Quelles règles pour le débat mathématique au collège?

Maryvonne Le Berre

IREM de LYON

Cet atelier est une reprise de l'atelier mené au colloque d'Orléans, en 1998, sous le titre : un énoncé mathématique peut-il n'être ni vrai ni faux?

"Un énoncé mathématique est soit vrai soit faux".

Voilà une affirmation que nous avons tous, un jour ou l'autre, renvoyée à nos élèves, par exemple quand, devant des affirmations contradictoires, la classe ne semble pas vouloir s'engager dans un débat.

C'est d'ailleurs comme "règle du débat mathématique" que les auteurs de la brochure «Initiation au raisonnement déductif», publiée en 1989 par l'IREM de Lyon, ont proposé de poser cette affirmation en classe de cinquième.

Pour entrer dans le jeu mathématique, il faut en connaître les règles. Or, très souvent, nous mettons en œuvre des implicites et des présupposés qui sont loin d'être partagés par les élèves. Le travail proposé sur les règles du débat vise à faire surgir, à partir de problèmes choisis pour cela, certains écarts entre des points de vue d'élèves, souvent décrits comme relevant de la logique naturelle, et le point de vue mathématique.

À y regarder de plus près, cependant, le point de vue de la logique mathématique peut parfois éclairer celui des élèves.

Tout d'abord, **qu'est-ce qu'un énoncé mathématique?**

La question est posée dans la première partie de l'atelier, à partir de l'activité suivante :

Voici cinq énoncés:

1. Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.
2. $3a + 4a = 7a$
3. Un quadrilatère peut avoir exactement trois angles droits.
4. Le carré d'un nombre peut être plus petit que ce nombre.
5. $3 + 4a \neq 7a$

Question : **Chacun des cinq énoncés proposés ci-dessus est-il pour vous un énoncé mathématique?** Si ce n'est pas le cas, proposez une modification.

Dans la mise en commun des réponses, apparaissent diverses acceptions du terme :

un énoncé mathématique, c'est peut-être un énoncé de problème (auquel cas, il manque à toutes les phrases une question ou une consigne, proposées en ajout)

ou encore, c'est un théorème, un énoncé général vrai (par exemple quelqu'un propose de remplacer la troisième phrase par «un quadrilatère **ne peut pas** avoir exactement trois angles droits»)

- à moins que ce ne soit une proposition, au sens de la logique, un énoncé que l'on peut déclarer soit vrai, soit faux
- et, pourquoi pas n'importe quelle phrase parlant de mathématiques ? (C'est le point de vue de ceux qui ne proposent aucune modification).

La discussion fait également apparaître que les énoncés (1) et (2) sont implicitement quantifiés pour les participants, ce qui correspond à l'usage courant dans l'emploi du « si ... alors » et des identités algébriques. En revanche, l'énoncé $3+4a \neq 7a$, construit comme le (2), pose question. On ne peut pas le considérer comme la négation de : $3+4a = 7a$. Il est soit admis comme «énoncé parfois vrai, parfois faux», soit complété de : «pour tout a différent de 1».

Dans la deuxième partie de l'atelier, les participants sont invités à tester sur tous les énoncés proposés (les cinq de départ et leurs variantes) les trois *règles du débat* proposées dans la brochure citée plus haut. L'objectif est de débusquer les implicites dans ces règles.

1. Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux.
2. Des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas pour prouver que cet énoncé est vrai.
3. Un exemple qui ne vérifie pas un énoncé suffit pour prouver que cet énoncé est faux. Cet exemple est appelé «contre-exemple».

La première règle situe le choix des auteurs : un énoncé mathématique est une proposition, au sens habituel de la logique. Les suivantes font apparaître un implicite très fort. En effet ces règles ne s'appliquent qu'aux énoncés universels. Sont donc exclus de fait du champ des énoncés mathématiques, les énoncés existentiels comme

Un quadrilatère peut avoir exactement trois angles droits

qu'on ne peut réfuter à l'aide d'un contre-exemple, ou

Le carré d'un nombre peut être plus petit que ce nombre

qu'un exemple suffit à prouver.

L'identification du quantificateur existentiel signalé dans la langue par le verbe «peut» ne va pas de soi pour tous, et le passage par la formalisation mathématique est nécessaire.

À ce stade, on pourrait penser régler la question avec les élèves en précisant que les règles données ne concernent que les énoncés généraux.

Malheureusement, comme l'a montré Viviane Durand-Guerrier dans sa thèse [1], les règles 2 et 3, telles qu'elles sont énoncées, sont contradictoires.

Prenons comme exemple, une déclaration d'élève :

Élève :

Le carré d'un nombre est plus grand que ce nombre, c'est vrai, par exemple $2^2 = 4$ *et* $5^2 = 25$

Prof :

Voyons, tu sais bien qu'en math, un exemple ne démontre rien, il se trouve que tes exemples vérifient l'énoncé, mais cependant l'énoncé est faux.

Nous sommes bien dans un cas d'application de la règle 2 :

2 - Des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas pour prouver que cet énoncé est vrai.

L'énoncé déclaré faux par l'enseignant c'est la proposition : *le carré d'un nombre est toujours plus grand que ce nombre*, que l'on peut formaliser en $\forall a \in E, a^2 > a$.

Mais quel est l'énoncé "vérifié" par les exemples de l'élève ? **Il s'agit d'une autre phrase : «** $a^2 > a$ **» qui n'est pas une proposition, mais une phrase ouverte.**

Le mot «énoncé» se réfère à deux choses différentes dans la même phrase !

Un élève qui s'en tient à la lettre ne peut-il alors légitimement "entendre" qu'un énoncé peut être à la fois vrai(vérifié) et faux ?

Que dire alors aux élèves , sans entrer dans une lourde formalisation ?

Peut-être :

Des exemples qui vérifient un énoncé ne prouvent pas que cet énoncé est vrai dans tous les cas, il peut y avoir aussi des exemples pour lesquels l'énoncé est faux.

Avec cette formulation, il n'y a plus d'ambiguïté sur le mot énoncé, mais il est important d'être conscient qu'il désigne alors une phrase ouverte, autrement dit d'un énoncé qui n'est en soi ni vrai ni faux.

Pour conclure :

L'analyse qui précède éclaire les réponses d'élèves déclarant certains énoncés **"à la fois vrais et faux"**.

Il semble nécessaire de prendre en compte dans la classe l'existence d'énoncés "contingents", autrement dits de phrases ouvertes n'ayant pas de valeur de vérité, et d'accorder davantage d'importance à l'explicitation du rôle de la quantification . Celle-ci prend aisément sa place dans les débats entre élèves, pour peu que l'on soit attentif à débusquer les implicites.

1. Durand-Guerrier V.(1996)Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication. Thèse de l'Université Claude Bernard Lyon 1, sous la direction de Gilbert Arsac.