DES ALGORITHMES EN GÉOMÉTRIE

Bernard DESTAINVILLE

IREM de TOULOUSE

1°- Par algorithme, nous entendons "**une suite finie de règles à appliquer, dans un ordre déterminé, à un nombre fini de données pour arriver, en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat, et cela indépendamment des données.**"
(*J.Hebenstreit-Encyclopœdia Universalis-vol 8 p. 1013*)

Nous sommes loin de la définition restrictive: "Tout procédé systématique de calcul" (*Grand Larousse Encyclopédique*), définition que l'on rencontre même dans plusieurs dictionnaires scientifiques.

Cette restriction s'explique historiquement par la nature des premiers travaux des arithméticiens grecs puis arabes. On ne peut ignorer en particulier l'œuvre d'Al Khwarismi (IX^e siècle) qui est à l'origine d'une identification cohérente du système décimal : la règle récurrente est le remplacement de dix unités d'un ordre par une unité de l'ordre immédiatement supérieur, ce qui est essentiel pour les techniques opératoires. Les pratiques à caractère algorithmique ne sont donc pas nées avec l'apparition de l'informatique.

Nous ne pouvons ignorer non plus les textes chinois des "neuf chapitres sur les procédures mathématiques", vieux de deux mille ans et récemment mis en valeur par Karine Chemla : les bureaucrates chinois utilisaient des procédures mathématiques et pratiquaient déjà les boucles itératives. Et puis, il y a les bouliers !

Dans le contexte général de la définition ci-dessus, élargie, dès que la pensée cherche à organiser un modèle complet de comportement, la mise en forme prend un caractère algorithmique qu'il est souhaitable de structurer. Des exemples :

- activité de tri ;
- fonctionnement d'une règle itérative ;
- construction d'un ensemble ;
- repérage d'un objet dans un ensemble ;
- balayage méthodique d'un ensemble.

La mise en forme de l'algorithme peut inciter alors à une recherche méthodique des bons critères de sélection, de l'itinéraire de balayage, de l'enchaînement des cas, des procédures à privilégier..., pour structurer dans les meilleures conditions, sans toutefois s'encombrer d'une technicité excessive à ce niveau de conception : si l'acteur de l'algorithme est un être humain, certaines actions bien maîtrisées ne nécessitent pas un développement : la rédaction des opérations à effectuer dépend de l'exécutant.

Notamment dans l'enseignement secondaire, la démarche algorithmique ne nécessite pas toujours un “affinage” informatisable, mais lorsque le problème s’y prête, le développement d’un algorithme incite à un approfondissement des données et des objectifs, des points d’attaque et des conclusions, des procédures et des enchaînements. Et la syntaxe algorithmique permet de structurer naturellement la mise en forme dans la langue maternelle.

2°- Certains problèmes géométriques se prêtent bien à ce type de modélisation qui est fonction de l’acteur, géomètre averti ou apprenti géomètre.

C’est le cas pour les activités proposées dans l’atelier à propos de deux problématiques importantes de la géométrie de l’espace :

- construire en vraies dimensions le patron d’un polyèdre ;
- dessiner la section d’un polyèdre convexe par un plan (IJK), sur une représentation en perspective cavalière.

Ces deux activités peuvent être complémentaires (voir 4°), dans la mesure où la section engendre deux nouveaux tronçons polyédriques qu’il est intéressant de matérialiser en carton ; on voit alors apparaître deux projets complémentaires :

- d’une part, réaliser correctement en perspective cavalière (ou projection cylindrique) la représentation de la troncature, pour mieux permettre l’analyse de la figure ;
- d’autre part, réaliser le patron de chacun des tronçons, afin de les matérialiser ; en particulier, la section qui constitue l’interface entre les deux tronçons est une face de chacun des deux patrons. Après montage des deux tronçons, il est possible de reconstituer le polyèdre initial en superposant ces deux faces.

Pour la réalisation du patron, la seule difficulté réside souvent dans la construction de cette interface, car il faut en calculer les dimensions, ce qui nécessite à nouveau des réflexions à partir de la représentation, seul support pour raisonner correctement.

Quant au pliage des patrons pour obtenir les deux tronçons, le choix du sens de pliage est indispensable pour que la reconstitution du polyèdre soit possible (voir 4°)

L’expérience prouve que ce travail est très motivant ; il est dans l’esprit des nouveaux programmes de Collège et de Seconde.

3°- Pour revenir aux algorithmes, il est important d’évaluer les nécessités d’affinage ; l’objectif est en effet de faciliter le travail ainsi programmé, en précisant les étapes, sans pour autant perdre l’acteur dans une technicité algorithmique hors de propos. Il faut aider à organiser sans égarer. Avec de jeunes élèves, il est possible de ne pas exagérer la quantité de consignes écrites, l’approfondissement des détails étant laissés à l’initiative de l’acteur.

a) algorithme 1 :

Dessiner la section d'un polyèdre convexe par un plan (IJK)
sur une représentation en perspective.

début

. choisir une face du polyèdre contenant au moins un point du plan, distinct d'un sommet ;

. déterminer l'intersection de la face avec le plan ;

tant que le polygone de section n'est pas complet **faire**

. choisir une nouvelle face contenant un seul point de l'intersection précédente ;

. déterminer l'intersection de cette nouvelle face avec le plan.

fin.

L'annexe I propose un algorithme plus raffiné.

Les contraintes qui apparaissent déjà ici permettent de mieux comprendre les exigences nécessaires à l'écriture de l'algorithme lorsque le champ des possibilités est étendu :

- pour le cas où le plan de section passe par un sommet du polyèdre, la première face choisie ne doit pas avoir seulement un sommet sur la section ;

- pour le cas où le plan de section contient une arête , une nouvelle face prise en compte ne doit pas contenir cette arête.

Ces types de contrainte peuvent évidemment être évités si l'on décide par exemple que les points I, J et K appartiennent à trois faces différentes, mais pour des élèves, il est formateur d'apprendre à discuter suivant les cas.

C'était toute la richesse des problèmes de construction.

Bien entendu, l'essentiel du travail géométrique reste à faire : **l'intersection de chaque face par le plan de section** (IJK). C'est la procédure à développer si l'on souhaite raffiner davantage.

Notons d'abord que si le plan est défini autrement, il est toujours possible de se ramener à cette situation.

D'autre part, il est nécessaire de déterminer deux points de l'intersection et une sous-procédure de la précédente est le problème de l'intersection d'une droite de (IJK) avec la face en cours. Suivant le niveau, on peut trouver des situations propices à la mise en œuvre des différents théorèmes d'incidence.

b) algorithme 2 :

Construire en vraies dimensions le patron d'un polyèdre.

début

. construire une arête du polyèdre ;

tant que toutes les faces ne sont pas construites **faire**

dessiner une face non construite qui a déjà une arête construite ;

. construire les onglets nécessaires au collage.

fin.

L'annexe II propose un algorithme plus raffiné.

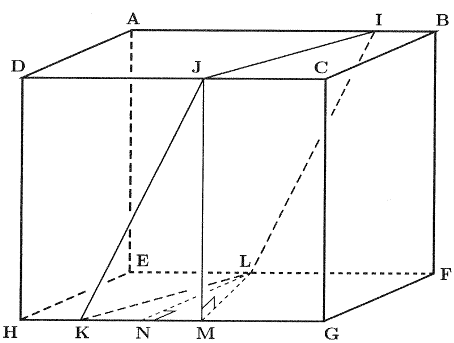
La construction d'un patron dépend de la nature du polyèdre, et des initiatives sont nécessaires, comme le choix de l'arête initiale ou de l'ordre dans lequel on dessine les faces ou les onglets de collage.

Mais il est bon en plus d'observer certaines règles pratiques :

- les arêtes à raccorder vont par paires de même nom ; il vaut donc mieux les nommer sur le patron pour repérer ces paires, et placer un seul onglet par paire ;
- en vue du montage du polyèdre à partir du patron, il vaut mieux prévoir une dernière face de grandes dimensions et sans onglets, de façon à rendre le collage plus aisé.

4°- Un problème exemplaire de partition d'un parallélépipède rectangle.

Énoncé : Dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ ci-dessous, $AB = 5$, $AD = 3$, $AE = 4$, les points I, J et K respectivement sur les côtés $[AE]$,$[DC]$ et $[HG]$ sont tels que $AI = 4$, $DJ = 3$ et $HK = 1$. Le plan (IJK) partage le parallélépipède en deux tronçons. Construire les patrons de ces deux tronçons ; fabriquer ces deux parties puis vérifier que leur juxtaposition permet de reconstituer le polyèdre initial.



Le plan (IJK) coupe le parallélépipède suivant un parallélogramme $IJKL$, et on peut prouver que les deux tronçons sont symétriques par rapport au centre O de ce parallélogramme. Les deux patrons sont donc eux aussi isométriques. afin de diagonaliser $IJKL$, le seul calcul nécessaire à la construction de cette interface est celui de la longueur de la diagonale JL ; avec les notations de la figure :

$$JL^2 = JM^2 + ML^2 = 4^2 + 1^2 + 3^2 = 26 \ ; \ \text{donc} \ JL \approx 5,1.$$

Si nous groupons les élèves par deux, chacun construisant un seul patron, il est possible de reconstituer le parallélépipède à deux, à condition d'avoir effectué les collages de façons symétriques pour obtenir deux tronçons symétriques (la symétrie de centre O est une isométrie négative) et non pas directement égaux ; c'est une belle sensibilisation, possible dès la Seconde: on n'obtient pas en général le même polyèdre selon que l'on plie le patron de ce polyèdre dans un sens ou dans l'autre.

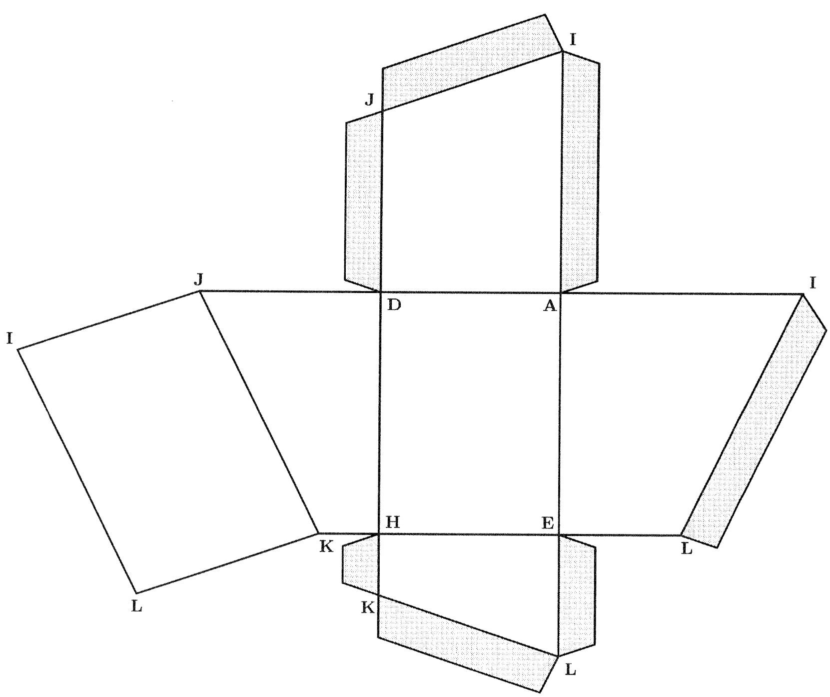
En conclusion :

Nous avons été incités à concevoir les algorithmes mis en œuvre dans cette étude à l'issue d'un stage sur la géométrie de l'espace, au cours duquel des collègues souhaitaient structurer leurs méthodes.

Les algorithmes, sans être trop lourds, peuvent en effet faciliter la formulation des différentes démarches.

A cet effet, il semble souhaitable de :

- ne pas se laisser aller à un raffinage excessif de l'algorithme ;
- donner un approfondissement seulement s'il paraît utile ;
- laisser des initiatives à l'intérieur de l'algorithme lorsque l'acteur est capable ("dessiner l'une des arêtes", "choisir une nouvelle face", ...) ;
- laisser des procédures à réaliser "à la main" lorsqu'elles sont simples ou que la réflexion correspondante est formatrice (rechercher la démarche la plus appropriée pour construire l'interface, ...).



Les nouveaux programmes insistent sur l'intérêt d'activités dans l'espace à propos des problèmes de section, tant du point de vue représentation que de celui d'une construction en vraies dimensions.

Il est effectivement formateur de proposer ainsi de réels projets avec des possibilités de travaux où interviennent notamment les règles d'incidence pour réaliser les sections, puis de vérifier l'exactitude de la représentation (une représentation en perspective est cohérente) ; la fabrication des polyèdres peut aussi donner lieu à des vérifications matérielles comme la réunion des deux tronçons ; enfin, comme nous l'avons entrevu au 4°, ce type d'activités prépare à des conceptualisations ultérieures.

Nous pensons que dans ce type d'activités, un algorithme peut contribuer à l'approfondissement des méthodes mises en œuvre.

Annexe I

Section d'un polyèdre convexe par un plan (IJK).

Hypothèse : chacun des trois points I, J et K appartient soit à une face, soit à une arête du polyèdre ; les points n'appartiennent pas tous les trois à une même arête ou à une même face.

Début

. choisir une face $\mathcal{F}$ du polyèdre contenant au moins un point de (IJK) , distinct d'un sommet ;

. déterminer les extrémités du segment intersection de (IJK) avec cette face $\mathcal{F}$. Une de ces extrémités est appelée point initial, l'autre second point ;

. tracer le segment d'intersection de (IJK) avec la face $\mathcal{F}$;

tant que le second point est différent du point initial, **faire**

début

. choisir une nouvelle face ϕ qui contient le second point sans contenir le segment;

. déterminer l'intersection de P avec la face ϕ ;

tant que l'intersection est un point **faire**

. choisir une nouvelle face ϕ qui contient le second point sans contenir le segment ;

. déterminer l'intersection de (IJK) avec la face ϕ ;

. appeler premier point le second point précédent ;

. appeler second point le point de la section situé sur une autre arête de la face ϕ ;

. tracer le segment d'intersection de (IJK) avec la face ϕ ;

fin

fin

Annexe II

Un algorithme pour la construction du patron d'un polyèdre.

Hypothèses de travail :
- le polyèdre est connu par une maquette ou une représentation en perspective ;
- les sommets du polyèdre sont nommés ;
- les dimensions du polyèdre sont connues.

Algorithme :

Début

. Dessiner l'une des arêtes et la nommer comme sur le polyèdre ;

tant que toutes les faces ne sont pas construite, **faire**

début

. choisir une face non construite qui a déjà une arête construite ;

si la face peut être construite à partir de l'arête, à l'aide d'une technique particulière

alors construire cette face à partir de l'arête ; **sinon**

début

. partager la face en triangles ;

. calculer les longueurs des côtés de chacun de ces triangles ;

. construire ces triangles successivement à partir des côtés déjà construits

fin ;

. nommer chaque arête construite comme sur le polyèdre

fin ;

pour chaque paire d'arêtes de même nom, **faire**

construire un onglet sur une seule des deux arêtes

fin.

Exemples de polygones de dimensions connues, constructibles à partir d'une arête donnée, à l'aide de techniques particulières :
- triangles ;
- rectangles ;
- trapèzes rectangles lorsque l'arête est un côté d'angle droit ;
- trapèzes isocèles lorsque l'arête est une des deux bases ;

Critères pour "choisir une face":
- anticiper sur la simplicité des constructions ultérieures ;
- le collage de la dernière face sera plus aisé si cette face est de grandes dimen-

sions ;

Critère pour "construire les onglets":

- il est préférable que la dernière face à coller ne présente aucun onglet.