Transformations et systèmes articulés

Modélisation à l'aide du logiciel Cabri-géomètre

Freddy Bonafé et Marie-Claire Combes

IREM de MONTPELLIER

Préambule

A la fin de leur scolarité au collège, dans l'ensemble, les élèves savent construire les images des principales figures planes par les transformations qu'ils ont successivement étudiées. Ils semblent beaucoup plus démunis lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes nécessitant l'intervention des transformations.

Que constate-t-on ? L'univers des transformations leur est familier, ils ont une perception globale de la régularité de certaines figures, de la réduction ou de l'agrandissement, mais ils ne parviennent pas, en général, à faire de ces transformations des outils permettant d'explorer les figures. Il faut pour cela qu'ils reconnaissent des points **homologues**, des points **invariants**. Ils ont besoin de considérer certains points comme intersections de deux **figures géométriques**. Ils sont conduits à utiliser les **propriétés d'invariance** des transformations. Ces différentes tâches sont loin d'être sans difficulté pour un élève. Elles renvoient souvent aux divers mouvements associés aux transformations et au delà de ces mouvements aux correspondances entre un état initial et un état final.

Nous pensons que l'apprentissage reçu, souvent coupé du mouvement qui accompagne les transformations, ne facilite pas leur mise en œuvre. Pour obtenir l'image d'un polygone par une des transformations étudiées au collège, l'élève construit les images des différents sommets et les relie ensuite. A-t-il conscience qu'à chaque point de la figure initiale correspond un point homologue par la transformation qu'il vient d'étudier ? A-t-il conscience qu'au mouvement d'un point sur la figure initiale correspond un mouvement du point homologue par la transformation qu'il vient d'étudier sur la figure image ?

Nous proposons de montrer comment un logiciel comme Cabri-géomètre peut apporter une aide à la découverte et à la compréhension de ces différentes notions.

Le mouvement qui est au cœur de ce logiciel, permet de modéliser des systèmes articulés qui vont à partir d'une figure donnée engendrer son image, point par point, par la transformation souhaitée.

La rapidité du travail d'exploration permet de diversifier les systèmes étudiés et de centrer l'étude sur les différentes notions mentionnées plus haut.

Les systèmes articulés

Dès la fin du XVI^{me} siècle, le pantographe permettait de construire de façon dynamique l'image d'une courbe par une homothétie. Plus tard, les géomètres anglais HART, KEMPE, SYLVESTER, WATT, le mécanicien français PEAUCELLIER, et bien d'autres ont proposé des systèmes articulés capables de réaliser des mouvements rectilignes ou de servir de transformateurs.

LEBESGUE dans ses "Leçons sur les constructions géométriques" (1950) propose une étude des systèmes articulés ne faisant pas intervenir de glissières et développe l'utilisation de ces systèmes comme transformateurs.

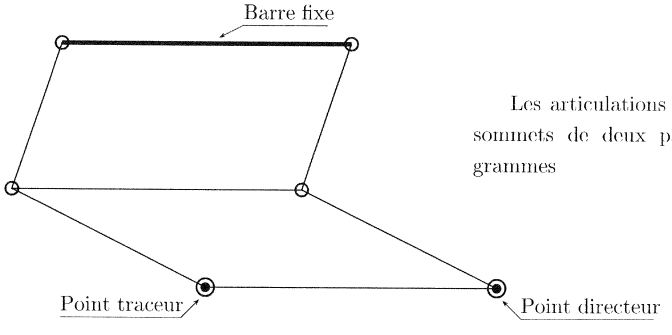
Précisons la notion de système articulé comme transformateur.

Un tel système est constitué de barres rigides de longueurs fixes situées dans un même plan. Ces barres sont reliées entre elles, soit par des articulations, soit par des glissières. Le système est rendu solidaire au plan de la feuille par un point fixe ou une barre fixe. Le système admet un point directeur qui va décrire une trajectoire et un point traceur qui va tracer l'image de cette trajectoire.

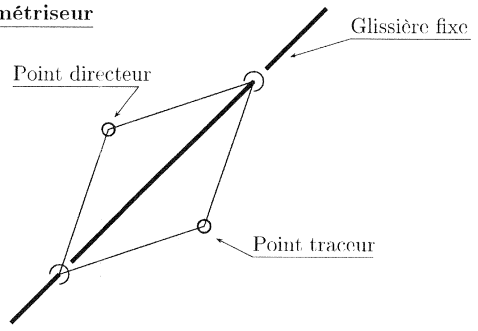
"Le Plot matériel" édité en 1983 par la régionale de l'APMEP de l'Académie d'Orléans-Tours présente un grand choix de transformateurs.

Les exemples ci-dessous montrent un translateur, un symétriseur et un pantographe (au sujet de la modélisation sur CABRI-GÉOMÈTRE, un article de Marie-Claire COMBES paraîtra fin 1999 dans la brochure Inter-IREM premier cycle consacrée au cycle central).

Translateur

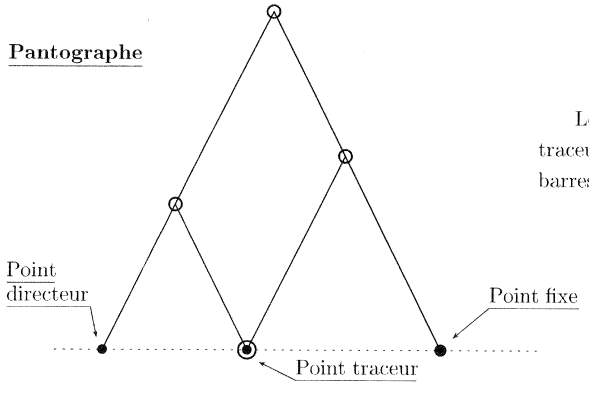


Symétriseur



Les articulations sont les sommets d'un losange

Pantographe

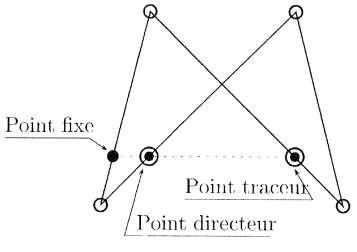


Les points fixe, directeur, traceur sont alignés et les barres deux à eux parallèles

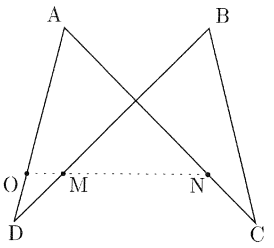
On peut imaginer de nombreux autres systèmes en combinant les trois précédents.

Il en existe d'autres, souvent basés sur le contre-parallélogramme, comme celui de HART ci-dessous.

Machine de HART



Les barres sans articulation commune ont des longueurs égales. Les points fixe, directeur, traceur sont sur une parallèle aux droites définies par les articulations.



En posant $AD = BC = a$ et $AC = BD = b$,
on a $\dfrac{OM}{AB} = \dfrac{DO}{a}$ et $\dfrac{ON}{DC} = \dfrac{AO}{a}$ donc

$$OM \times ON = \frac{AB \times DO \times DC \times AO}{a^2}$$

Le produit $DO \times AO$ est fixe puisque O est fixé sur la barre AD, et le produit $AB \times DC = b^2 - a^2$
En effet, $ABCD$ est un trapèze isocèle donc inscriptible dans un cercle :
la propriété de PTOLÉMÉE donne :

$$AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

Ainsi $OM \times ON$ est fixe et ce transformateur est associé à une inversion.

Présentation d'une séquence : la translation en 4^{me}

Objectifs

Les objectifs poursuivis sont de natures différentes. Tout d'abord ceux qui sont propres à la transformation étudiée et qui motivent le travail :

découvrir un algorithme de construction de l'image d'un point,
- découvrir les propriétés de la translation,
  réinvestir ces propriétés.

D'autres, relèvent de l'usage des transformations dans un cadre plus général :

- découvrir les notions de points images, antécédents, homologues, invariants,
  sensibiliser grâce au mouvement, à la notion d'ensemble de points.

Enfin, c'est l'occasion de développer raisonnement et démarche expérimentale :

- conjecturer, vérifier, dégager des procédés de validation,
- utiliser un contre-exemple, prouver,
  distinguer propriété et réciproque.

Organisation matérielle

Le dispositif retenu se compose d'un seul ordinateur relié à un vidéo-projecteur. Tous les élèves de la classe sont face à l'écran, ils doivent individuellement compléter des figures fournies ou répondre par écrit à des questions posées. Leurs réponses sont revues après débat dans la classe. Certains, à tour de rôle manipulent l'ordinateur. L'enseignant met à la disposition de la classe une maquette de translateur.

Déroulement de la séquence (six séances d'une heure)

Séance 1 :

Elle est centrée sur "homologues", "points invariants", "algorithme de construction".

Afin que les élèves se familiarisent avec ces notions, le dispositif et le travail

attendu, la première partie concerne la symétrie centrale étudiée dans la classe précédente.

Après avoir présenté la maquette d'un symétriseur central et sa modélisation à l'écran, on donne à chaque élève une représentation de ce symétriseur et une figure composée de deux quadrilatères homologues dans cette transformation.

Ils doivent découvrir et rechercher des points homologues à l'écran et les reproduire sur la feuille fournie. Ils observent ensuite les mouvements respectifs des points homologues et les décrivent sur leur document. Enfin ils doivent rechercher et découvrir le point invariant à l'écran puis le construire sur leur feuille. Cette transformation étant déjà connue d'eux, ils écrivent l'algorithme de construction d'une image et le mettent en œuvre.

La deuxième partie de la séance reprend pour le translateur le même scénario. Elle se termine par la recherche d'un algorithme de construction personnel (conjecture) et sa mise en application (validation).

Séance 2 :

Elle commence par une mise en commun d'une sélection des productions écrites obtenues lors de la séance 1. L'algorithme de construction de la translation est mis au point et institutionnalisé.

La notion de point invariant est retravaillée à partir du symétriseur et du translateur.

Cette séance s'achève par la construction sur feuille d'images de figures par translation.

Séances 3, 4 et 5 :

Avec l'introduction des mesures à l'écran, l'essentiel du travail va porter sur la notion d'isométrie et ses conséquences.

Les élèves doivent découvrir les invariants par la translation et les valider par le mouvement.

Pour chacun des invariants dégagés, avant de rechercher une preuve de la propriété entrevue, un nouveau transformateur qui ne la possède pas est montré. Par exemple, le pantographe est montré pour la non conservation des longueurs.

Après justification de cette propriété, le travail est centré sur l'image de certaines figures. Par exemple, la conservation des longueurs étant acquise, les élèves doivent conjecturer ce que sera l'image d'un cercle, le justifier, puis le visualiser à l'écran.

Ce travail se termine par une mise en relation des propriétés dégagées : conservation des longueurs, des angles, de l'alignement.

Séance 6 :

Elle se déroule sans ordinateur, elle est centrée sur les constructions de figures.

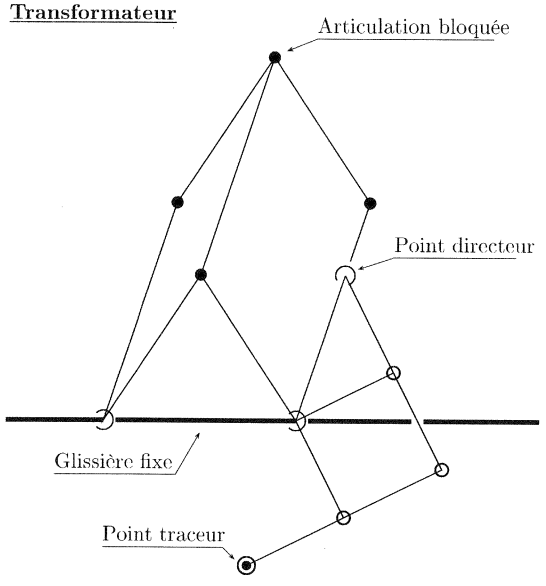
Les élèves doivent utiliser les propriétés de la translation pour construire de façon "économique" les images de figures fournies. Les différentes stratégies sont mises en commun et justifiées.

Travaux pratiques

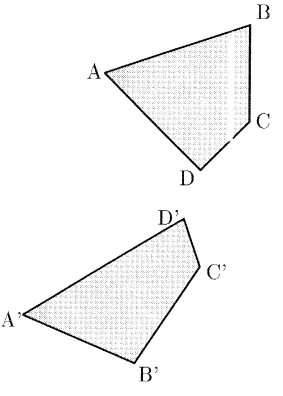
Les participants à l'atelier sont placés dans la situation des élèves pour le déroulement de la séquence à partir du transformateur suivant qui réalise une symétrie oblique.

L'activité consiste à rechercher et étudier les divers invariants de cette transformation.

Transformateur



Ci-dessous un quadrilatère et son image à l'aide de ce transformateur.



Bilan

Ce travail a été expérimenté durant les années 1997/1998 et 1998/1999 en cinquième et en quatrième.

Les objectifs donnés plus haut semblent atteints. En particulier les élèves sont passés successivement par les trois phases suivantes :

- une phase d'anticipation lors de l'écriture des conjectures à priori,
  une phase d'expérimentation au cours de l'observation de ce qui se passe à l'écran pour renforcer ou infirmer la conjecture,
- une phase de justification qui permet de réinvestir les différentes propriétés découvertes au fil des séances.

La rapidité du travail d'exploration conduit avec CABRI-GÉOM TRE permet d'exhiber très rapidement un contre-exemple invalidant une conjecture fausse ou un autre transformateur précisant cette conjecture. Ainsi à travers l'étude d'une transformation donnée, c'est la notion générale de transformation qui se construit.

Enfin, la présence d'éléments fixes dans les transformateurs donne davantage de sens à la notion d'invariants, qu'il s'agisse de points ou de propriétés. Cette présence introduit plus naturellement les éléments indispensables à la définition de la transformation étudiée.