

# L'INVERSION,

## ET LA PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE.

Luc SINÈGRE et Frédéric VIVIEN

IREM de ROUEN

L'inversion (inventée en 1824 par Jakob Steiner) faisait partie du bagage élémentaire de tout bachelier jusqu'à la fin des années soixante. Elle a disparu avec l'arrivée des maths dites modernes mais personne n'a osé proposer de réintroduire, depuis la fin de l'enseignement des structures, même partiellement, l'étude des propriétés angulaires des cercles et de leurs transformations (*la géométrie anallagmatique*). La plupart des professeurs n'a donc jamais rencontré cette notion (sauf peut-être à l'Université, dans des U.V. de géométrie).

La première partie de notre exposé permettra d'accorder une place à l'interprétation algébrique de l'inversion. Grâce aux nombres complexes on peut associer aux cercles et aux droites des *formes algébriques* sur lesquelles l'inversion (*i.e.*, l'application  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ ) opère *algébriquement*.

La deuxième partie consistera à retrouver les premières propriétés de l'inversion plane grâce à l'étude de la projection stéréographique. Les outils nécessaires seront ceux de la géométrie élémentaire du collège (angles, distances, trigonométrie), ou du lycée (produit scalaire, homothétie) et on pourra au passage retrouver quelques figures oubliées.

Dans le cadre des formes algébriques obtenues dans la première partie, la notion d'angle possède une interprétation plaisante dans cet espace de *formes* identifié à un espace de matrices ( $2 \times 2$ ). Cette représentation algébrique de l'inversion plane fermera cet exposé.

## Une présentation algébrique de l'inversion.

On souhaite généraliser la notion de symétrie par rapport à une droite. Dans le plan complexe la *réflexion par rapport à l'axe des abscisses* correspond à l'application  $z \mapsto \bar{z}$ . L'ensemble des points fixes de la symétrie est défini par l'équation en coordonnées complexes  $z = \bar{z}$  de l'axe des abscisses.

La représentation complexe de la *réflexion par rapport au cercle unité centré à l'origine* devra faire de  $z\bar{z} = 1$  l'équation de l'ensemble des points fixes.

On introduit ainsi naturellement l'application  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$  qui a pour ensemble des points fixes le cercle unité. Cette application est une involution de  $\mathcal{C}$  privé de 0.

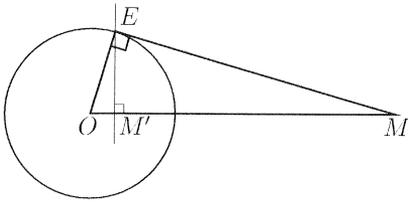


figure 1

Pour tout point  $M$  du plan, d'image  $M'$  par cette application  $I$  qu'on appelle inversion de pôle  $O$  et de puissance 1, on a :

$$M' \in [OM) \text{ et } OM \cdot OM' = 1$$

Pour construire l'image (ou l'antécédent) d'un point  $M$  extérieur au disque unité, il suffit de construire la tangente en  $M$  au cercle unité.

On a alors par projection :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OM} = OE^2 = 1$$

Le cercle  $\mathcal{C}(O, 1)$  et le cercle  $\gamma$  de diamètre  $[MM']$  (et de rayon  $R$ ) sont sécants, puisque l'un des points  $M$  ou  $M'$  appartient au disque de centre  $O$  et de rayon 1. Soit  $A$  l'un des points d'intersection et  $\Omega$  le milieu de  $[MM']$ .

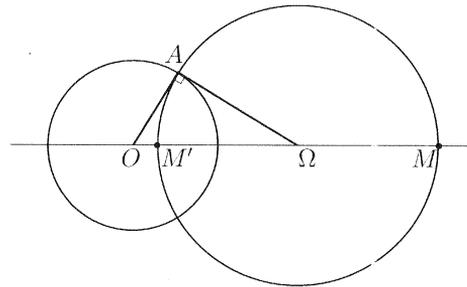


figure 2

Appelons  $d$  la distance  $O\Omega$ , on a

$$1 = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = (d + R)(d - R) = d^2 - R^2$$

Ceci prouve que l'angle  $\widehat{OAA}$  est droit.

Le cercle de diamètre  $[MM']$  coupe donc orthogonalement le cercle  $\mathcal{C}(O, 1)$ , dans ce cas on parle de cercles orthogonaux. Cette propriété généralise ainsi l'orthogonalité de la réflexion...

### Des cercles et des droites.

Considérons l'équation

$$\alpha(x^2 + y^2) - 2ux - 2vy + \beta = 0$$

dans laquelle les coefficients  $(\alpha, \beta, u, v)$  désignent quatre réels ( $u, v$  et  $\alpha$  n'étant pas nuls en même temps). On voit facilement que si  $\alpha = 0$  cette équation représente une droite, alors que sinon, on reconnaît l'équation d'un cercle ou du vide. Réciproquement toute droite du plan, et tout cercle est représenté par une équation de cette forme.

Si l'on pose  $z = x + iy$ , et  $\zeta = u + iv$  l'équation devient<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \alpha z \bar{z} - u(z + \bar{z}) + 2iv(z - \bar{z}) + \beta &= 0 \\ \alpha z \bar{z} - z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta + \beta &= 0 \end{aligned}$$

1. Si  $\alpha \neq 0$ , la dernière équation s'écrit :  $|z - \frac{\zeta}{\alpha}|^2 = \frac{|\zeta|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha}$

L'inversion  $\mathcal{I}$  d'expression complexe  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$  induit donc une réelle *inversion* sur les coefficients de cette équation, à savoir l'application  $(\alpha, \beta, \zeta) \mapsto (\beta, \alpha, \zeta)$  de  $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{C}$  dans  $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{C}$

De ceci découle naturellement les énoncés suivant:

- Toute droite contenant le pôle  $(\alpha = 0) \wedge (\beta = 0)$  est globalement invariante par  $\mathcal{I}$ .
- Toute droite ne contenant pas le pôle  $(\alpha = 0) \wedge (\beta \neq 0)$  a pour image par  $\mathcal{I}$  un cercle contenant le pôle. On lit directement sur l'équation que la droite qui joint le pôle au centre du cercle inverse est orthogonale à la droite de départ.
- Tout cercle contenant le pôle  $(\alpha \neq 0) \wedge (\beta = 0)$  a pour image par  $\mathcal{I}$  une droite ne contenant pas le pôle.
- Tout cercle ne contenant pas le pôle  $(\alpha \neq 0) \wedge (\beta \neq 0)$  a pour image par  $\mathcal{I}$  un cercle ne contenant pas le pôle.

De plus le centre et le carré du rayon du cercle défini par l'équation précédente sont définis par les nombres  $\frac{\zeta}{\alpha}$  et  $\frac{|\zeta|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha}$  qui deviennent  $\frac{\zeta}{\beta}$  et  $\frac{|\zeta|^2}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta}$  après transformation.

Le cercle inverse est donc homothétique du premier cercle par une homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

### Cocyclicité de deux couples de points homologues.

On considère les points  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes  $z_1$  et  $z_2$  et leurs images  $M'_1$  et  $M'_2$  d'affixes  $\frac{1}{\bar{z}_1}$  et  $\frac{1}{\bar{z}_2}$

Supposons que  $M_2$  n'appartienne pas à la droite  $(OM_1)$  et considérons le cercle  $\Gamma$  circonscrit au triangle  $M_1 M'_1 M_2$ .

Le cercle  $\Gamma$  possède une équation complexe  $\alpha z \bar{z} + z \zeta + \bar{z} \bar{\zeta} + \alpha = 0$  dont les coefficients extrêmes sont égaux puisque l'équation doit être vérifiée<sup>2</sup> à la fois pour  $z_1$  et  $\frac{1}{\bar{z}_1}$ .

Cette équation est donc également vérifiée par  $\frac{1}{\bar{z}_2}$  ce qui prouve que les points  $M_1 M'_1 M_2 M'_2$  sont cocycliques.

Deux points et leurs images par  $\mathcal{I}$  sont donc alignés ou cocycliques.

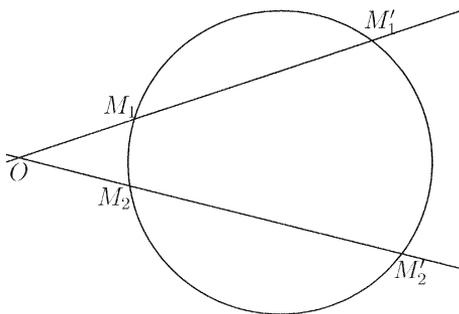


figure 3

2. Si l'on écrit *symboliquement* la forme qui représente le cercle ainsi:  $(\alpha, \zeta, \beta) \cdot z = 0$ , en soustrayant  $(\alpha, \zeta, \beta) \cdot z_1 = 0$ , et  $(\beta, \zeta, \alpha) \cdot z_1 = 0$ , on obtient  $(\alpha - \beta, 0, \beta - \alpha) \cdot z_1 = 0$ , donc  $\alpha = \beta$ .

**Exercice :**

Construire l'image d'un point  $D$  donné du plan connaissant le pôle de  $\mathcal{I}$  et un couple de points homologues par  $\mathcal{I}$ .

**Exercice :**

Que devient l'énoncé précédent lorsque  $M'_2 = M_2$ ?

**Application à l'Optique.**

Un rayon ( $ME$ ) vient rencontrer en  $E$  un miroir sphérique de centre  $C$  et de rayon  $R$ . Le rayon réfléchi est porté par la droite ( $M'E$ ) (avec  $M' \in (MC)$ ). La demi-droite  $[CM)$  coupe le miroir en  $D$ .

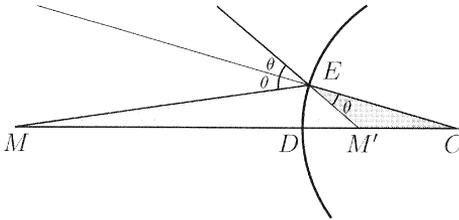


figure 4

On se place dans les conditions de l'*approximation de Gauss*. Les rayons sont presque horizontaux et l'angle d'incidence sur le miroir sphérique très petit. Avec les notations de la figure on a donc à la fois  $\theta$  et  $t$  petits.

Si l'on note  $t'$  l'angle  $M\widehat{E}M'$ , on a  $t + t' = 2\theta$ , l'angle  $t'$  est aussi un infiniment petit.

En appliquant dans les triangles  $MEC$  et  $M'EC$  la propriété des si-

nus on trouve :

$$\frac{\sin t}{R} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{CM} = \frac{\sin \theta}{CM}$$

et

$$\frac{\sin t'}{R} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{CM'} = \frac{\sin \theta}{CM'}$$

En confondant comme c'est l'usage dans de tels cas les sinus et les angles on obtient enfin :

$$\frac{t + t'}{R} = \frac{2\theta}{R} = \theta \left( \frac{1}{CM} + \frac{1}{CM'} \right)$$

soit

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{CM} + \frac{1}{CM'}$$

On peut<sup>3</sup> aussi déduire de ce résultat que  $\overline{CM} \cdot \overline{CM'} = CD^2$ .

Si l'on prend  $R$  comme unité, le point  $M'$  est donc l'image de  $M$  par l'inversion  $\mathcal{I}$  de pôle  $C$ , ce qui généralise agréablement les propriétés optiques de la symétrie par rapport à une droite.

3. Cette relation est l'une des propriétés caractéristiques de ce qu'on appelle une *division harmonique*.

**Généralisation.**

On appelle inversion de pôle  $O$  et de puissance  $k$  réel non nul la composée  $I_k$  de  $\mathcal{I}$  et de l'homothétie  $H_k$  de centre  $O$  et de rapport  $k$ .

$$I_k = H_k \circ \mathcal{I} = \mathcal{I} \circ H_{\frac{1}{k}}$$

Les propriétés déjà démontrées pour  $\mathcal{I}$  s'étendent naturellement sans difficulté à  $I_k$  dont l'expression complexe est  $z \mapsto \frac{k}{\bar{z}}$  avec  $(k \in \mathcal{R})$ .

**Conservation des angles.**

Soit  $t \mapsto z_1(t)$  et  $t \mapsto z_2(t)$  deux arcs de classe  $C_1$  sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathcal{R}$  et supposons, de plus, qu'en  $t_0$ , on ait  $z_1(t_0) = z_2(t_0)$ . Les deux arcs admettent deux tangentes  $T_1$  et  $T_2$  au point d'affixe  $z_0$  dirigées par  $z'_1(t_0)$  et  $z'_2(t_0)$  si nous supposons que ces complexes sont non nuls. Les arcs images auront au point image des tangentes  $T'_1$  et  $T'_2$  dirigées par les vecteurs d'affixes  $-\frac{k \cdot \bar{z}'_1(t_0)}{\bar{z}_1^2(t_0)}$  et  $-\frac{k \cdot \bar{z}'_2(t_0)}{\bar{z}_2^2(t_0)}$  telles que :

$$(T'_1, T'_2) = \arg \frac{\bar{z}'_2(t_0)}{\bar{z}'_1(t_0)} \quad [\pi]$$

or  $\frac{\bar{z}'_2(t_0)}{\bar{z}'_1(t_0)} = -\arg z'_2(t_0) + \arg z'_1(t_0) = (T_2, T_1) \quad [\pi]$

Les angles de droites sont donc conservés au signe près (comme avec les réflexions), quand on inverse deux courbes.

**Une définition de l'inversion par la projection stéréographique.**

Considérons une sphère  $S$  et un point  $N$  de cette sphère (que nous pouvons assimiler à son "pôle nord"). La projection stéréographique est la projection centrale de la sphère sur le plan tangent au pôle sud.

Notons  $(P)$  ce plan tangent au point diamétralement opposé au point  $N$  sur la sphère  $(S)$ , le point  $O$ .

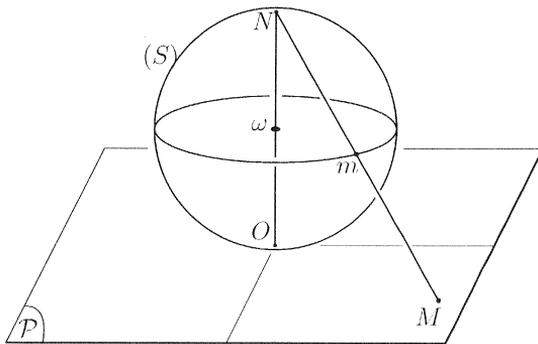


figure 5

Cette transformation est alors une bijection de la sphère  $(S)$  privée du point  $N$  sur le plan  $(P)$ .

Proposition L'image d'un cercle de la sphère ( $S$ ) ne contenant pas  $N$  est un cercle sur le plan ( $P$ ).

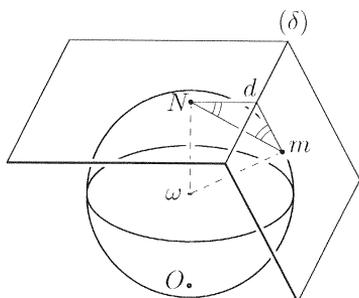


figure 6

Preuve :

a) Considérons un point  $m$ , distinct de  $N$ , sur ( $S$ ). Notons  $(\delta)$  la droite d'intersection entre les plans tangents à ( $S$ ) aux points  $N$  et  $m$ .

Soit  $d$  l'intersection de  $\delta$  avec le plan  $(N\omega m)$ .

On a

$$(\overrightarrow{Nm}, \overrightarrow{Nd}) = (\overrightarrow{md}, \overrightarrow{mN})$$

b) Notons  $(\Delta)$  la droite d'intersection du plan tangent en  $m$  à la sphère ( $S$ ) et ( $P$ ).

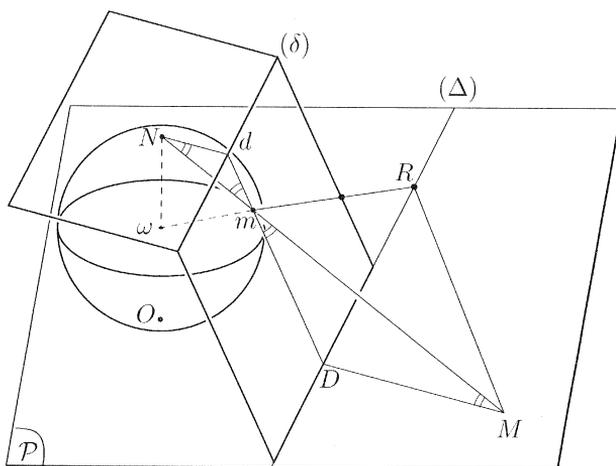


figure 7

Puisque les plans tangents en  $N$  et en  $O$  (le plan ( $P$ )) sont parallèles on a  $(\overrightarrow{Nm}, \overrightarrow{Nd}) = (\overrightarrow{Mm}, \overrightarrow{MD})$ , le triangle  $mMD$  est donc isocèle en  $D$ .

De plus, le plan tangent en  $N$  est perpendiculaire à  $(N\omega)$ ; donc  $(\delta) \perp (N\omega)$

De même,  $(\delta) \perp (m\omega)$ .

donc  $(\delta) \perp (N\omega m)$

Les droites  $(\delta)$  et  $(\Delta)$  sont parallèles car elles se trouvent à l'intersection d'un plan avec deux plans parallèles. Comme, de plus, les points  $N, m, M, \omega, d, D$  sont coplanaires, on obtient

$$(\Delta) \perp (mMD)$$

Si  $R$  est un point de  $(\Delta)$ , on applique le théorème de Pythagore dans les triangles  $RDm$  et  $RDM$ , pour obtenir, puisque le triangle  $mMD$  est isocèle en  $D$ ,  $RmM$  est isocèle en  $R$  et donc

$$(\overrightarrow{mR}, \overrightarrow{mM}) = (\overrightarrow{Mm}, \overrightarrow{MR}). \quad (\bullet)$$

On remarque que  $(Rm)$  est une droite tangente à cette sphère incluse dans le plan tangent en  $m$  à la sphère  $(S)$ .

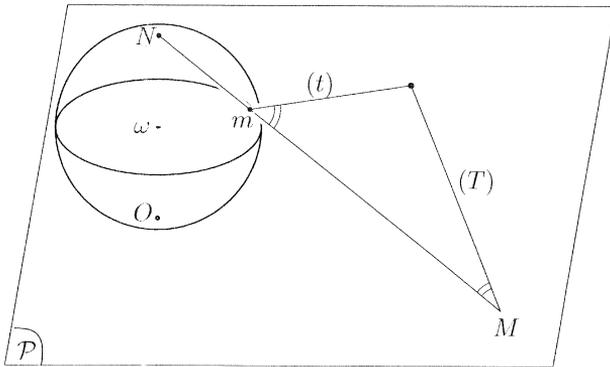


figure 8

c) Utilisons ce résultat pour démontrer que la projection stéréographique est une transformation conforme (c'est-à-dire qu'elle conserve les angles).

Soit  $(t)$  une tangente à  $(S)$  en  $m$  de projection  $M$  sur  $(P)$ .

Soit alors  $(T)$  la droite projection de  $(t)$  sur  $(P)$ .

Nous savons que l'angle de droites formé par la droite  $(NM)$  avec la

droite  $(t)$  d'une part et avec la droite  $(T)$  d'autre part sont égaux.

Considérons deux tangentes  $(t_1)$  et  $(t_2)$  à la sphère  $(S)$  au point  $m$  et leurs images  $(T_1)$  et  $(T_2)$  par la projection. Elles contiennent donc le point  $M$  projeté du point  $m$  par la projection stéréographique.

Notons

$$R = (t_1) \cap (T_1)$$

et

$$Q = (t_2) \cap (T_2)$$

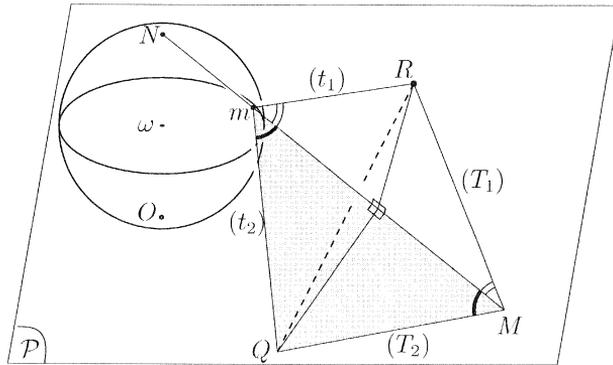


figure 9

Les triangles  $RMm$  et  $QMm$  sont isocèles respectivement en  $R$  et  $Q$  donc ces deux points se trouvent sur le plan médiateur de  $[mM]$ .

Ce plan est un plan de symétrie de la figure. L'angle formé entre les droites  $(t_1)$  et  $(t_2)$  est égal à l'angle formé entre  $(T_1)$  et  $(T_2)$ .

d) Prenons un cercle  $(c)$  sur la sphère  $(S)$  ne contenant pas  $N$  et soit  $(C)$  son image sur le plan  $(P)$  par la projection stéréographique.



A ce point de l'exposé, il est utile de considérer le complété de  $\mathcal{C}$ . On définit alors une bijection de  $(S)$  sur  $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\infty\}$  (appelé alors Sphère de Riemann) et les droites du plan  $(P)$  identifiées à  $\tilde{\mathcal{C}}$  sont des cercles dont le centre est envoyé à l'infini.

Ainsi, l'image d'un cercle de  $(S)$  est un cercle de  $(P)$  (ou cercle-droite) par la projection stéréographique.

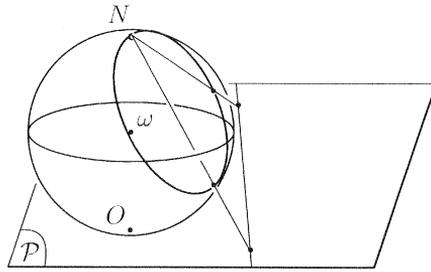


figure 13

**Une définition de l'inversion.**

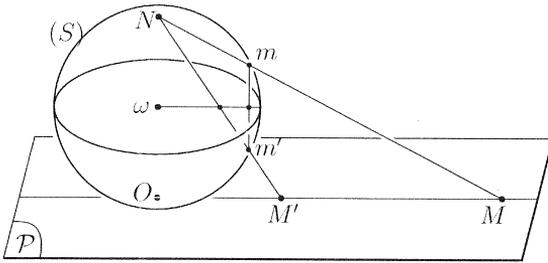


figure 14

A un point  $M$  du plan  $(P)$ , on fait correspondre le point  $m$  de la sphère tel que  $M$  soit la projection stéréographique du point  $m$ . Le point  $m'$  est le symétrique de  $m$  par rapport au plan  $(P')$ , parallèle à  $(P)$  passant par le centre de la sphère (plan de l' "équateur"). Le point  $M'$  est alors défini comme

le projeté stéréographique du point  $m'$  sur le plan  $(P)$ .

La transformation qui, à tout point  $M$  du plan  $(P)$ , fait correspondre le point  $M'$  est une inversion du plan  $(P)$ .

Démonstration :

Les points  $N, \omega, O, m, M, m', M'$  sont coplanaires et les points  $O, M$  et  $M'$  se trouvant à l'intersection de ce plan avec le plan  $(P)$ , ils sont alignés. 1

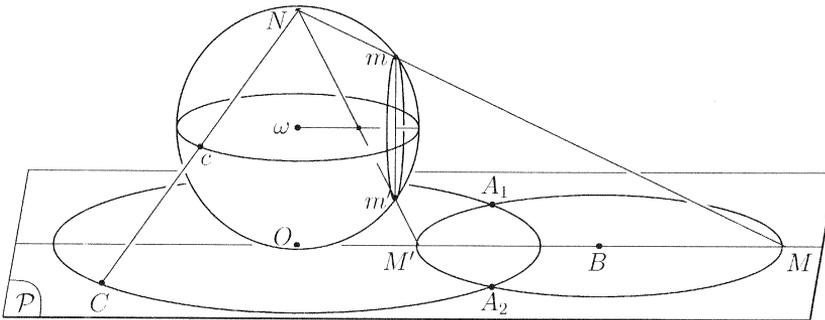


figure 15

Soient  $(c_1)$  le cercle se trouvant à l'intersection du plan parallèle à  $(P)$  passant par  $\omega$  et de  $(S)$  et  $(c_2)$  le cercle de diamètre  $[mm']$  sur  $(S)$ .

Soit  $B$  le centre du cercle  $(C_2)$ , image de  $(c_2)$ .

On a alors  $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = (OB - BM') \cdot (OB + BM) = OB^2 - R^2$   
en notant  $R$  le rayon du cercle  $(C_2)$ .

Preuve: Les tangentes aux points d'intersection des deux cercles sont perpendiculaires.

En effet, les tangentes à  $(c_2)$  sont parallèles à  $(mm')$  qui est perpendiculaire au plan de  $(c_1)$  donc ces tangentes sont perpendiculaires aux tangentes à  $(c_1)$  aux mêmes points.

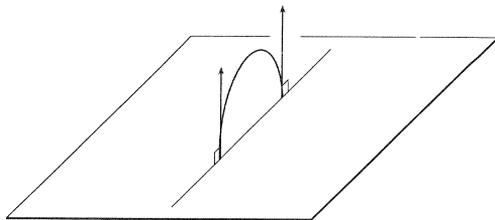


figure 16

Comme la projection stéréographique conserve les angles, les cercles images  $(C_1)$  et  $(C_2)$  sont orthogonaux en deux points  $A_1$  et  $A_2$ . Si on suppose la sphère  $(S)$  de centre  $\omega$  et de rayon  $r$ , alors le cercle image  $(C_1)$  sera de rayon  $2r$  (par le théorème de Thalès, par exemple).

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle  $OA_1B$  par exemple, on obtient :

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = OB^2 - R^2 = (2r)^2 = \text{constante} \quad \boxed{2}$$

$\boxed{1}$  et  $\boxed{2}$  prouvent que la transformation  $\mathcal{I}$  est une inversion de centre  $O$  dans le plan  $(P)$  (qui laisse d'ailleurs le cercle  $(C_1)$  invariant).

L'inversion plane se révèle être ainsi une simple symétrie plane dans l'espace via la projection stéréographique.

### Premières propriétés

- L'image d'une droite contenant le point  $O$  par l'inversion  $\mathcal{I}$  est cette même droite.

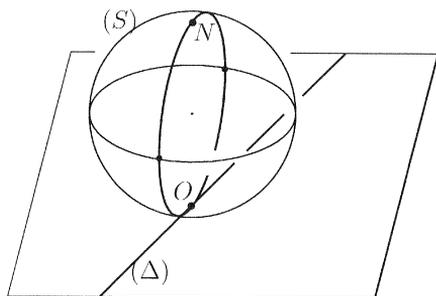


figure 17

Soit  $(\Delta)$  une droite de  $(P)$  contenant  $O$ . Le plan défini par cette droite et le point  $N$  coupe la sphère  $(S)$  en un cercle de diamètre  $[NO]$ . Le symétrique de ce cercle par la réflexion  $s$  est un cercle sur la sphère de diamètre  $[NO]$ , donc le cercle lui-même. L'intersection du plan défini par ce cercle avec le plan  $(P)$  est la droite  $(\Delta)$ .

- L'image d'une droite ne contenant pas  $O$  est un cercle contenant  $O$ .

Soit  $(\Delta)$  une droite de  $(P)$  ne contenant pas  $O$ . Le plan défini par cette droite et le point  $N$  coupe la sphère  $(S)$  en un cercle contenant  $N$ . Le symétrique de ce cercle par la réflexion  $s$  est un cercle sur la sphère passant par  $O$  et ne contenant pas  $N$ . L'image par la projection stéréographique d'un cercle ne contenant pas  $N$  est un cercle.  $O$  étant invariant par la projection, ce cercle contient  $O$ .

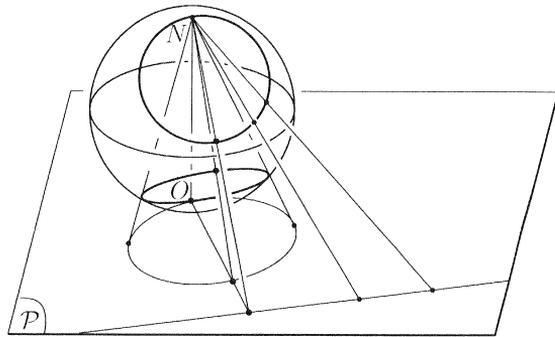


figure 18

- L'image d'un cercle ne contenant pas  $O$  est un cercle ne contenant pas  $O$ .

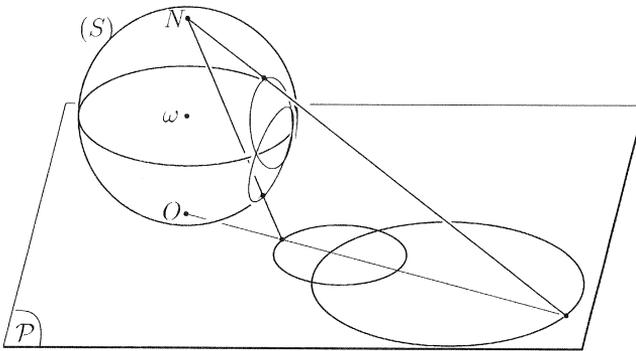


figure 19

Par la réciproque de la projection stéréographique, l'image d'un cercle sur le plan  $(P)$  est un cercle sur  $(S)$  ne contenant pas  $N$ . De plus, ce cercle ne contient pas  $O$  qui n'appartient pas au cercle initial. Le symétrique par  $s$  de ce cercle est un cercle sur  $(S)$  ne contenant ni  $O$  ni  $N$ .

Puis, par la projection stéréographique, ce cercle sur la sphère a pour image un cercle sur le plan  $(P)$  ne contenant pas  $O$ . Ce cercle est ainsi le cercle inverse du cercle initial.

- L'image d'un cercle contenant  $O$  est une droite ne contenant pas  $O$ .

Il suffit pour cela d'appliquer le raisonnement précédent sur la bijection  $\mathcal{I}$  du plan  $(P)$ .

## Représentation algébrique.

### Puissance d'un point par rapport à un cercle.

On se donne deux points  $M, N$  fixés dans le plan, leurs images  $M_1, N_1$  par une inversion de pôle  $A$  et de puissance 1, puis les images  $M', N'$  de ces derniers points par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $k$ . Il est facile de voir que les points  $M, N, M', N'$  sont encore cocycliques.

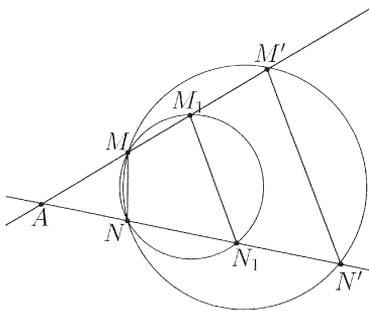


figure 20

En effet nous savions déjà que les points  $M, N, M_1, N_1$  étaient cocycliques et de plus les droites  $(M_1N_1)$  et  $(M'N')$  sont parallèles donc :

$$\begin{aligned} (MN, MM_1) &= (N_1N, N_1M_1) \\ &= (N'N, N'M') \quad [\pi] \end{aligned}$$

Réciproquement si  $M, N, M', N'$  sont quatre points du plan donnés, tels que les droites  $(MM')$  et  $(NN')$  sont sécantes en  $A$ , l'image de  $N$  par l'inversion de pôle  $A$  qui envoie  $M$  sur  $M'$  appartient à l'intersection de la droite  $(AN)$  et du cercle circonscrit au triangle  $(MM'N)$ . Donc cette image est  $N'$ .

Proposition :

Étant donnés trois points  $M, M', N'$  non alignés, un point  $N$  appartient au cercle  $\gamma$  circonscrit à  $(MM'N)$  si et seulement si (en désignant par  $A$  l'intersection des droites  $(MM')$  et  $(NN')$ ) :

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AN} \cdot \overline{AN'}.$$

Cet invariant est appelé la puissance du point  $A$  par rapport au cercle  $\gamma$  et noté  $P_\gamma(A)$ , on<sup>4</sup> a pour un cercle  $\gamma$  de centre  $O$  et de rayon  $R$  :

$$P_\gamma(A) = OA^2 - R^2$$

Si nous supposons que le cercle est d'équation :  $z\bar{z} - z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta + \beta = 0$  et si nous appelons  $\omega$  l'axe de  $A$ , on a déjà vu que  $R^2 = |\zeta|^2 - \beta$ , d'où

$$P_\gamma(A) = OA^2 - R^2 = |\omega - \zeta|^2 - (|\zeta|^2 - \beta) = \omega\bar{\omega} - \omega\bar{\zeta} - \bar{\omega}\zeta + \beta$$

$$P_\gamma(A) = \begin{pmatrix} \bar{\omega} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\zeta \\ -\bar{\zeta} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne l'envie de représenter l'ensemble des cercles et des droites par des matrices à coefficients complexes.

### Représentation matricielle des cercles-droites.

On va donc associer à tout cercle-droite d'équation générale

$$\alpha z\bar{z} - z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta + \beta = 0$$

la matrice  $H = \begin{pmatrix} \alpha & -\zeta \\ -\bar{\zeta} & \beta \end{pmatrix}$  avec<sup>5</sup>  $\alpha, \beta$  réels et  $\zeta$  complexe.

4. Ce résultat a déjà été montré au début de ce texte, on peut aussi le retrouver en faisant tendre le point  $N$  vers le point  $M$  fixé sur le cercle  $\gamma$  dans ce cas le triangle  $(AMO)$  devient rectangle et le résultat découle du théorème de Pythagore.

5. Plus précisément, on sait que  $\alpha$  peut s'annuler, mais si  $\alpha$  est nul, alors  $\zeta$  lui ne peut plus s'annuler.

Ces matrices ont une propriété remarquable : prendre la transposée revient à prendre la conjuguée, on les appelle matrices hermitiennes.

Remarquons d'abord que le déterminant de  $H$  vaut  $\alpha\beta - |\zeta|^2$ .

Si  $\alpha$  est nul, alors ce déterminant ne s'annule pas. Sinon on peut écrire avec  $R$  le rayon du cercle

$$\det H = \alpha^2 \left( \frac{\beta}{\alpha} - \frac{|\zeta|^2}{\alpha^2} \right) = -\alpha^2 R^2$$

Les cercles points correspondent donc exactement aux matrices hermitiennes de déterminant nul, c'est-à-dire aux matrices non inversibles. Par souci de régularité on associe aux matrices hermitiennes un cercle même lorsque  $\left( \frac{|\zeta|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} \right) > 0$ , dans ce cas on parle de cercles imaginaires.

De plus si l'on note  $\mathcal{I}$  l'inversion de pôle  $O$  et de puissance  $-1$   $\mathcal{I} : z \mapsto \frac{-1}{\bar{z}}$ , et si l'on transforme par  $\mathcal{I}$  l'équation suivante

$$\alpha z \bar{z} - z \bar{\zeta} - \bar{z} \zeta + \beta = 0,$$

on obtient après multiplication par  $z \bar{z}$

$$\beta z \bar{z} + z \bar{\zeta} + \bar{z} \zeta + \alpha = 0,$$

et donc à une forme de matrice  $H = \begin{pmatrix} \alpha & -\zeta \\ -\bar{\zeta} & \beta \end{pmatrix}$

on associe la forme de matrice  $H' = \begin{pmatrix} \beta & \zeta \\ \bar{\zeta} & \alpha \end{pmatrix}$  qui est la transposée de la co-matrice de  $H$ , qu'on appelle matrice complémentaire de  $H$ .

Si  $H$  est inversible on sait que

$$\det(H)H^{-1} = H'$$

montrant ainsi que la matrice associée à l'inverse d'un cercle par  $\mathcal{I}$  est l'inverse de la matrice de départ.

On peut en prime regarder comment le groupe de Moëbius opère sur ces matrices puisque les transformations homographiques opèrent naturellement sur les équations de cercle. Bien entendu l'opération de ce groupe se fait par conjugaison.

### Une analogie.

Pour mieux comprendre ce qui suit on va commencer par une analogie. Considérons un plan  $\Pi$  de vecteurs muni d'une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$  relativement au produit scalaire usuel noté  $( \mid )$ .

Ainsi si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs de coordonnées  $(x, y)$  et  $(x', y')$ , on a comme à l'ordinaire

$$(\vec{u} \mid \vec{v}) = xx' + yy'$$

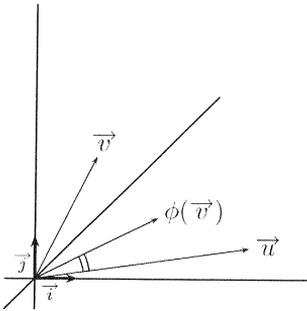


figure 21

Considérons  $\phi$  l'application linéaire de  $\Pi$  dans  $\Pi$  qui échange  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  (c'est la symétrie par rapport à la première bissectrice).

On peut définir une nouvelle forme linéaire sur  $\Pi$  en posant :

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle &= (\vec{u} | \phi(\vec{v})) \\ &= xy' + x'y \\ &= (\vec{v} | \phi(\vec{u})) \\ &= \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \end{aligned}$$

Cette forme est encore bilinéaire et symétrique, mais ce n'est plus exactement un produit scalaire puisque le signe de  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 2xy$  n'est pas constant.

Si l'on cherche à mesurer les angles avec un rapporteur étalonné de cette manière, il faut effectuer d'abord la symétrie par rapport à la première bissectrice. Les angles mesurés ainsi sont en quelque sorte l'image des angles ordinaires vu au travers du prisme<sup>6</sup> de l'application  $\phi$ .

Dans ce qui suit on essaie de relier, de même, les angles de cercles et de droites à une forme classique.

### Lien avec la forme quadratique fondamentale.

La forme  $(H, K) \mapsto \text{Tr}({}^t \bar{H} K)$  est une forme bilinéaire définie positive sur l'ensemble des matrices  $2 \times 2$ . En effet si  $H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , on a :

$$\text{Tr}({}^t \bar{H} H) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2.$$

Sur l'ensemble des matrices hermitiennes, la restriction de cette forme s'exprime plus facilement :

$$\text{Tr}({}^t \bar{H} H) = \text{Tr}(H_2)$$

et donc si

$$H_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\zeta_1 \\ -\bar{\zeta}_1 & \beta_1 \end{pmatrix}, \text{ et } H_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\zeta_2 \\ -\bar{\zeta}_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } (H_1 | H_2) = \alpha_1 \alpha_2 + \zeta_1 \bar{\zeta}_2 + \zeta_2 \bar{\zeta}_1 + \beta_1 \beta_2.$$

Nous avons vu que l'inversion  $\mathcal{I}$  de pôle  $O$  et de rapport  $-1$  s'interprète comme l'application qui à une matrice hermitienne  $K$  associe sa matrice complémentaire.

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & -\zeta \\ -\bar{\zeta} & \beta \end{pmatrix} \mapsto \tilde{K} = \begin{pmatrix} \beta & \zeta \\ \bar{\zeta} & \alpha \end{pmatrix}$$

6. Il y a même des vecteurs orthogonaux à eux-mêmes, par exemple tous les vecteurs des axes de coordonnées

Elle est donc la restriction à cet espace de l'endomorphisme de l'espace des matrices à deux lignes et deux colonnes :

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \tilde{K} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que pour tout couple de matrices hermitiennes ou même quelconques on a

$$(H|\mathcal{I}(K)) = (\mathcal{I}(H)|K)$$

si bien que l'inversion  $\mathcal{I}$  s'interprète comme un opérateur auto-adjoint pour cette forme quadratique fondamentale. Cet opérateur va jouer le même rôle que la symétrie de notre exemple précédent.

**La nouvelle forme.**

La forme bilinéaire induite par la forme quadratique  $q$  qui correspond au déterminant

$$q(A) = -\det(A),$$

est la suivante :

$$4 \langle A, B \rangle = \det(A - B) - \det(A + B).$$

Si l'on suppose la matrice hermitienne  $B$  inversible on peut écrire

$$\begin{aligned} 4 \langle A, B \rangle &= \det(B)[\det(B^{-1}A - I) - \det(B^{-1}A + I)] \\ &= \det(B)[\Phi_{B^{-1}A}(1) - \Phi_{B^{-1}A}(-1)] \end{aligned}$$

où  $\Phi_M(X) = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M)$  désigne le polynôme caractéristique de la matrice  $M$ .

Comme un polynôme du second degré prend les mêmes valeurs en 1 et en  $-1$  si et seulement si le terme de degré 1 est nul, on obtient le résultat suivant;

$$2 \langle A, B \rangle = -\det(B)\text{Tr}(B^{-1}A) = -\text{Tr}({}^t\text{com}(B) | A) = -(A | {}^t\text{com}(B)).$$

Le résultat précédent devient si l'on note, comme précédemment  $\mathbf{i} : z \mapsto \frac{-1}{\bar{z}}$ ,

$$-2 \langle A, B \rangle = (A|\mathcal{I}(B))$$

donnant alors en quelque sorte l'hérédité de l'orthogonalité sur les cercles.

**Exemples.**

**Cas de deux droites.**

L'équation normale d'une droite est

$$x \cos \theta + y \sin \theta + p = 0$$

qui s'écrit en coordonnées complexes

$$(z + \bar{z}) \cos \theta - \mathbf{i}(z - \bar{z}) \sin \theta + 2p = 0$$

donc (avec  $q = 2p$ )

$$ze^{-i\theta} + \bar{z}e^{i\theta} + q = 0$$

associée à la matrice  $A_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & q \end{pmatrix}$

Le produit scalaire mesuré entre deux droites s'obtient donc par

$$-2 \langle A_\theta, A_\phi \rangle = (A_\theta | \mathcal{I}(A_\phi)) = \text{Tr}(A_\theta^t \text{com}(A_\phi))$$

$$-2 \langle A_\theta, A_\phi \rangle = \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{0} & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & -e^{i\phi} \\ -e^{-i\phi} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = -2 \cos(\phi - \theta)$$

On retrouve donc l'angle entre les deux droites.

$$\langle A_\theta, A_\phi \rangle = \cos(\phi - \theta)$$

À noter que si l'on était resté avec le produit scalaire ordinaire on trouverait la somme des angles et non leur différence. Je pense que c'est la propriété d'anti-parallélisme qui est utile ici.

### Cas de deux cercles.

Si deux matrices hermitiennes représentent deux cercles de centres  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , on a

$$-2 \langle H_1, H_2 \rangle = (H_1 | \mathcal{I}(H_2)) = \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} 1 & -\zeta_1 \\ -\bar{\zeta}_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 & \zeta_2 \\ \bar{\zeta}_2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \beta_1 + \beta_2 - \zeta_1 \bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_2 \zeta_1.$$

Or

$$\beta_1 + \beta_2 - \zeta_1 \bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_2 \zeta_1 = \beta_1 + \beta_2 + |\zeta_1 - \zeta_2|^2 - |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2 = \omega_1 \omega_2^2 - R_1^2 - R_2^2.$$

Comme

$\mathbf{q}(H_1) = -\det(H_1) = -R_1^2$  et  $\mathbf{q}(H_2) = -R_2^2$  on pose  $\|H_1\| = R_1$  et  $\|H_2\| = R_2$  la quantité

$$\frac{\langle H_1, H_2 \rangle}{\|H_1\| \|H_2\|} = \frac{R_1^2 + R_2^2 - \omega_1 \omega_2^2}{2R_1 R_2}$$

représente «l'angle» entre les deux cercles. Si les cercles sont sécants en  $L$ , d'après l'égalité d'Al Kashi on a

$$\frac{R_1^2 + R_2^2 - \omega_1 \omega_2^2}{2R_1 R_2} = \cos \omega_1 \widehat{E} \omega_2$$

## Bibliographie

- [1] M. BERGER, 1979. *Géométrie*; 2 tomes, Nathan.
- [2] J. HADAMARD, 1949. *Leçons de géométrie*, 2 tomes,  
Ré-édition Jacques Gabay, 1988.
- [3] D. HILBERT et S. COHN-VOSSEN, 1952. *Geometry and Imagination*;  
Chelsea Publishing Company, New York.
- [4] L. SINÈGRE, juin 1999. *L'inversion*  
Dans *Aimer faire des maths au lycée n°6 IREM de ROUEN*.
- [5] F. VIVIEN, juin 1999. *La projection stéréographique*  
Dans *Aimer faire des maths au lycée n°6 IREM de ROUEN*.