Marivaudage géométrique

sans mesures

Martine Janvier

IREM du MANS

Sur des exemples simples et précis tirés des programmes du collège (droite des milieux du triangle et du trapèze, médianes, quadrature du triangle...) on montrera que l'utilisation des aires non mesurées construit un autre regard sur les exigences, les apports et les dangers d'une figure en lien avec la nécessité démonstrative.

Les acteurs

- Henry Plane, animateur IREM,
- Martine Janvier et Anne Gravier, enseignantes de mathématique d'un même collège et travaillant dans plusieurs groupes de recherche IREM au Mans,
- leurs élèves.

Suite du récit d'une expérience menée en collège sur trois années scolaires, cet atelier avait pour ambition de raconter l'évolution d'un travail de terrain. Son organisation et la place prise dans nos classes ont évolué avec le temps. Par exemple, il nous semble aujourd'hui intéressant de faire manipuler des surfaces dès la sixième et de laisser les jeunes élèves acquérir, intuitivement, certaines propriétés de ces surfaces ; ainsi la conservation de l'aire au cours d'un déplacement ; propriété parfois mise en doute par de plus grands élèves !

Une brochure IREM (Pays de Loire-Le Mans) est actuellement en préparation et devrait être disponible très prochainement.

Progression

6ème : Prise en main des surfaces comme objets qu'on peut déplacer, juxtaposer pour les ajouter et découper pour soustraire.

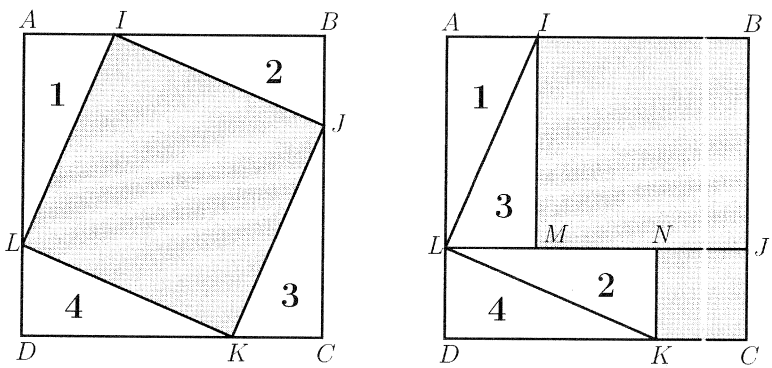
5ème : Mise en place des propriétés permettant de comparer les aires (rectangle, parallélogramme, triangle, polygone...) En particulier: quadratures...

4ème - 3ème : Pythagore, triangles à côtés parallèles, droites du triangle.... Exemples et contre-exemples; mise en défaut d'une figure...

Dans l'atelier de Lille, les exercices suivants ont été proposés et plus ou moins développés. L'ordre répond à la progression que nous appliquons dans nos classes. Les propriétés indispensables à ces démonstrations seront énoncées ici ; elles sont toutes établies avec les élèves, sous forme d'exercices et figurent dans les bilans de leçons.

Exercice 1

1. Tracer quatre triangles rectangles superposables ; les découper et les positionner comme sur la figure de gauche pour constituer le carré $ABCD$. Quelle est la nature de $IJKL$?
2. Par glissement on déplace les triangles 2 et 3 comme indiqué sur la figure de droite. Quelle est la nature de $IBJM$? de $NJCK$?
3. Trouver une relation entre $(IJKL)$, $(IBJM)$ et $(NJCK)$



Solution :

1. $ABCD$ est un carré. En effet, ses quatre côtés sont les hypoténuses des quatre mêmes triangles ; ils sont égaux donc $ABCD$ est un losange. Les angles $\widehat{AIL}$ et $\widehat{BIJ}$ sont complémentaires donc l'angle $\widehat{LIJ}$ est droit et $IJKL$ est bien un carré.
2. $IBJM$ et $NJCK$ ayant trois angles droits et deux côtés consécutifs égaux sont deux carrés.
3. Le carré $IJKL$ est la "différence" entre le grand carré et la somme des quatre triangles:

$$(IJKL) = (ABCD) - 4.(AIL)$$

et aussi la somme des deux petits carrés:

$$(IBCKNM) = (ABCD) - 4.(AIL)$$

Conclusion :

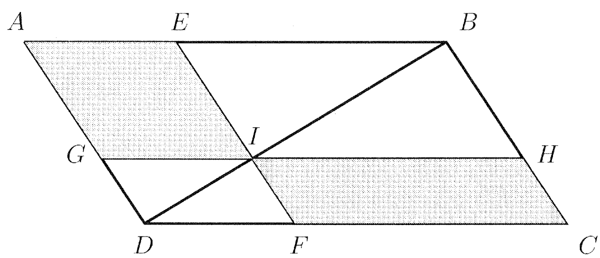
Le carré construit sur l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.

Remarques :

Selon le niveau auquel on s'adresse, le travail sera plus ou moins approfondi :
En 6^{me} *: reconnaître les figures et remarquer l'égalité des surfaces.*
En 5^{me} *: démontrer qu'un quadrilatère est un carré et établir l'égalité des surfaces.*
En 4^{me} *: exploiter la configuration pour exprimer le théorème dit "de Pythagore".*

Exercice 2

$ABCD$ est un parallélogramme. On place un point I sur sa diagonale $[AC]$. Par ce point on construit les parallèles (EF) à (BC) et (GH) à (AB).
Comparer les aires de $AEIG$ et $IHCF$.



Solution :

$EBHI$ et $GIFD$ ont leurs côtés opposés parallèles : ce sont deux parallélogrammes.
Une diagonale partage le parallélogramme en deux triangles de même aire donc:
Dans $ABCD$: $\mathcal{A}(ABD) = \mathcal{A}(CDB)$
Dans $EBHI$: $\mathcal{A}(EBI) = \mathcal{A}(HIB)$
Dans $GIFD$: $\mathcal{A}(GID) = \mathcal{A}(FDI)$
Or les six surfaces réalisent un pavage de $ABCD$ donc par différence :

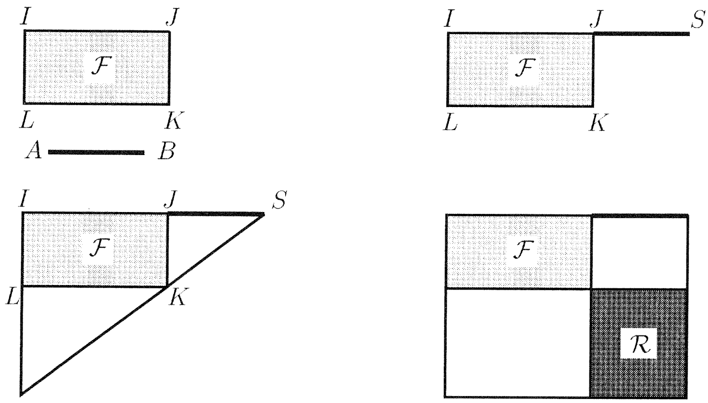
$$\mathcal{A}(AEIG) = \mathcal{A}(IHCF)$$

Remarque

Cet exercice simple est particulièrement important : c'est l'occasion de rencontrer deux surfaces non superposables mais de même aire et donc de préciser ce que sont des surfaces équivalentes ou des aires égales. On pourra, par exemple, appliquer cet exercice au rectangle et en l'utilisant pour vérifier que deux rectangles (ou deux parallélogrammes) non superposables ont la même aire. Il permet aussi, réciproquement, de construire un parallélogramme de côté donné ayant même aire qu'un parallélogramme donné (Cf. exercice 2).

Exercice 3

Construire "sous AB" un rectangle dont l'aire est égale à celle d'un rectangle $\mathcal{F}$ donné.



Solution :

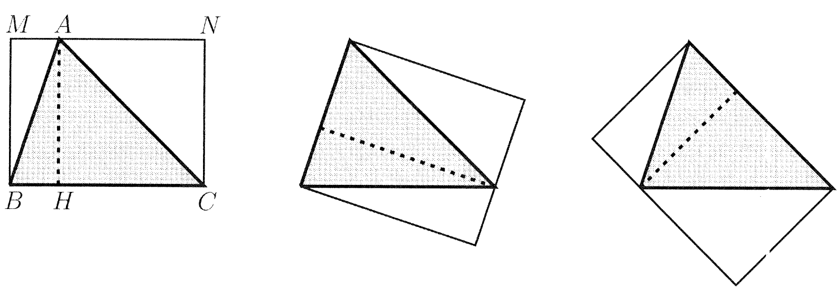
On prolonge un côté de $IJKL$ c'est-à-dire $\mathcal{F}$, d'une longueur $JS = AB$. On trace (SK) qui coupe (IL) en T et, à partir de K on construit le rectangle $\mathcal{R}$ qui a un côté de longueur AB et, d'après l'exercice précédent, est équivalent à $\mathcal{F}$.

Exercice 4

ABC étant un triangle, construire, de trois façons différentes, un rectangle dont l'aire est double de celle du triangle (et dont l'un des côtés est un des côtés du triangle).

Solution

Traçons la hauteur issue de A; elle coupe le côté opposé en H.



1. **Si le triangle a trois angles aigus (1) :**

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABH) + \mathcal{A}(ACH)$$

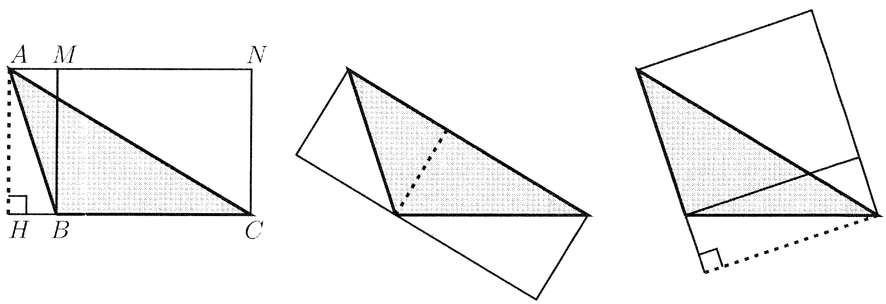
AHB **est un triangle rectangle et, si** $AHBM$ **est un rectangle,**

$$\mathcal{A}(AHB) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(AHBM)$$

De même AHC **est la moitié du rectangle** $AHCN$

$$\mathcal{A}(AHBM) + \mathcal{A}(AHCN) = \mathcal{A}(MBCN) \quad \textbf{donc} \quad \mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}.\mathcal{A}(MBCN)$$

2. **Si le triangle a un angle obtus (ici** $\widehat{ABC}$**) (2) :**



$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ACH) - \mathcal{A}(ABH) \quad \textbf{et} \quad \mathcal{A}(AHCN) - \mathcal{A}(AHBM) = \mathcal{A}(MBCN)$$

$$\textbf{donc} \quad \mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(MBCN)$$

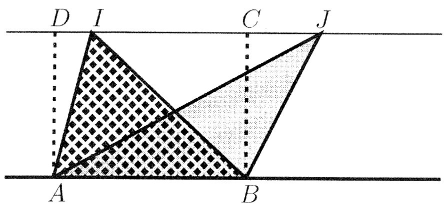
Remarques :

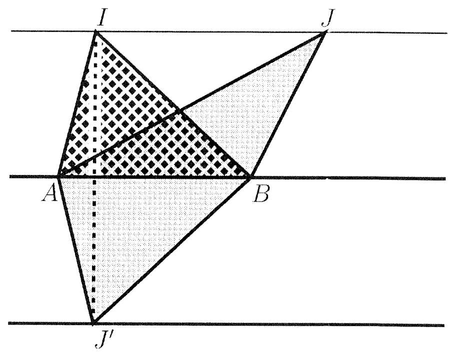
Dans cet exercice on obtient trois rectangles de même aire et non superposables; ce peut être l'occasion d'utiliser la méthode de vérification d'équivalence des rectangles précédemment décrite (ex 2). Le cas du triangle dont les angles sont tous aigus est simple pour les élèves; il est nécessaire de les accompagner dans la seconde configuration.

Exercice 5

D_1 et D_2 sont deux droites parallèles. Sur D_1 on place deux points A et B et sur D_2 deux points I et J.

Montrer que $\mathcal{A}(IAB) = \mathcal{A}(JAB)$





Solution :

Ces deux triangles sont la moitié du même rectangle $ABCD$. Donc

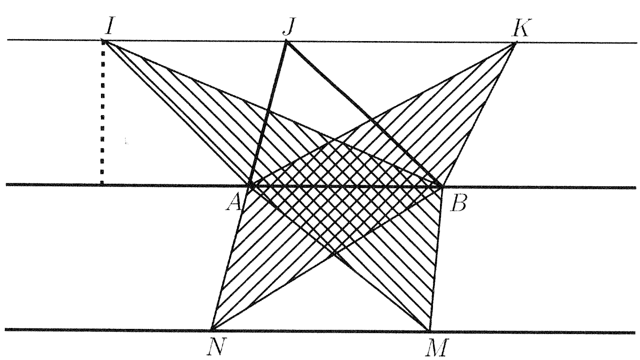
$$\mathcal{A}(IAB) = \frac{1}{2}.\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(JAB)$$

Si J' est le symétrique de J par rapport à (AB), on remarque que :

$$\mathcal{A}(J'AB) = \mathcal{A}(JAB)$$

Autre remarque : les trois triangles ont même base[1] et même hauteur.

Bilan de la leçon :
Tous les triangles qui ont même base et même hauteur ont la même aire et aussi…
Même aire et même base donc même hauteur.
Même aire et même hauteur donc même base.



1. Dans un énoncé, "même base" signifie indifféremment base commune ou base de même mesure ; idem pour même hauteur.

A la suite d'exercices, ces propriétés sont complétées par :

k étant le rapport de deux entiers m et n (n non nul) :

- *Deux triangles qui ont même base (resp. même hauteur) et des hauteurs (respect. des bases) dans le rapport k ont des aires dans le rapport k.*

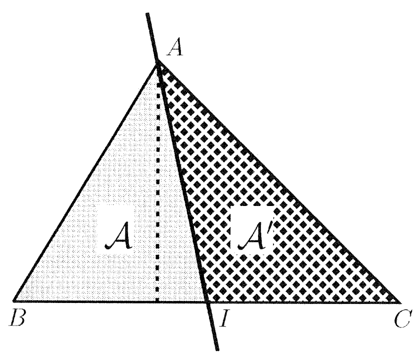
  Deux triangles qui ont même base (resp. même hauteur) et des aires dans le rapport k ont des hauteurs (respect. des bases) dans le rapport k.
- *Deux triangles dont les hauteurs sont dans le rapport k et dont les bases sont dans le rapport k' ont des aires dans le rapport kk'.*

Exercice 6

ABC est un triangle et I est le milieu du segment $[BC]$. Comparer les aires de IAB et de IAC.

Solution :

Si I est le milieu du segment $[BC]$, $BI = IC$.
Les deux triangles AIB et AIC ont donc même base et même hauteur (cette hauteur commune est AH) ; ils ont donc la même aire : $\mathcal{A}(AIB) = \mathcal{A}(AIC)$



On peut remarquer que (AI) est une médiane de ABC et conclure que, dans un triangle toute médiane détermine deux triangles de même aire. Théorème qui sera précieux pour la suite des démonstrations.

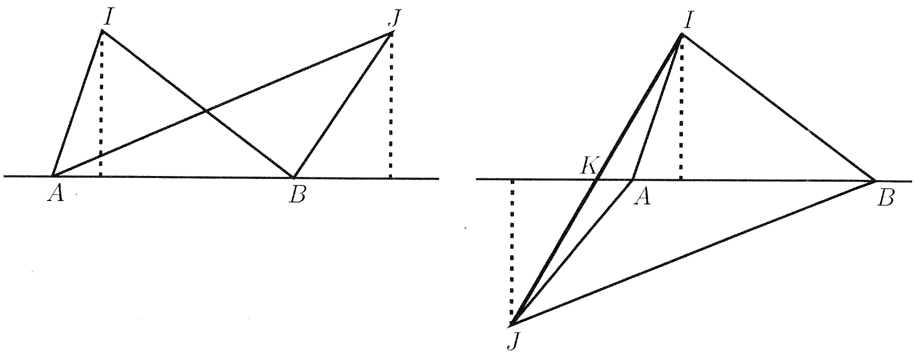
Dans un triangle, une médiane détermine deux triangles de même aire.

Exercice 7

Soit ABI et ABJ deux triangles de même aire.
Quelle est la situation du segment $[IJ]$ par rapport à (AB)?

Solution :

Il y a deux configurations à envisager :



1. Les deux triangles sont situés dans le même demi-plan de frontière (AB). D'après ce qui précède, les deux triangles ont la même hauteur et donc (cf. distance de deux droites) (IJ) est parallèle à (AB).
2. Les triangles sont de part et d'autre de (AB). Le segment $[IJ]$ est alors coupé par (AB) ; soit K leur point d'intersection.

$$\mathcal{A}(IAB) = \mathcal{A}(JAB)$$

et les triangles ont même base donc ils ont la même hauteur.
Mais IKA a même hauteur que IAB et JKA a même hauteur que JAB donc IKA et JKA ont même base et même hauteur donc ils ont la même aire et

$$\mathcal{A}(IAK) = \mathcal{A}(JAK)$$

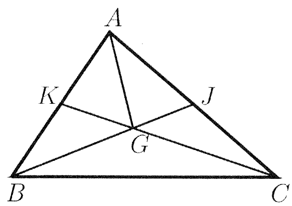
On regarde alors ces deux triangles en considérant leurs bases IK et JK ; ils ont même hauteur mais, ayant même aire, ils ont même base.
Donc $IK = JK$ et K est le milieu du segment $[IJ]$.

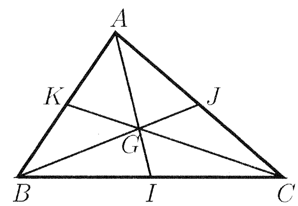
Si deux triangles ont même aire et base commune, le segment qui joint leurs sommets est :

- *soit parallèle à la base commune,*
- *soit coupé en son milieu par cette base commune.*

Exercice 7 bis

Démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.





Solution :

Dans ABC :

(BJ) médiane donc $\mathcal{A}(BAJ) = \mathcal{A}(BCJ) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABC)$

– (CK) médiane donc $\mathcal{A}(CAK) = \mathcal{A}(CBK) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABC)$

$$\mathcal{A}(ABJ) = \mathcal{A}(ACI) \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{A}(BGI) = \mathcal{A}(CGJ)$$

par soustraction du quadrilatère commun $AJGK$.

Dans AGC :

(GJ) médiane donc $\mathcal{A}(CGJ) = \mathcal{A}(AGJ)$

Dans AGB :

– (GK) médiane donc $\mathcal{A}(BGK) = \mathcal{A}(AGK)$

Ces quatre derniers triangles ont donc la même aire et, par addition,

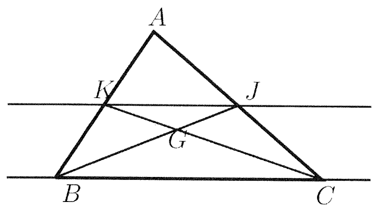
$$\mathcal{A}(AGC) = \mathcal{A}(AGB).$$

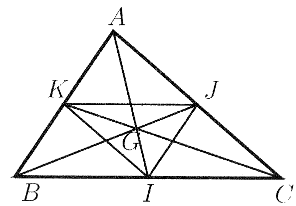
Nous sommes donc dans la configuration précédemment décrite : deux triangles de même aire, de base commune et situés de part et d'autre de cette base. On peut en déduire que (AG) coupe le segment $[CB]$ en son milieu et que (AG) est la troisième médiane :

Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes.

Cette démonstration, simple, permet alors de déduire immédiatement que :

1. les six petits triangles sont de même aire et donc que $(ACI) = 3.(GCI)$; or, ces deux triangles ont la même hauteur et donc $AK = 3.GK$: le centre de gravité d'un triangle est au tiers de chaque médiane,
2. les triangles JBC et KBC ayant même aire et base commune et étant situés du même côté de leur base commune, $(JK)//(BC)$; la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté,
3. on peut alors comparer les aires et les périmètres de ABC et IJK, etc...





Exercice 8 (démonstration du théorème dit "de Thalès")

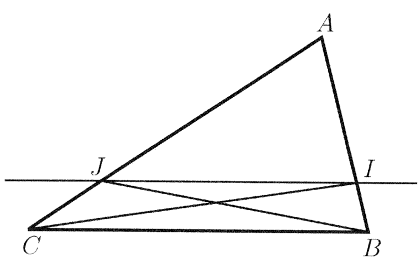
ABC est un triangle. I est un point du segment $[AB]$ et J un point du segment $[AC]$ tel que $(IJ)//(BC)$.

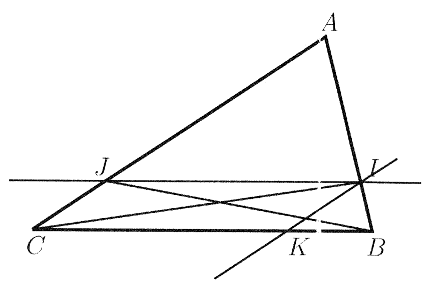
1. Démontrer que $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AJ}{AC}$.
2. Puis démontrer que $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AJ}{AC} = \dfrac{IJ}{BC}$.

Réciproque :
ABC est un triangle. I est un point du segment $[AB]$ tel que $AI = k \times AB$ et J est un point du segment $[AC]$ tel que $AJ = k \times AC$.

3. Démontrer que $(IJ)//(BC)$.

Solution :





1° $(IJ)//(CB)$ donc $\mathcal{A}(JCI) = \mathcal{A}(IBJ)$ et, en ajoutant $\mathcal{A}(AIJ)$: $\mathcal{A}(AJB) = \mathcal{A}(AIC)$

Les triangles AJB et AJI ont même hauteur donc $\dfrac{\mathcal{A}(AJI)}{\mathcal{A}(AJB)} = \dfrac{AI}{AB}$

De même, $\dfrac{\mathcal{A}(AIJ)}{\mathcal{A}(AIC)} = \dfrac{AJ}{AC}$ et donc : $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AJ}{AC}$

C'est ce qu'on voulait démontrer.

De même : $\dfrac{\mathcal{A}(IBJ)}{\mathcal{A}(ABJ)} = \dfrac{IB}{AB}$ et $\dfrac{\mathcal{A}(JIC)}{\mathcal{A}(AIC)} = \dfrac{JC}{AC}$ donc $\dfrac{IB}{AB} = \dfrac{JC}{AC}$ (*)

2° Traçons alors (IK) parallèle à (AC). En appliquant (*) on a: $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{CK}{CB}$;
$IJCB$ étant un parallélogramme, $IJ = CK$ On obtient ainsi la relation demandée:

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC} = \frac{AI}{AB}$$

3° On démontre simplement que $\mathcal{A}(ICB) = \mathcal{A}(JCB)$ et donc que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

Exercice 9

Construire (sans intermédiaire) un carré de même aire que le triangle équilatéral ABC.

Remarque :

Une première construction se fait par un coupé-collé d'un triangle équilatéral; le quadrilatère obtenu ressemble à un carré mais ce n'en est pas un ! Et la différence est très très légère: il est donc nécessaire de démontrer ! Cette démonstration ne pose pas de grande difficulté dans sa première partie mais n'est, à la fin, abordable que par des élèves de troisième. On proposera, ensuite, un "découpage" répondant au problème posé; il nécessite la connaissance de la construction d'une moyenne géométrique, par exemple par la méthode d'Euclide, et ce travail ,fait en classe dans les leçons précédentes, est proposé sous forme de deux exercices. Et enfin, on trouvera une construction géométrique de ce carré, sans découpage.

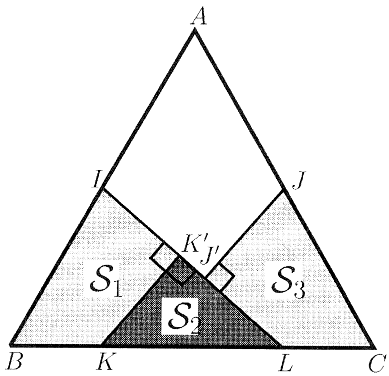
Méthode 1 :

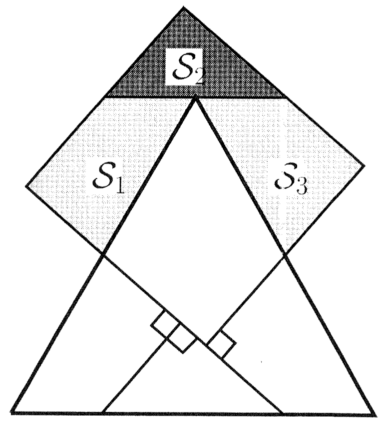
On découpe le triangle en quatre morceaux et on juxtapose les morceaux.

1. Découpage : I est le milieu du segment $[AB]$, J le milieu du segment $[AC]$; K et L sont deux points du segment $[BC]$ tels que

$$BK = CL = \frac{1}{4} \times BC.$$

   On trace (IL) puis K' et J' les projetés orthogonaux respectifs de K et J sur (IL).
   On obtient ainsi trois quadrilatères et un triangle.





2. On déplace S_1, S_2 et S_3 comme indiqué sur le schéma en remarquant qu'on juxtapose bien des segments de même longueur (rien à calculer) et des angles supplémentaires : on obtient donc un quadrilatère et il n'y a pas de "vide" dans ce quadrilatère.

   Il reste à chercher s'il s'agit ou non d'un carré...
   Il a trois angles droits: c'est un rectangle.
   Comparons maintenant ses côtés en prenant $BC = 4$ (unités de longueur) donc $BI = 2$ et $BK = 1$

Remarquons que la différence est "très petite" ($x - y$ vaut environ $0,027$ (u)) et donc le collage fait illusion...

Remarque :

On n'a donc pas répondu au problème posé !

Méthode 2 : Construire la moyenne géométrique x de AH (hauteur du triangle) et de BH.

A partir de I milieu du segment $[AB]$, on reporte la longueur $IL = x$.
On obtient L sur le segment $[BC]$. On place K tel que

$$LK = \frac{1}{2}.BC.$$

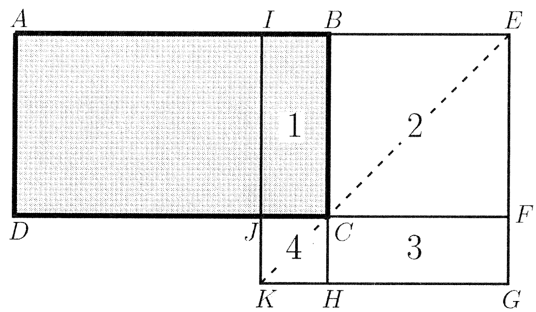
On achève la construction comme dans la méthode 1.
On montre alors que S_1 et S_2 ne sont plus identiques mais le quadrilatère est toujours un rectangle qui a la même aire $\mathcal{A}$ que le triangle.
Un côté de ce rectangle mesure $\sqrt{\mathcal{A}}$, donc c'est un carré.

Construction de la moyenne géométrique de deux segments

Il s'agit aussi d'un problème de quadrature :
Construire un carré ayant la même aire qu'un rectangle donné.
Proposons la méthode d'Euclide, sous forme d'exercices (11 et 11bis)

Exercice 11 (Proposition 6 du livre II des Éléments d'Euclide)

$ABCD$ est un rectangle. E est un point de (AB) extérieur au rectangle et tel que $BE = AD$. I est le milieu du segment $[AE]$.
On se propose de montrer que l'aire du rectangle est égale à l'aire du carré construit sur $[IA]$ moins l'aire du carré construit sur $[IB]$.



Solution :

On construit le carré sur $[IE]$; on remarque que $AI = IE$.
Sachant que $BE = AD = BC$, $BEFC$ est un carré.
Sa diagonale (EC) coupe en K la perpendiculaire (IJ) à (AB) et $IEGK$ et $JCHK$ sont des carrés.
Si

$\mathcal{A}_O = (ABCD)$; $\mathcal{A}_1 = (IBCJ)$; $\mathcal{A}_2 = (BEFC)$;
$\mathcal{A}_3 = (CFGH)$; $\mathcal{A}_4 = (CHKJ)$;

on a démontré que : $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_3$
et, I étant le milieu du segment $[AE]$: $\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$
ou encore : $\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$
c'est-à-dire : $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\mathcal{A}(ABCD) - \mathcal{A}(JCHK) = \mathcal{A}(IEGK)$$

L'aire du rectangle $ABCD$ est la même que l'aire du "gnomon" $IEGHCJ$.

On peut remarquer aussi que si $AB = a$ et $AD = b$, on a

$$IE = \frac{1}{2}(a+b) \quad \text{et} \quad JC = \frac{1}{2}(a-b)$$

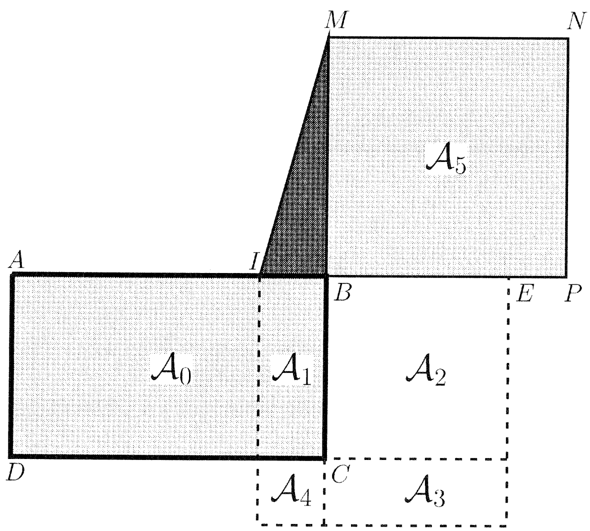
En langage algébrique cette égalité s'exprime par:
"le produit de deux nombres est égal au carré de leur demi-somme moins le carré de leur demi-différence"

Exercice 11bis Proposition 14 du Livre II

On cherche un carré dont l'aire est la même que celle d'un rectangle $ABCD$ donné.

Solution :

On prolonge le côté $[AB]$ d'un segment $[BE]$ égal à BC ; on appelle I le milieu du segment $[AE]$.



Le demi-cercle de centre I et de rayon IE extérieur au rectangle coupe (BC) en M : le carré de côté BM est le carré cherché.
On sait que IBM est un triangle rectangle donc (propriété de Pythagore) :
l'aire $\mathcal{A}$ du carré construit sur IM est égal à l'aire $\mathcal{A}_5$ du carré construit sur BM plus l'aire $\mathcal{A}_4$ du carré construit sur IB.

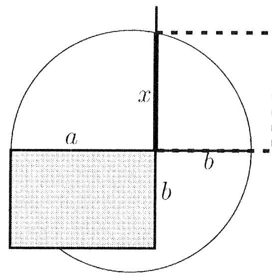
	$\mathcal{A}$	$=$	$\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_4$
Or $IM = IE$ donc	$\mathcal{A}$	$=$	$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4$
donc en simplifiant :	$\mathcal{A}_5$	$=$	$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$.
D'après (11) l'aire du rectangle est	$\mathcal{A}_0$	$=$	$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$

Ce qui démontre que :

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(BMNP)$$

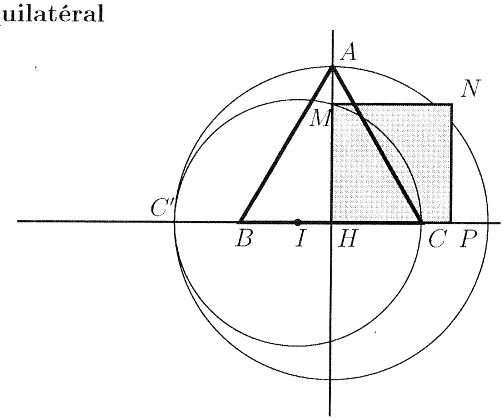
On remarque que, dans le triangle MBI, BM^2 est le produit $a \times b$, IB est la demi-différence $\frac{1}{2}(a-b)$ et l'hypoténuse IM est la demi-somme $\frac{1}{2}(a+b)$.

On obtient ainsi un procédé de construction de la moyenne géométrique de deux longueurs. $(x^2 = a \cdot b)$.



Méthode 3 :

Construction géométrique effective du carré d'aire équivalente au triangle équilatéral



Ici: $HC' = HA$
Le point I **est le milieu du segment** CC'.
Le cercle de centre I **et de diamètre** CC' **coupe** (HA) **en** M **donc**

$$HM^2 = HA \times HC$$

et le carré de côté HM **a la même aire que le triangle équilatéral** ABC.