un document et le commenter en même temps mais plutôt l'avoir mis sur transparent, faire attention à la présentation au tableau). Cela permet aussi d'enrichir, en fonction de ces évolutions, une grille de compétences « Pour bien présenter un exposé... Pour bien mener un débat... ».

• sur le réinvestissement du travail sur les exposés :

Nous avons constaté que des élèves savent tenir compte du travail effectué, que ce soit sur le plan du contenu (par exemple en réutilisant la construction du pentagone dans l'activité « Angle inscrit, polygone régulier et rotation », page 80 de la brochure de l'IREM des Pays de la Loire « Enseigner les mathématiques autrement en troisième »), ou que ce soit sur le plan des méthodes de travail. C'est ainsi que, lors d'un travail sur la réciproque de Thalès, des élèves ont investi le tableau, se sont partagés le travail et ont présenté leurs idées à la classe, comme pendant les exposés.

Feuille transparent 1

Consignes sur la réalisation des dossiers ou des affiches et sur leurs présentations

Vous allez avoir à vous mettre par groupe pour réaliser des dossiers ou des affiches et pour les présenter sous forme d'exposés.

Il y a 4 thèmes différents :

- les symboles utilisés en mathématiques au collège et leur histoire ;
- les nombres vus au collège et leur histoire ;
- le nombre π et son histoire ;
- le nombre d'or et son histoire.

Ce travail s'étalera sur plusieurs mois. C'est un **travail important** et vous apprendrez tous beaucoup de choses, en travaillant sur vos sujets et en écoutant les présentations que les autres groupes feront de leurs travaux.

Vous allez avoir quelques jours pour **constituer librement vos groupes et choisir vos sujets**. Deux contraintes :

- il doit s'agir de groupes de 4 élèves, et n'oubliez pas en les constituant que vous aurez à travailler ensemble en dehors de la classe ;
- il doit y avoir 2 groupes qui travaillent sur chacun des sujets.

J'interviendrai si ces deux contraintes ne sont pas réalisées.

Pour réaliser vos dossiers ou affiches et leurs présentations, vous aurez à chercher des documents (dans des revues, des livres, des dictionnaires, des encyclopédies, sur Internet, etc.) mais vous devez citer les documents que vous utilisez. Attention, ce que je vous demande est un **travail personnel** et non la copie de textes écrits par d'autres !

Chaque groupe devra présenter, sous la forme d'un exposé, son dossier ou son affiche à la classe qui pourra poser des questions : vous devez donc être **capables d'expliquer** tout ce que vous allez écrire ou dire !

Les deux groupes travaillant sur le thème « X » présenteront leurs travaux pendant la même séance, dans 2 mois et demi. Un mois avant, les deux groupes devront me présenter, **sous forme écrite, le plan détaillé de leurs dossiers et de leurs présentations** et je donnerai mon avis pour vous aider à terminer votre travail ; c'est à ce moment-là que vous pourrez aussi me dire si vous avez des besoins particuliers en matériel pour votre présentation. Le jour de la présentation, **la classe notera ses questions et ses remarques** pour

intervenir après les exposés des deux groupes. Nous ferons ensuite ensemble un **point sur le thème traité** et un autre **point sur la présentation elle-même**. Ce point pourra bien évidemment servir aux groupes qui passeront ensuite : il n'y a pas de compétition entre les groupes, ce travail est l'occasion pour tous d'**apprendre des mathématiques et sur les mathématiques** et de **progresser sur la réalisation des dossiers et sur leur présentation**.

Les deux groupes travaillant sur le thème « Y » présenteront leurs travaux un mois et demi après et leur plan détaillé un mois avant.

Ainsi de suite pour les autres thèmes.

Feuille transparent 2

Vous allez suivre attentivement la présentation des deux groupes qui ont travaillé sur le même thème.

La plupart d'entre vous n'ont pas travaillé sur ce thème-là.

Vous avez donc des choses à apprendre en écoutant vos camarades et vous aurez sans doute des questions à leur poser ou des remarques à leur formuler sur le contenu des exposés.

Vous aurez sans doute aussi des remarques à faire sur les présentations elles-mêmes.

Un point sera fait sur chacun de ces sujets après le passage des deux groupes. Pour ne rien oublier, vous avez donc tout intérêt à noter vos questions et remarques, par exemple en faisant deux colonnes sur une feuille, une pour le contenu mathématique et l'autre pour la présentation et le débat, afin de ne pas tout mélanger.

Les groupes suivants essaieront bien sûr de tenir compte pour leurs travaux et leurs présentations futures des remarques qui auront été exprimées par la classe.

BIBLIOGRAPHIE

Livres

- BROUSSEAU Guy, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux, IREM, 1995
- CUMIN Jean, HOSSENLOPP Jean, *Le boulier : initiation*, Paris, Chiron, 1993
- DEHAENE Stanislas, *La bosse des maths*, Paris, Odile Jacob, 2003
- DELAHAYE Jean-Pierre, *Le fascinant nombre π* , Paris, Pour la Science, 1997
- DELEDICQ André, *La magie du calcul*, Paris, ACL Les éditions du kangourou, 1998
- FOURREY Émile, NICOLAS Jean-Louis, *Récréations arithmétiques*, Paris, Vuibert, 2001
- GASQUET-MORE Sylviane, *Plus vite que son nombre*, Paris, Seuil, coll. Science ouverte, 1999
- GUEDJ Denis, *L'empire des nombres*, Paris, Gallimard, 1996
- IFRAH Georges, *Histoire universelle des chiffres*, Paris, Robert Laffont, 1994
- PERELMAN Yakov, *Oh ! les maths, 200 contes, énigmes et casse-tête pour mourir de rire... et tuer le temps*, Paris, Dunod, Éditions Mir, 2001
- RITTAUD Benoît, *Le fabuleux destin de racine de 2*, Éditions Le pommier, 2006
- ROUCHE Nicolas, *Le sens de la mesure « Des grandeurs aux nombres rationnels »*, Paris, Didier Hatier, coll. Formation, 1992
- ROUCHE Nicolas, *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?*, Paris, Ellipses, 1998
- STEWART Ian, *L'univers des nombres*, Paris, Pour la Science, coll. Bibliothèque scientifique, 2000
- STEWART Ian, *La Nature et les Nombres*, Paris, Hachette Littérature, coll. Pluriel, 2000
- TAHAN Malba, DO CANTO Violante, COLEMAN Yves, *L'homme qui calculait dans sa tête*, Paris, Hachette 2005
- VAN DIEREN-THOMAS Françoise, ROUCHE Nicolas, *Mesures, pavages et nombres irrationnels*, Louvain-la-Neuve, GEM, 1985

Revues

- TDC, « L'Invention des Nombres », n° 482, 1988
- TDC, « Les nombres », 1^{er} au 15 février n° 869, 2004

Science et vie Junior, Hors série, « Les nombres : ils possèdent les secrets de l'univers », n° 26, octobre 1996

Le Courrier de l'UNESCO, « Naissance des nombres - Comptes et légendes », novembre 1993

Articles

ARTIGUE Michèle, « L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives », in *Repères-IREM*, n° 54, 2004, p. 23-39

PICOT Marc, « Racine de 2 + racine de 3, on peut pas le faire », in *Repères-IREM*, n° 49, 2002, p. 5-16

BENARD Dominique, « Nombres et calculs au Collège : instituer une cohérence », in *Repères-IREM*, n° 47, 2002, p. 5-16

MATHIAUD Michèle, « Enseigner à partir d'activités, est-ce bien raisonnable ? », in *Repères-IREM*, n° 8, juillet 1992, p. 5-32

Brochures IREM

Entrées dans l'algèbre 6^e et 5^e, Groupe didactique des mathématiques au collège, Bordeaux, IREM, 2007

Cinquante problèmes (et plus si affinités) pour les élèves de quatrième et troisième, Lyon, IREM, 2005

Cinquante problèmes (et plus si affinités) pour les élèves de sixième et cinquième, Lyon, IREM, 2005

MASSOT Annick, PONS Georges, *Enseigner les mathématiques autrement en troisième*, Nantes-Pays de la Loire, IREM, 2003

Des « activités » aux situations d'enseignement en mathématiques au collège, Groupe didactique des mathématiques au collège, Bordeaux, IREM, 2002

BARBIER Jean-Luc, BLONDEL Edith, BOURDENET Gilles et al., *Décimaux, entiers en 6^{ème} : toute une histoire !*, Strasbourg, IREM, 2001

ANSELMO Bernard, BONNET Monique, COLONNA Alain et al., *La sixième entre fractions et décimaux*, Lyon, IREM, 1999

MURGIER Thierry, BOUTTE Daniel, COMBES Marie-Claire et al., *Activités pour la classe de Sixième : Nombres décimaux, aire et périmètre*, Montpellier, IREM, 1996

GOBIN Chantal, GUICHARD Jean-Paul, MAROT Madeleine et al., *Les nombres relatifs au collège*, Poitiers, IREM, 1996

RODITI Éric, *La racine carrée en troisième. Étude d'une activité*, Paris 7, IREM, 1996

BERGUE Danielle, BORREANI Jacqueline, CHEVALLIER Michel et al., *Au tour de la notion d'activité*, Rouen, IREM, 1995

DOUADY Régine, PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne, *Liaison école-collège : Nombres décimaux*, Paris 7, IREM, 1986

LA VIE DE DIOPHANTE

Sur la tombe de Diophante on pouvait lire :

Passant !

Ci-gît Diophante

Les chiffres diront la durée de sa vie.

Sa douce enfance en fait le sixième.

Un dixième de sa vie a passé, et son menton
s'est couvert de duvet.

Marié, il a vécu le septième de sa vie sans enfant.

Cinq ans ont passés ; la naissance d'un fils l'a
rendu heureux..

Le sort a voulu que la vie de ce fils soit deux fois
plus courte que celle de son père.

Plein de tristesse, le vieillard a rendu l'âme quatre
ans après la mort de son fils.

Dis, passant, quel âge avait atteint Diophante
lorsque la mort l'a enlevé ?

Titre	<i>DES NOMBRES AU COLLÈGE</i> <i>Parcours vers le réel...</i>
Auteurs	Membres de la commission Inter-IREM Collège (dite CII Collège) Membres du réseau des IREM
Coordonnateurs	Fabienne LANATA, Vincent PAILLET
Date	Deuxième trimestre 2008
Editeur	Brochure APMEP n° 181
Mots clés	Collège – Nombre – Décimaux – Fraction – Quotient – Rationnel – Relatif – Irrationnel – Racine carrée – Activité – Droite graduée – Égalité à trou – Déplacement – Guide-âne
Résumé	La construction des nombres commencée à l'école primaire, continue au collège. Des nombres nouveaux apparaissent : rationnels, relatifs, irrationnels. S'appuyant par exemple sur la droite graduée et les opérations à trou, outils déjà utilisés en primaire, les activités présentées ont pour objectif que ces nombres nouveaux prennent sens pour les élèves. Les deux dernières activités, qui proposent une synthèse sur les nombres rencontrés au collège jusque-là, mettent en évidence le souci constant des auteurs de la brochure d'instaurer une cohérence qui peut échapper à la lecture des programmes.
Nombre de pages	104
ISBN	2-912-846-57-9
CII Collège Portail des IREM	http://www.univ-orleans.fr/irem/cii http://www.univ-irem.fr
APMEP	26 rue Duméril – 75013 Paris Tél. 01 43 31 34 05 fax : 01 42 17 08 77 Mel : apmep@apmep.asso.fr Site : http://www.apmep.asso.fr