

QUELLE PLACE POUR L'ALÉATOIRE EN COLLÈGE ?

Jean-Claude GIRARD, Michel HENRY, Jean-François
PICHARD

CII STATISTIQUE et PROBABILITÉS

Depuis sa création, la Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités s'est intéressée à l'enseignement des statistiques au collège et à l'enseignement des probabilités au lycée¹.

La problématique que nous avons choisi de présenter ici illustre la liaison entre probabilités et statistique et pose la question de l'introduction à l'aléatoire en collège.

Peut-on envisager un enseignement de l'aléatoire au collège ?

Comme chacun sait, est "aléatoire" ce que le hasard rend incertain. On peut remarquer à ce propos que les mots "hasard" et "aléatoire" sont absents des programmes du collège. Le mot "hasard" ne figure d'ailleurs pas davantage dans les programmes du lycée. On peut s'interroger sur ces absences qui font que les élèves aborderont l'étude des probabilités sans avoir rencontré les phénomènes aléatoires autrement que par leur expérience sociale. On peut se demander quelles conceptions naïves (justes ou erronées) ils se seront faites alors du hasard et quelles conséquences cela aura pour l'apprentissage des probabilités. N'y aurait-il pas intérêt à aborder en classe la notion d'aléatoire en parallèle avec l'initiation aux démarches statistiques, avant l'enseignement des probabilités ?

Depuis leur introduction dans l'enseignement secondaire, il y a de cela 30 ans environ, les probabilités et la statistique ont beaucoup . . . fluctué au gré des réformes successives² et actuellement, les probabilités ne sont introduites —au mieux— qu'en classe de Première. Par contre, la plupart de nos voisins européens entreprennent beaucoup plus tôt, c'est-à-dire dès le collège, une initiation à l'aléatoire. Nous nous sommes posé la question de savoir si une telle étude était envisageable en France et, si oui, sous quelle forme et dans quelles conditions.

On peut dégager deux pistes de réflexion que les recherches didactiques pourraient prendre en charge.

1. Peut-on envisager un contact plus précoce (par exemple en classe de Quatrième) avec des phénomènes aléatoires de divers types (lancers de punaise

1. Nous renvoyons au livre et aux deux publications sur ces deux sujets :

Enseigner les probabilités au lycée, IREM de Reims, Juin 1997.

Modélisation en probabilités, IREM de Besançon, Juin 1997.

Aides pour l'enseignement de la statistique au collège, IREM de Besançon, Septembre 1997.

2. Cf. l'article de Bernard Parzysz : *Les probabilités et la statistique dans le secondaire, d'hier à aujourd'hui*, dans *Enseigner les probabilités au lycée*, 17-38, éd. IREM de Reims, juin 1997.

ou d'osselets, tirages de boules, jeux de hasard, échantillonnage "au hasard" dans une population, etc...)? Cela permettrait d'engager à moyen terme une réflexion sur des questions telles que :

- l'imprédictibilité des résultats (on ne peut pas être sûr de ce qui va être obtenu),
 - la notion d'expérience aléatoire, comprise comme un protocole expérimental (comment s'assurer qu'on répète la même expérience? qu'appellera-t-on un «résultat»?...),
 - l'analogie entre répétition d'une expérience aléatoire et échantillonnage.
2. Comment introduire l'articulation constante entre prévision (donc modèle plus ou moins "naïf") et observation, permettant, à partir de l'étude de la fluctuation des résultats selon l'échantillon (imprévisibilité, certes, mais dans certaines "limites"), de déboucher sur la construction et l'étude de modèles mathématiques et sur la notion de probabilité, en prenant explicitement en compte le caractère plus ou moins arbitraire d'un modèle?

Aujourd'hui, il nous semble donc légitime de poser la question :

Y a-t-il une place pour l'aléatoire au collège?

Nous nous proposons de préciser le fonctionnement de connaissances de nature scientifique dans lesquelles une approche de l'aléatoire pourrait être envisagée, et d'en dégager quelques indications pour l'enseignement, illustrées par l'exemple du jeu de "Franc-Carreau"³, replacé dans le cadre générique des situations de Bernoulli⁴.

Le hasard et l'aléatoire, du quotidien à sa modélisation

Le hasard au quotidien

Les élèves des collèges vivent quotidiennement des situations hasardeuses. Ils rassemblent généralement sous ce vocable tout ce qui peut leur arriver qui soit imprévisible. Ils mélangent par là même diverses approches du hasard qui ne relèvent pas toutes de l'exploration scientifique. À ce niveau, et sans nous reporter aux conceptions apparues dans l'histoire, de la physique d'Aristote à la mécanique quantique en passant par Cournot, ou aux différences d'approches qui marquent divers champs de la connaissance⁵, nous pouvons distinguer :

- le hasard de la contingence, celui qui résulte d'un enchaînement unique de faits incontrôlables comme une rencontre accidentelle qui nous concerne personnellement, ce hasard mis en scène par Diderot dans *Jacques le fataliste*, et analysé par Aristote et Cournot,

3. Ce jeu du XVIII^{me} siècle consistait à jeter un écu sur un carrelage et à parier sur "Franc-Carreau", c'est-à-dire sur la réalisation de l'événement : l'écu ne rencontre aucun joint entre les carreaux.

4. Situations aléatoires où l'on ne considère que deux issues : "succès" ou "échec", non nécessairement équiprobables, bien sûr.

5. Voir pour cela l'excellent livre de poche : *Le hasard aujourd'hui*, coordonné par Emile Noël, éd. Seuil, 1991.

- le hasard issu des aléas des prises de décisions humaines insondables, comme les choix stratégiques d'un joueur d'échecs, ou selon certains élèves de l'évaluation par tel ou tel enseignant de leurs productions,
- le hasard de l'indéterminabilité de l'évolution de phénomènes sensibles comme la météo à long terme (le fameux effet papillon) ou l'évolution des cours de la bourse, les positions à venir d'une particule dans un mouvement brownien ou la transmission héréditaire de facteurs génétiques,
- le hasard des générateurs de hasard, ces objets manipulables à volonté, fabriqués pour cela, comme des dés, cartes, urnes de loto, roulettes pour des phénomènes porteurs d'équiprobabilité «quelque part»⁶, ou punaises, pendules magnétiques et chaotiques pour d'autres, générateurs de non équiprobabilité,
- le hasard des comportements des populations statistiques, celui des compagnies d'assurance, des files d'attente, des pannes dans une technologie complexe, des épidémies ou des phénomènes démographiques,
- le hasard des prélèvements "au hasard" dans une population, à partir de tables de nombres au hasard ou des données pseudo-aléatoires d'un ordinateur ...

Quelles perceptions les élèves de collèges en ont-ils ? Quels rapports entretiennent-ils avec les phénomènes hasardeux et quels sont leurs comportements dans ces situations ? Quelle éducation au hasard à l'école ?

Reconnaissons que celle-ci est aujourd'hui en France quasi-nulle. À la différence de nombreux pays étrangers, nous vivons encore l'époque où le déterminisme de Laplace⁷ règle l'enseignement scientifique. Nous nous privons ainsi de l'introduction à l'âge le plus réceptif de concepts permettant la description et l'interprétation rationnelle des situations où le hasard intervient. Cette partie importante des outils modernes de pensée est renvoyée à la fin du secondaire, dans des conditions où ils sont l'objet du rejet de la majorité des élèves.

Peut-on espérer une évolution décisive des programmes des collèges dans ce domaine à moyen terme ?

La perception pratique de l'évolution d'une situation aléatoire.

Il s'agit pour les enfants de savoir reconnaître les situations où le hasard intervient dans des conditions bien précises, quand l'évolution du phénomène observé peut donner lieu dans ces mêmes conditions à diverses issues remarquables, d'avance bien identifiées. Nous parlerons alors de phénomène ou processus aléatoire, pour le distinguer du hasard de la contingence.

Le deuxième concept qui s'introduit naturellement est celui d'événement. Il s'agit de savoir repérer les issues de la situation aléatoire qui "réalisent" une certaine attente. FERMAT les appelait les "*chances*" parmi les "*hasards*". LAPLACE parlait d'"*issues*"

6. Cela veut dire que l'on peut décrire les issues (observables) à partir d'un système fini de cas pour lesquels on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité.

7. "*Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre*". Essai philosophique sur les probabilités, 1812.

favorables" et d'*"issues possibles"*. Le terme de "chance" introduit une composante psychologique forte à l'âge des enfants du collège qu'il faudra gérer : la "chance" relève de l'équation personnelle, de la "bonne étoile", plutôt que de l'enchaînement objectif de faits aléatoires.

Lorsque les issues sont bien repérées, elles font l'objet d'une approche naïve que nous qualifierons de "pré-probabilité", entachée du "biais d'équiprobabilité" : quand aucune indication particulière sur les degrés de possibilités des issues résultant d'une situation aléatoire n'est donnée, il arrive que toutes les issues soient perçues a priori comme équiprobables. Il en est ainsi logiquement pour les boules tirées d'une urne par "une main innocente", mais de nombreux élèves transposent cette équiprobabilité sur la couleur à venir, quelle que soit sa représentation dans l'urne. "*Tous les hasards sont égaux*" disait Fermat⁸ et le nombre de "chances" qui réalisent un événement attendu détermine son "degré de certitude", selon la définition de Bernoulli⁹ de la probabilité. Mais quel traitement faire des "hasards inégaux" comme celui qui est engendré par le jet d'une punaise qui peut tomber sur sa pointe ou s'immobiliser sur sa tête?

Comment invalider le raisonnement de d'Alembert dans l'article *Croix ou Pile* de l'Encyclopédie (1751-1772) qui attribue deux chances sur trois à l'événement : obtenir un "pile" en au plus deux jets d'une pièce, expliquant que les issues favorables sont "pile" au premier jet, et "face" puis "pile" au premier et second jets, alors qu'il n'y a qu'une issue défavorable : "face" suivi de "face"?

Quelle description et quelle compréhension proposer du phénomène de stabilisation des fréquences d'une issue lorsque l'on répète la même épreuve aléatoire un grand nombre de fois, face à cet autre biais de l'interprétation erronée de la loi des grands nombres qui fait croire à certains élèves qu'après une série de "piles", la même pièce a plus de chances de tomber sur "face"?

Bref, pour résumer :

Quelle familiarité avec l'aléatoire faire vivre au collège?

Notre réponse didactique à ces questions, et à d'autres, réside dans l'élaboration de modèles descriptifs de situations aléatoires et des concepts de base comme ceux d'expérience aléatoire, d'issues et d'événements, et d'une approche objective et expérimentale de la probabilité.

Élaboration d'un modèle descriptif et notions de base.

a Notions d'expérience aléatoire et d'issue. Nous appellerons "expérience aléatoire" un processus expérimental :

déterminé par un protocole, mis en œuvre et contrôlé par un expérimentateur,

8. Lettre à Pascal du 25 septembre 1654.

9. Jacques Bernoulli (1654-1705) dans *Ars Conjectandi* (publié en 1713) : "*La probabilité est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout*".

- reproductible “dans les mêmes conditions”,
 – où le hasard intervient pour déterminer le résultat expérimental.

L'observation raisonnée de ce résultat suppose que l'on soit en mesure de donner de manière exhaustive la liste des issues possibles auxquelles on souhaite affecter tous les résultats envisageables de l'expérience. Ainsi, nous distinguons le résultat expérimental, état du système observé à l'aboutissement du processus aléatoire, de l'issue réalisée par ce résultat, observable ou non, mais déterminée sans ambiguïté parmi toutes les issues possibles qui ont été envisagées dans le protocole expérimental.

La description d'une expérience aléatoire fait entrer les élèves dans un processus de modélisation : l'expérience aléatoire est décrite par un protocole qui lui donne un statut générique, permettant de la répéter. Les objets mis en œuvre sont idéalisés : les dés ou les pièces deviennent parfaits, les boules “indiscernables au toucher”, de manière à valider dans ces exemples l'hypothèse d'équiprobabilité.

b Notions d'événement et de probabilité.

La notion d'événement est alors conçue au sein de ce modèle dans un cadre ensembliste : un événement est assimilé à la famille des issues qui le réalisent.

Les élèves sont ensuite conduits à une étape de transition entre la perception naïve des «chances» qu'ils attribuent à des événements simples et la compréhension la plus élémentaire de la notion de probabilité dans des situations d'équiprobabilité assimilables au tirage d'une boule dans une urne de Bernoulli¹⁰.

Dans une telle situation, on observe que les élèves assimilent généralement sans difficulté les “chances” de tirer une boule d'une certaine couleur à la proportion des boules de cette couleur dans l'urne¹¹.

Nous appellerons cette première approche : “pré-probabilité”. C'est le degré de la certitude de Jacques Bernoulli. C'est aussi le *rapport du nombre des issues favorables à celui des issues possibles* selon la définition donnée en premier principe par Pierre Simon Laplace.

Cette approche peut donner lieu à une définition, et en ce sens introduire un concept nouveau. C'est aussi une définition “en acte” au sens de Gérard Vergnaud, naturelle, mais naïve, incomplète et insuffisante à long terme. Mais elle fait le lien entre une perception sensible (les chances d'obtenir une boule blanche ...) et un concept théorique (une fraction plus petite que 1 égale au rapport du nombre des boules de la couleur donnée au nombre total des boules dans l'urne, lesquelles sont équiprobables dans l'urne idéale de Bernoulli).

10. Urne contenant des boules de deux couleurs dont la caractéristique probabiliste est entièrement déterminée par la proportion des boules de chacune des deux couleurs.

11. Cette assimilation chances-pré-probabilité que l'on peut attendre des élèves placés dans une situation aussi épurée que l'urne de Bernoulli, est une des hypothèses essentielles dans ce processus d'apprentissage que les recherches en didactique devraient conforter.

L'introduction de cette définition à ce moment-là de l'apprentissage permet de pointer et de faire rejeter par certains élèves l'obstacle que de nombreuses recherches ont mis en évidence : ces élèves pensent qu'on a d'autant plus de chances de tirer une boule blanche dans une urne que le nombre de ces boules blanches est grand, même si la proportion de ces boules dans l'urne ne change pas. On peut rapprocher cette conception de celle que l'on rencontre parfois à propos des angles, perçus comme d'autant plus grands que leurs côtés représentés sur un dessin sont plus longs.

Ainsi, de la même manière qu'en géométrie, l'introduction de ces quelques concepts théoriques proches de la réalité perceptible apporte aux élèves un vocabulaire et des outils de pensée leur permettant d'entrer dans le fonctionnement de modèles : analyser, structurer, simplifier, comprendre, expliciter, formuler, relier, inférer, contrôler, prédire. Ces concepts relèvent de définitions et de propriétés. Ils entrent dans des systèmes de représentations symboliques et interviennent dans les énoncés de théorèmes. Ils ont toutes les qualités requises pour être des objets mathématiques. Au collège, ces quelques notions sont suffisantes pour fournir les outils de description et de compréhension des situations aléatoires simples de la réalité qui peuvent leur être soumises.

Dans un deuxième temps, on peut passer à un niveau supérieur de compréhension de cette notion de probabilité par la mise en place de situations expérimentales propres à l'observation de la stabilisation des fréquences et permettant d'attribuer à la probabilité le statut objectif de représenter cette stabilisation. Le jeu du Franc-Carreau, que Jean-François Pichard va présenter ensuite, offre une manipulation intéressante pour les élèves, elle donne un bon exemple d'une telle situation expérimentale. Dans ce type de situations où l'on se place dans un cadre géométrique, l'ordinateur est un formidable outil de simulation qui rend maintenant accessible aux élèves des collèges l'observation pratique de la stabilisation des fréquences.

L'origine du calcul des probabilités et le jeu du Franc-Carreau pour une expérimentation

L'incertitude, le hasard, interviennent très souvent dans la vie quotidienne, même pour des enfants d'un très jeune âge. Associé à la statistique, le calcul des probabilités est une clé primordiale, essentielle, pour analyser et comprendre les phénomènes incertains. Aussi, et en raison du fait que la plupart des enseignements scientifiques durant la scolarité obligatoire sont donnés dans un cadre déterministe laplacien, il nous semble important de commencer une introduction à l'aléatoire dès le collège, ce qui peut se faire en parallèle avec l'étude de la statistique descriptive.

Pour valider la possibilité d'une telle initiation, nous avons mené plusieurs expérimentations, en classe de 5e, à partir d'épreuves aléatoires dont les résultats étaient utilisés pour traiter les notions statistiques du programme. Nous avons de ce fait introduit les notions de hasard, de variabilité, d'indépendance, et une étude empirique de la loi des grands nombres par stabilisation des fréquences pour faire évaluer la probabilité d'un événement. Il semble que les enfants ont une bonne approche intuitive de ces notions, sauf de l'indépendance.

Mais y a-t-il un ordre préférentiel pour introduire les différents domaines des mathématiques, et en particulier ici, le calcul des probabilités et la statistique?

Pour commencer, replongeons-nous dans l'histoire pour voir comment ces deux disciplines sont apparues. A l'origine du calcul des probabilités, il y a d'abord des jeux concernant des ensembles finis, avec des astragales, pièces, dés, etc. . . , pour lesquels les répétitions de lancers sont des épreuves semblables (les chances de chaque éventualité restent les mêmes) et indépendantes; puis les jeux de cartes et tirages sans remise dans une urne pour lesquels les probabilités sont conditionnées par les résultats qui précèdent.

Cependant, l'assignation de valeurs aux chances d'obtention des différents résultats n'est pas basée sur la constatation empirique, qui aurait conduit à la statistique, comme c'est manifeste pour l'étude de l'astragale qu'a faite Jérôme Cardan¹² dans le premier livre écrit sur les jeux de hasard, *Liber de ludo aleae* (environ 1560, mais publié seulement en 1663), où il attribue les mêmes chances aux quatre faces sur lesquelles l'astragale peut se stabiliser, ce qui est grossièrement faux. L'hypothèse que chaque face d'un polyèdre a la même chance de se présenter semble être une idée très ancienne, elle a été adoptée naturellement par Cardan dans le premier écrit connu, et est adoptée par les élèves en présence de solides à peu près réguliers et homogènes, par exemple des cubes (dés).

On voit ainsi que, dès le tout début, l'émergence du calcul des probabilités est venue d'une abstraction des objets utilisés, une "géométrisation du hasard" comme l'a dit Blaise Pascal en 1654¹³. Pour ces jeux, qui ont un ensemble fini d'éventualités, on assigne des valeurs aux probabilités des événements¹⁴ en se basant sur l'hypothèse que chaque côté a la même chance de se produire (*"les hasards sont égaux"* de Fermat), appelée principe d'indifférence ou de raison insuffisante par Leibniz (vers 1678) ou d'égalité facilité par Bernoulli (1713) et Laplace (1774).

Comme l'écrit Bernoulli¹⁵:

"Pour faire une conjecture correcte sur n'importe quel événement quel qu'il soit, il est nécessaire seulement de calculer exactement le nombre des cas possibles, et alors de déterminer combien il est plus vraisemblable qu'un cas se produira qu'un autre. Mais ici aussitôt survient notre difficulté principale, car cette procédure n'est applicable qu'à seulement très peu de phénomènes, et presque exclusivement à ceux en rapport avec les jeux de hasard".

12. Il avait pourtant fait beaucoup d'expérimentations, étant un joueur invétéré, cf. "Cardan, Ma vie", Belin, 1991, et le *Liber de ludo aleae*.

13. Dans sa célèbre adresse à l'Académie Parisienne de Mathématiques Le Pailleur. Traduction précise du texte latin dans : *Blaise Pascal, Œuvres complètes*, tome II, de Jean Mesnard, éd. Desclée de Brouwer.

14. A. Arnauld et P. Nicolle, dans la *Logique, ou l'Art de penser* (1662), dite Logique de Port-Royal, introduisent le terme "degré de probabilité" comme rapport des chances.

15. *Ars conjectandi* (1713), d'après "Jacques Bernoulli & l'*Ars conjectandi*", trad. N. Meunier, IREM de Rouen, 1987.

On peut dire que le calcul des probabilités, dès le *XVII^{ème}* siècle et au *XVIII^{ème}* est relié à l'arithmétique (les probabilités sont des nombres rationnels), ou même à l'arithmétique infinie (i.e. les séries) quand on s'intéresse, pour le cas le plus simple d'une pièce, au nombre de lancers nécessaires pour obtenir Pile pour la première fois (J. Bernoulli, 1685, puis Leibniz). L'ensemble des valeurs possibles est alors $\mathcal{N}^*$, qui est infini dénombrable.

On remarquera ici que, à l'encontre de la géométrie où on ne peut parler des inventeurs en tant qu'hommes, ainsi que le déplorait J.C. Duperret, on connaît un peu la vie et même le visage des inventeurs du calcul des probabilités : Cardan (*XVI^{ème}* siècle), Fermat et Pascal, puis Huygens (*xvii^{ème}* siècle), J. Bernoulli (fin *xvii^{ème}* siècle), etc.¹⁶...



Ci-dessous :

Christiaan Huygens (1629-1695).

Auteur du premier écrit **publié** sur le calcul des probabilités.

Gravure extraite de

Histoire des Mathématiques

de J. P. Collette, éd. Vuibert, 1979.

Ci-dessus : Gerolamo Cardano ou Jérôme Cardan (1501-1576).

Auteur du premier écrit **connu** sur le calcul des probabilités.

Gravure extraite de

Cardan, ma vie, éd. Belin.



16. Voir l'article : J. F. Pichard, "Les probabilités au tournant du *xvii^{ème}* siècle", dans l'ouvrage de la commission inter-IREM "Stat et Probas" : *Enseigner les probabilités au lycée*, éd. IREM de Reims, 1997.

Ci-contre :

Jakob Bernoulli (1654-1705). Auteur du premier théorème limite en calcul des probabilités.

Portrait présenté au musée de Bâle, reproduit dans

Jacques Bernoulli et l'ars conjectandi, éd. IREM de Rouen 1987.



Le passage aux probabilités géométriques va se faire à propos d'un jeu inventé par Buffon¹⁷, le jeu du Franc-Carreau¹⁸, qui a servi de base à nos expérimentations en collège, à l'IREM de Rouen et à Grenoble pour la recherche que présentera Michel Henry ensuite.



Ci-dessus :

Georges L. Leclerc, comte de Buffon (1717-1788).

Frontispice de l'édition de 1855.

Le jeu du Franc-Carreau et le jeu de l'aiguille ont été donnés par Leclerc dans un mémoire de 1733 pour être admis membre de l'Académie Royale des Sciences. Le texte en est connu uniquement par sa publication dans *Essai d'Arithmétique Morale de Buffon en 1777*.

Dans la pratique, les règles du jeu doivent être précisées : de quel endroit peut-on lancer l'écu ? Comment lève-t-on les ambiguïtés (écu tangent aux joints) ?

17. G.L. Leclerc, comte de Buffon, a commencé à signer ses écrits : "Leclerc", puis "Leclerc de Buffon" vers 1735, puis seulement "Buffon".

18. Le jeu de Franc-Carreau et le jeu de l'aiguille consistaient donc à lancer un objet (un écu, une aiguille) au-dessus d'un carrelage ou d'un parquet. Les joueurs pariaient sur la position finale de l'objet : sur un seul carreau (à franc-carreau) ou une seule lame de parquet, ou à cheval sur un ou plusieurs joints ? Dans le cas de l'aiguille, le calcul des probabilités en jeu fait appel à l'analyse infinitésimale, laquelle était relativement récente à cette époque.

Mais Buffon pose le problème en termes plus abstraits : peut-on assigner une probabilité à l'événement "Franc-Carreau", faisant abstraction du joueur impliqué ? On est alors conduit à traduire en termes géométriques les différentes positions possibles pour le centre de l'écu dans les différents carreaux du carrelage. On voit bien que l'événement "Franc-Carreau" est réalisé dès lors que le centre de l'écu vient à une distance de tout joint strictement supérieure à son rayon. Quel lien y a-t-il entre les aires délimitées sur les carreaux par la condition géométrique précédente et la probabilité de "Franc-Carreau" ?

Il est remarquable, ici encore, que l'on puisse assigner des valeurs aux probabilités des événements par un principe d'égale facilité. Pour le jeu du Franc-Carreau, le lancer au hasard d'une pièce ronde sur un sol dallé, des domaines assez réguliers (triangles, rectangles, etc. . .) de même surface ont la même "chance" d'être touchés.

Un autre intérêt de l'introduction des probabilités géométriques est qu'on arrive, "d'une façon naturelle", à des valeurs théoriques non nécessairement rationnelles pour les probabilités. Par exemple, le nombre π intervient dans la probabilité que l'aiguille ne rencontre aucune rainure du parquet.

Lors de l'expérimentation¹⁹, menée dans des classes de Cinquième, nous voulions, entre autre, faire observer aux élèves la variabilité des résultats obtenus d'un groupe à l'autre et leur faire évaluer la valeur de la probabilité de "Franc-Carreau" en mettant en évidence la stabilisation des fréquences, sans qu'ils aient de façon intuitive une idée de cette valeur, la valeur attendue étant moins facilement perçue que dans le cas d'une pièce ou d'un dé. De plus, le jeu du Franc-Carreau est facile à mettre en œuvre en utilisant des pièces et des feuilles avec des tracés de grands carreaux.

Cette expérimentation a montré clairement qu'une introduction à l'aléatoire peut être faite au collège, comme c'est au programme dans d'autres pays européens (Allemagne, Angleterre, Espagne, . . .)²⁰.

L'observation des fréquences : élargissement du concept de probabilité, les probabilités géométriques .

La stabilisation des fréquences.

On répète une même expérience de Bernoulli²¹ un grand nombre de fois. La suite des "succès" et "échecs" est parfaitement aléatoire, mais on observe que la fréquence des succès tend à se stabiliser au voisinage de la valeur p , la probabilité du "succès"²². Ce phénomène naturel, une des lois du hasard appelée "loi des grands

19. *Une activité probabiliste au Collège, le jeu du Franc-Carreau*, groupe Statistique, IREM de Rouen, 1996

20. *Statistique au collège, leur enseignement en Europe*, groupe statistique, IREM de Rouen, 1994.

21. Expérience aléatoire où on ne considère que deux issues : "succès" ou "échec", la probabilité de "succès" est donné par p . Une telle expérience est modélisée par le tirage "au hasard" d'une boule d'une urne de Bernoulli où la proportion de boules blanches représente le succès égale à p .

22. On pourra se reporter à l'article de Repères-IREM n° 6 : *L'enseignement des probabilités dans le programme de Première*, Annie et Michel Henry, 1992

nombres", est tout simplement dû au calcul de la fréquence comme quotient du nombre s des succès par le nombre n des expériences. Quand n est grand, le résultat de la $(n+1)$ ème expérience n'a que peu d'influence sur ce quotient, ce qui induit cette sorte de "stabilisation". Ce qui est remarquable, c'est que cette suite de fréquences semble converger vers la probabilité p .

En réalité, la définition de p comme proportion des boules blanches dans l'urne modèle de Bernoulli est une définition qui porte en elle ce résultat et qui conduit au premier théorème limite en probabilités, dû à Bernoulli²³. Ce théorème, qui découle des définitions ainsi introduites, reflète bien un phénomène naturellement observé, permettant à la plupart des individus de "supputer" les chances qu'ils ont d'obtenir un «succès» en une seule expérience. Cette définition s'impose donc naturellement, si l'on veut rendre compte dans le modèle mathématique de cette propriété de stabilisation des fréquences. Toute autre définition de la valeur d'une probabilité (par exemple le nombre des "chances" qui réalisent un événement, ou encore le rapport de celles-ci aux cas défavorables, comme cela a d'abord été proposé) ne conduirait pas à un énoncé aussi simple de la loi des grands nombres. Ce théorème a donc pour signification de valider le modèle probabiliste comme adéquat pour représenter (à ce niveau élémentaire) une certaine réalité aléatoire.

Ce phénomène de stabilisation est bien compris par les adolescents qui jouent aux dés par exemple. Il est mis à profit par les parieurs pour apprécier si les enjeux d'un pari sont équitables, quand ils ne peuvent calculer d'avance la probabilité de l'emporter.

Remarquons qu'historiquement, c'est l'étude de la répartition des mises dans un jeu de "pile" ou "face" interrompu qui a amené Pascal et Fermat à jeter les bases du calcul des probabilités en 1654. Mais dans ce "problème des partis", la probabilité qu'a un joueur de gagner en n coups peut être calculée par avance (la géométrie du hasard) par dénombrement des suites possibles de pile ou face qui auraient pu intervenir si la partie n'avait pas été interrompue.

Le calcul a priori d'une probabilité par dénombrements ne semble pas être envisageable pour des "probabilités géométriques" où le hasard intervient dans des situations mettant en jeu des objets géométriques continus, comme dans l'exemple célèbre de l'aiguille de Buffon, jetée sur un parquet²⁴. Dans ces situations de probabilités géométriques, on peut estimer la probabilité cherchée par la fréquence stabilisée de l'événement, à condition de pouvoir effectuer réellement ou par simulation l'expérience proposée et la recommencer un grand nombre de fois (en réalité, plusieurs centaines).

23. Pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité que la fréquence observée à la n -ième expérience se situe entre $p - \varepsilon$ et $p + \varepsilon$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

24. La probabilité qu'une aiguille de longueur l , jetée au "hasard" sur un parquet dont les lames sont de largeur $a > l$, tombe en travers d'une rainure, vaut $\frac{2l}{\pi a}$. Encore faut-il préciser ce qu'on entend par "au hasard", ce qui est la difficulté des probabilités géométriques, comme l'a souligné Joseph Bertrand en 1899. Voir l'article "Paradoxes et lois de probabilités" d'Henri Lombardi et Michel Henry - *REPÈRES-IREM* n°13 - octobre 1993.

Cette notion de probabilité repose sur une hypothèse de modèle. Dans les cas les plus simples, une hypothèse d'uniformité (ou d'égale facilité) peut donner du sens à la locution "au hasard" : des domaines géométriques bornés de même aire ont la même "chance" d'être atteints "au hasard". On peut faire ainsi l'estimation de l'aire d'une figure par la méthode (peu performante) de Monte-Carlo qui consiste à saupoudrer la partie du plan contenant cette figure par des points "choisis au hasard" et à compter le nombre de ceux qui tombent dedans.

Mais la réalisation concrète d'une telle expérience suppose de faire des choix dans le dispositif expérimental, de manière à matérialiser l'intervention du hasard. L'adéquation entre la valeur théorique de cette probabilité, inhérente au choix du modèle, et la fréquence stabilisée observée, ne peut être réalisée que dans la mesure où le dispositif expérimental correspond bien aux hypothèses de modèle.

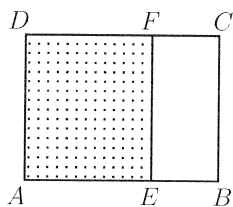
La méthode de Monte-Carlo repose donc sur une interprétation fréquentiste de la notion de probabilité. Du point de vue didactique, elle se conçoit concrètement dans le cadre de la simulation informatique, transformant une expérience de pensée en des instructions données à l'ordinateur, qui obligent à bien préciser les hypothèses de modèle introduisant l'uniformité quelque part.

L'ordinateur est alors un outil merveilleux pour l'observation des fréquences, particulièrement dans un cadre géométrique qui parle bien aux élèves par les images qu'il peut produire. Mais l'introduction d'expériences aléatoires dans un tel cadre pose une question didactique :

Comment amener les élèves à faire le lien entre la définition de la probabilité donnée par Laplace, interprétant l'approche naturelle de pré-probabilité induite par l'urne de Bernoulli, et cette notion de probabilité géométrique, tout en les reliant à l'observation des fréquences ?

La situation du jeu de Franc-Carreau permet précisément de faire ce lien. C'est en particulier l'objet d'une recherche didactique en cours à Grenoble, s'inscrivant dans l'environnement de Cabri-Géomètre. L'idée de base que cette recherche a pu expérimenter, présentée dans le paragraphe suivant, est de discrétiser les surfaces intervenant dans la détermination d'une probabilité géométrique par le biais des pixels, constituants élémentaires des images informatiques.

L'urne à pixels.



La réponse proposée dans cette recherche est l'introduction d'une urne à pixels.

Sur l'écran de l'ordinateur, on a dessiné le rectangle fixe $ABCD$.

Le segment $[EF]$ parallèle à (AD) peut être placé dans une position variable, délimitant ainsi l'aire du rectangle $AEFD$ dans un rapport p avec l'aire de $ABCD$.

Remarquons que p est aussi le rapport des longueurs AE/AB .

Le générateur de nombres aléatoires de l'ordinateur fournit des couples de coordonnées, plaçant des points "au hasard" dans $ABCD$. Si un point tombe dans $AEFD$, c'est un "succès".

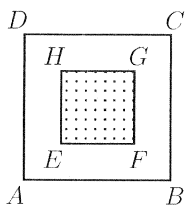
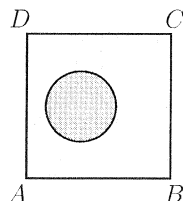
En fait l'ordinateur désigne au hasard dans $ABCD$ l'un des pixels, ces petits carrés élémentaires qui tapissent l'écran. Si un tel pixel représente l'unité d'aire, l'aire de $ABCD$ est, d'après la définition introduite à l'école primaire, le nombre de pixels qui composent ce rectangle.

Ce tirage au hasard d'un point dans $ABCD$ s'apparente donc au tirage au hasard d'une boule dans une urne de Bernoulli. L'analogie devient parfaite si l'on considère que les points proposés par l'ordinateur ont les dimensions des pixels. Le nombre de pixels contenus dans $AEFD$ détermine l'aire de ce rectangle et représente le nombre de boules blanches de l'urne de Bernoulli. Le rapport p des aires de $AEFD$ à $ABCD$ est donc aussi la probabilité de tirer une boule blanche, c'est-à-dire que l'ordinateur désigne un pixel de $AEFD$. L'urne à pixels est donc un outil de simulation d'une urne de Bernoulli, ou de toute expérience aléatoire à deux issues, immédiatement accessible aux élèves et réalisant le lien conceptuel entre pré-probabilité et probabilité géométrique. Les performances de l'ordinateur permettent alors un contrôle fréquentiste des probabilités géométriques. On a choisi d'en faire l'application en classe avec le jeu du Franc-Carreau.

Le jeu de Franc-Carreau sur ordinateur.

Il est essentiel que les élèves manipulent le hasard avec différents générateurs, équiprobables ou non. Pour s'initier au jeu du Franc-Carreau, ils doivent pouvoir jeter eux-mêmes un disque sur un carrelage pour observer les régularités naissantes. L'enjeu peut être pour eux de comparer différentes aires de jeu, avec des tailles différentes pour le disque et le carrelage, afin de choisir le jeu qui leur soit le plus favorable. Mais le jeu devient vite fastidieux. La situation ayant été simulée sur l'ordinateur, cet outil s'impose naturellement.

Pour la simulation informatique, le lancer d'un disque au hasard revient à choisir le pixel qui en sera le centre. Le programme sur Cabri s'occupe du reste : construction du cercle de rayon donné et repérage des points d'intersection de ce cercle avec les côtés du carré $ABCD$, qui représente le carreau atteint.



Après une solution expérimentale au problème du choix entre plusieurs configurations, les élèves sont amenés à envisager une solution géométrique introduisant la notion de probabilité géométrique.

Le carré $ABCD$ a pour côté a , le disque est de rayon r . Un succès est obtenu si et seulement si le centre du disque se trouve à l'intérieur du petit carré $EFGH$ de côté $a - 2r$.

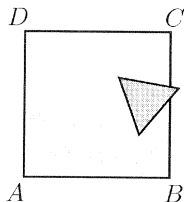
Comme pour l'urne à pixels, la probabilité de choisir au hasard un point de ce carré est égale au rapport des aires de $EFGH$ à $ABCD$, soit $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$.

Les surfaces des deux carrés sont ainsi "discrétisées" par les pixels les recouvrant, assimilés à de petits carrés unités élémentaires. Les nombres des pixels remplissant chacun de ces carrés peuvent être pris pour mesures de leurs aires respectives. Le choix au hasard d'un pixel dans le carré $ABCD$ est alors assimilé au choix au hasard d'une boule dans une urne de Bernoulli, les boules de la couleur gagnante étant représentées par les pixels du carré $EFGH$.

Si la relation entre l'expérience informatique et le modèle d'urne de Bernoulli est comprise, les élèves ont franchi un grand pas dans la compréhension des concepts de base en probabilité.

Le jeu du triangle.

Lorsque le lien entre probabilité géométrique, calculable d'avance par un rapport d'aires connues, et l'estimation fréquentiste de la probabilité d'un succès dans le cadre d'une simulation est bien compris, on peut poser un problème de probabilité géométrique non accessible au raisonnement a priori²⁵.



On remplace le disque par un triangle, ou tout autre polygone dont l'orientation aléatoire introduit un deuxième degré de liberté dans le problème et une réelle difficulté pour la résolution géométrique, à supposer que cette orientation soit uniforme sur $[0, 2\pi]$.

Seule la répétition de l'expérience simulée un grand nombre de fois permet alors aux élèves de choisir la meilleure configuration entre plusieurs proposées, pour avoir le plus de chances de gagner à ce Franc-Carreau généralisé.

Cette résolution par estimation expérimentale de la probabilité cherchée permet alors de construire l'urne à pixels modélisant ce jeu. La notion d'expériences de Bernoulli équivalentes est ainsi en place, qui conduit à la compréhension abstraite de la notion de probabilité. Celle-ci pourra alors être définie sans problème au lycée dans toute sa généralité comme un nombre compris entre 0 et 1, qui décrit le degré de possibilité d'un événement associé à une expérience aléatoire, et qui formellement est défini de la manière qui suit.

Vers l'introduction du concept mathématique de probabilité.

Mathématiquement, les issues possibles de cette expérience sont représentées par les éléments d'un ensemble référentiel Ω (ou univers) dont les parties décrivent tous les événements qui peuvent résulter de l'expérience. La définition de cet ensemble Ω dépend du problème posé et du degré de simplicité que l'on désire. La réalisation

25. Buffon a entrepris un tel problème en son temps, dont la résolution utilise des outils mathématiques sophistiqués (calcul intégral).

d'une issue est donc représentée par le choix dans Ω d'une partie réduite à un élément, appelée "événement élémentaire".

À chaque événement élémentaire est associée la probabilité de l'issue qu'il représente. Celle-ci peut être déterminée par une hypothèse d'équiprobabilité si l'expérience la permet exactement ou par approximation, ou encore par une valeur approchée provenant d'une estimation expérimentale par une fréquence stabilisée, ou bien par une donnée subjective fournie par un spécialiste ou appréciée a priori comme hypothèse de modèle, ou par tout autre moyen (ajustement d'une loi par exemple ...). Cette famille des probabilités élémentaires associées aux éléments de Ω constitue ce qu'on appelle la "distribution de probabilité" sur Ω .

Dans ce formalisme, la probabilité d'un événement A représenté par la partie A de Ω (que les probabilistes appellent aussi "événement de Ω ") est égale par définition à la somme des probabilités élémentaires associées aux éléments de A , c'est-à-dire des probabilités des issues qui réalisent A .

Cette définition est générale et suffisante pour travailler au niveau du second degré sur la plupart des situations aléatoires, y compris quand l'hypothèse d'équiprobabilité n'est pas pertinente. Elle permet de sortir des situations traditionnelles et fabriquées des jeux de hasard dont la combinatoire a rebuté tant d'élèves, pour atteindre de véritables situations de la réalité, notamment les situations d'échantillonnages. Elle suffit largement pour les besoins du lycée où l'on se restreint à considérer des univers Ω finis (ou infinis dénombrables en post-bac). Elle pourra être complétée ensuite pour les modèles où Ω est infini non dénombrable (introduit comme ensemble de réels) par une définition se plaçant dans le cadre de la théorie de la mesure, illustrée par la notion élémentaire de probabilité géométrique.

Mais ceci est une autre histoire qui nous renvoie à la cohérence des programmes de statistique et de probabilités dans la progression de la Seconde à la Terminale et à leur capacité à bien préparer cet enseignement en BTS, IUT ou à l'Université ...