

PERSPECTIVE CENTRALE AU COLLÈGE

ET... PEUT-ÊTRE AU LYCÉE

Bernard CAZIER et Françoise CHAMONTIN

IREM de LILLE

Pourquoi la perspective centrale ?

Seule la perspective cavalière est au programme du Collège. Et il est important de ne pas la négliger. Mais on peut lire dans les objectifs de ce programme: "Il est en effet possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une activité mathématique véritable, avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises, de conclusions dont on parvient à se convaincre. Une telle activité est ainsi accessible au plus grand nombre et a une valeur formatrice évidente"

Il y a un souci esthétique dans cette démarche car «la perspective centrale permet de donner un effet de profondeur et de rendre la diminution de dimension en rapport avec l'éloignement», et une certaine jubilation à confronter ses élèves à une transformation qui ne conserve ni les milieux ni le parallélisme, uniquement par une pratique du dessin. Mais ce n'est pas la seule motivation: «C'est un domaine qui plaît aux élèves car il a du sens: chaque dessin nécessite un raisonnement sanctionné par un résultat visible». Dans cette phrase chaque mot a un sens: le raisonnement est une nécessité, la sanction n'est pas une note attribuée de l'extérieur mais la gratification intime d'une réalisation aboutie.

On a là, certes, une pratique géométrique intéressante qui, à partir de règles arbitraires —ou plutôt pour lesquelles il est recherché un consensus minimum—, développe un faisceau de raisonnements qui ont pour seul but, dans un premier temps, d'élaborer des représentations satisfaisantes d'objets de l'espace, mais qui conduisent, tôt ou tard pour certains, à questionner le pourquoi des règles (en particulier celle de la ligne d'horizon¹).

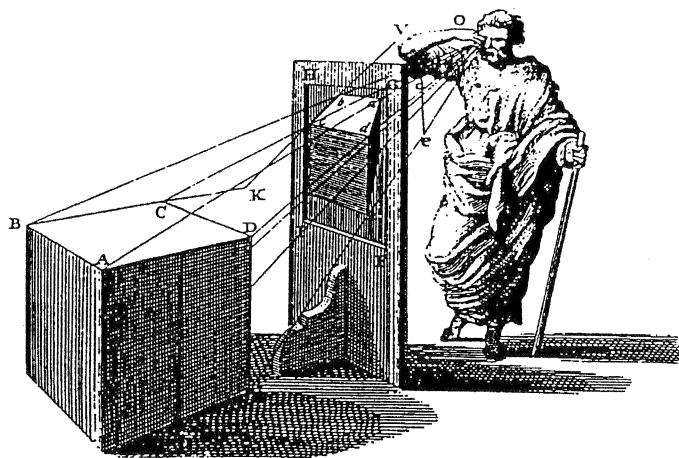
Nous donnerons un premier aperçu de cette pratique au Collège, qui peut déboucher au Lycée sur une étude plus théorique, permettant de légitimer les règles de la perspective centrale.

1. Pourquoi tous les points de fuites des droites horizontales sont-ils alignés sur la ligne d'horizon ?

Qu'est-ce que la perspective centrale?

La perspective centrale a pour origine les recherches picturales des artistes de la Renaissance Italienne.

Alberti² écrit en 1436, dans un ouvrage intitulé "Della Pittura": «Lorsque je dois peindre voilà comment je procède: Je dessine un rectangle aussi grand que je le veux, que je considère comme étant une fenêtre ouverte par laquelle je regarde ce qui, en ce cadre sera peint»³. De même Léonard de Vinci dans sa célèbre "Paroi de verre" traduit l'idée de représenter dans un plan l'espace tout entier comme on le voit à travers une fenêtre, tel qu'il apparaît au regard.



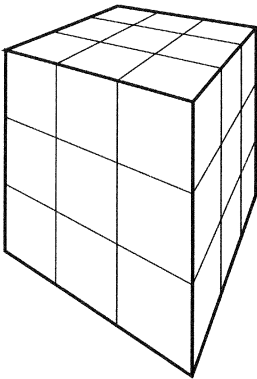
La gravure ci-dessus⁴ explicite ce principe. Y sont tracés les rayons lumineux entre l'œil droit de l'observateur et les sommets du cube, et leur intersection avec la vitre verticale. En reliant ces traces sur la vitre, on a obtenu la représentation du cube sur le tableau vertical. Une des faces du cube est parallèle au tableau, on voit alors que l'arête **AB**, plus éloignée de l'observateur que l'arête **CD** aura une image **ab** sur la vitre parallèle **cd** mais plus petite qu'elle. L'image du carré **ABCD** sur le tableau est un **trapèze**.

Si on fait tourner le cube sur lui-même dans la configuration de la gravure, on obtient la figure de la page suivante. On a marqué d'un point entouré d'un cercle, la place la perpendiculaire duquel l'observateur doit mettre son œil droit pour voir un cube.

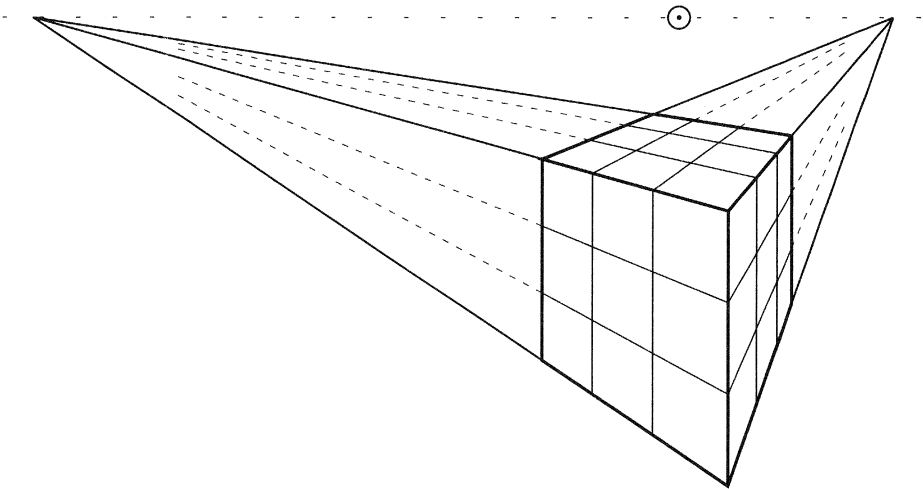
2. Léo Battista ALBERTI, "De Pittura", 1436. Préface et traduction de Jean-Louis Schefer, introduction de Sylvie Deswarte-Rosa, Collection "La Littérature Artistique", Macula Dédale, Paris 1992

3. Léo Battista ALBERTI, "De Pittura", 1436. Traduction de Jean-Pierre Le Goff. Texte et traduction originaux dans Les Cahiers de la Perspective, n°4, IREM de Basse-Normandie, Caen.

4. extraite de BROOK TAYLOR, *New Principles of Perspective* (1719), in Kirsti Andersen, *Brook Taylor's Work on Linear Perspective*, Springer Verlag, p.231



Mettre un œil à la perpendiculaire du point, à une distance entre 6 et 8 cm, et regarder le dessin.



Si on prolonge les segments du dessin qui représentent des segments horizontaux à supports parallèles dans l'espace, ils se rejoignent en un même point : le point de fuite. A chaque direction de droites correspond un point de fuite. Et tous les points de fuites sont alignés avec le point encerclé.

On vise à faire dessiner des solides de l'espace (pavés droits, édifices, ...) mais on s'aperçoit — Cf la figure qui suit — qu'une étape fondamentale est la représentation d'objets plans carrés, rectangles, damiers, ...) posés sur un plan horizontal.

Une pratique au Collège :

L'objectif est de faire pratiquer par les élèves le dessin en perspective centrale pour représenter, sur un plan à deux dimensions — qu'on appellera tableau et qu'on supposera vertical — ce qu'ils voient dans l'espace à trois dimensions. Le but à terme, est qu'ils puissent dessiner dans les règles des objets familiers, leur maison, leur rue ou la cour du Collège.

Qu'est-ce qui est en jeu ?

Pour représenter dans un plan, un carré de l'espace, on constate que le côté parallèle au tableau, proche de l'observateur, est vu plus grand que le côté éloigné. Ce n'est pas tout de suite évident pour tout le monde, et on s'aidera de l'observation du pavage au sol.

Sur le dessin on est donc amené à tracer deux segments parallèles, l'un plus grand que l'autre. Il en résulte que les deux autres côtés sont représentés par des segments ayant des supports sécants.

La consigne du début n'est pas parfaitement claire :
dessine-t-on vraiment ce que l'on voit ?

En fait on dessine une représentation du carré qui donne l'impression, de voir effectivement un carré de l'espace (comme sur une photo). Il s'agit donc de transformer un carré de l'espace en une figure du plan.

La discussion qui s'établit entre le professeur et les élèves a pour but de rechercher les règles permettant d'effectuer cette transformation en séparant les propriétés qui se conservent de celles qui se modifient.

Première phase.

La mise en place de l'activité commence par bousculer les idées reçues des élèves. Les longueurs égales de deux côtés opposés du carré ne sont pas représentées par des longueurs égales.

Deuxième phase.

Pourtant un segment est représenté par un segment, une droite est représentée par une droite, des points alignés sont représentés par des points alignés.

Troisième phase.

Lorsqu'une droite horizontale, découpée en segments égaux, est parallèle au plan de tableau, on constate qu'elle est représentée par une droite horizontale coupée elle aussi en segments égaux.

Quatrième phase.

L'observation des droites perpendiculaires au plan du tableau, surtout celles du plafond et celles des murs (c'est encore plus flagrant avec des rails), montre que leurs prolongements se rencontrent. Le professeur fait admettre que ces droites parallèles sont représentées par des droites concourantes en un point qu'on appelle le point de fuite principal

On énonce les règles, en s'appuyant sur une connaissance intuitive et expérimentale (photographie, dessin d'art, tableaux anciens, ...) que l'on développe simultanément par l'observation.

L'enjeu à ce stade n'est pas de justifier rigoureusement les propriétés relevées, mais d'être convaincu de leur pertinence et de savoir s'en servir pour dessiner. Le résultat obtenu, s'il apporte bien l'impression espérée du début – voir un carré dans l'espace –, sera un critère d'exactitude, suffisant à ce stade.

Premières propriétés..

On synthétise en énonçant la liste des propriétés qui vont être utilisées comme règles pour la construction des dessins.

- une droite de l'espace est représentée par une droite sur le dessin
 - une droite verticale dans l'espace est représentée par une droite "verticale"
- une droite horizontale et parallèle au plan du tableau, est représentée par une droite horizontale
- sinon, les droites horizontales, parallèles entre elles, sont représentées par des droites concourantes en un point de la ligne d'horizon, qu'on appelle point de fuite de la direction
 - le point de fuite principal correspond au point de fuite des droites perpendiculaires au plan du tableau
- des segments égaux entre eux sur une droite parallèle au plan du tableau sont représentés par des segments égaux entre eux sur le dessin⁵.

5. **Remarque.** Ces deux dernières propriétés ne sont pas indépendantes. Si on partage les côtés parallèles du trapèze en segments égaux on obtient à partir des points obtenus, les bandes en profondeur. Avec le théorème de Thalès on démontre que des droites tracées sont concourantes.

Dans une première partie ou les carrés représentés sont dans un plan horizontal, deux de leurs côtés sont parallèles au plan du tableau.

Apprentissage fondateur.

Ce premier apprentissage — fiche I-1 — se fait ensemble, professeur et élèves. C'est la réalisation d'un quadrillage (ou d'un damier) en perspective centrale. Le professeur présente les premiers principes.

Le professeur dessine à gauche du tableau un carré vu de face et à droite du tableau un trapèze représentant un carré placé dans un plan horizontal de l'espace. Le travail se fait sur deux niveaux. À gauche, le quadrillage est vu de face. On utilise dans cette situation les propriétés élémentaires du carré : les diagonales du grand côté rencontrent les petits carrés en leurs sommets.

La question qui se pose est : quelles sont les droites que l'on peut tracer directement sur le trapèze ? les diagonales bien sûr et les parallèles fuyantes.

Les élèves ont une feuille sur laquelle est dessiné un trapèze, il s'agit pour eux d'y transcrire ce qui est fait sur le carré vu de face. Cette transposition en perspective centrale va conduire au déroulement :

- Partage d'un côté horizontal du trapèze en segments égaux
- Tracé de bandes en profondeur
- Tracé des diagonales
- Technique de construction des bandes parallèles horizontales -.

Au début les élèves se demandent où le professeur veut en venir ; certains même préviennent « je ne comprends pas ! ». C'est en voyant évoluer le dessin et en regardant ce que fait le voisin que tout s'arrange. Quelques uns comprennent très vite, spontanément ils aident leurs camarades : une sorte d'enseignement mutuel. Marquer d'un même signe ou d'une même lettre les points correspondants du carré et du trapèze est très éclairant pour les élèves.

Fiche I - 1

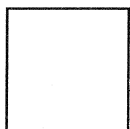
Apprentissage fondateur

Réalisation d'un quadrillage en perspective

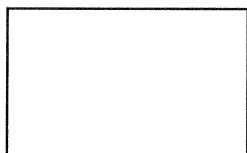
Un carré (un rectangle) est représenté sur le dessin par un trapèze.

Le partager en 5×5 petits carrés (rectangles) égaux.

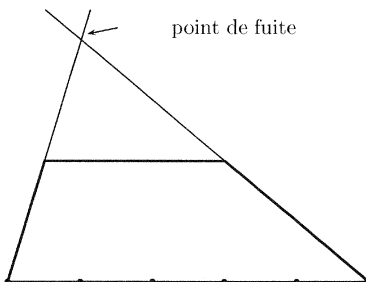
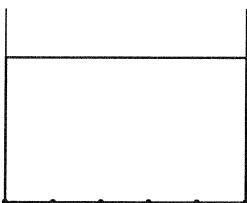
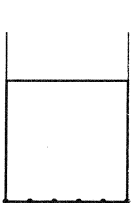
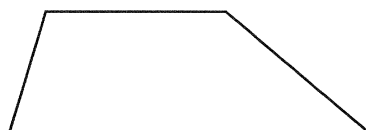
carré vu de face



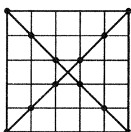
rectangle vu de face



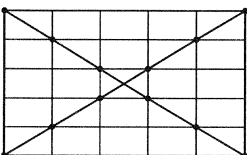
carré ou rectangle vu en perspective centrale



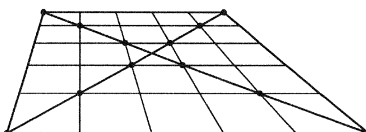
carré vu de face



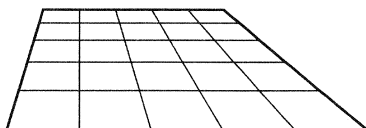
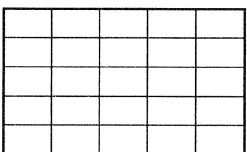
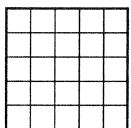
rectangle vu de face



carré ou rectangle vu en perspective centrale



résultat final



Le tracé des deux diagonales permet d'obtenir en général deux points. Ces deux points déterminent une parallèle au bord. Pour le soin du dessin, les ajustements de la règle sont nécessaires.

Après le premier exercice fondateur on propose une série d'exercices, apportant chacun quelques variantes : on aboutit à l'exercice de synthèse suivant.

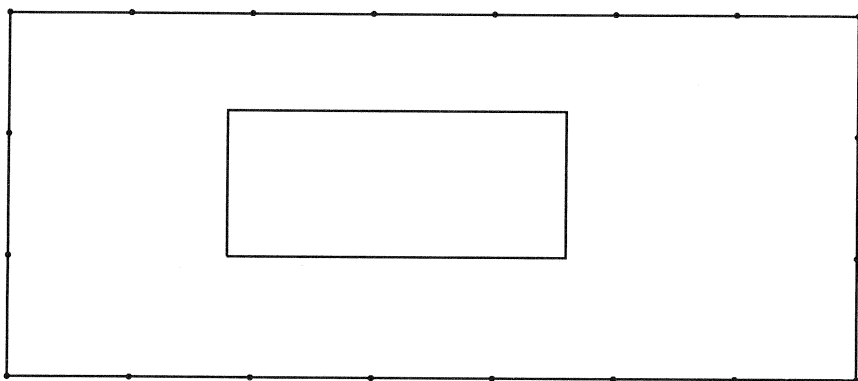
Fiche II - 3

Exercice 5

Représenter l'intérieur d'une boîte rectangulaire de dimensions
largeur 7, hauteur 3, profondeur 5.

Les parois latérales gauche-droite, haut-bas étant des damiers
 3×5 et 7×5 .

Tracer d'abord les 4 arêtes de la boîte qui vont de l'observateur vers le fond.
Déterminer ensuite le point de fuite commun aux 4 faces.



Remarque

Aisé en théorie, mais de réalisation difficile, il suffit de partager un seul segment "horizontal" en 7.

Sortir du rectangle, sortir du trapèze.

Jusqu'ici on a travaillé à l'intérieur d'un trapèze qui représente un rectangle. Il s'agit maintenant, à partir d'un de ces trapèzes représentant un rectangle, de lui adjoindre sur ses côtés, à gauche et à droite, devant et derrière, d'autres trapèzes qui représentent d'autres rectangles égaux dans l'espace.

C'est un nouveau problème.

Pour le résoudre on va procéder à l'analyse de la situation familière et mieux connue : celle de la géométrie plane élémentaire. Il restera ensuite à transposer les propriétés en utilisant les invariants mis en évidence auparavant.

Deux méthodes viennent à l'esprit

La première.

Celle qui convient le mieux aux élèves. Elle utilise la conservation du milieu d'un segment, lorsque la droite est parallèle à la ligne d'horizon, et la conservation de l'alignement des points. Ces règles sont maintenant tout à fait admises : on les a utilisées plusieurs fois et constaté leur efficacité.

En deça, il se peut qu'il n'y ait pas de construction possible. C'est l'occasion de revenir au réel (il a été vite oublié par le souci qu'on apporte à respecter les contraintes imposées). Le rectangle ne peut, parfois, être représenté tout simplement parce que l'observateur se trouve à l'intérieur de ce rectangle et qu'un de ses bords est derrière lui.

Il est à remarquer qu'ici on n'utilise pas le point de fuite.

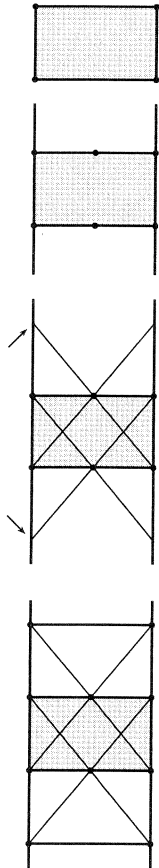
La deuxième.

Celle qui utilise un point de fuite annexe : celui de la diagonale. Ce point de fuite se trouve sur la ligne d'horizon : nouvelle contrainte, nouvel outil de construction. Il faut encore du temps, de l'attention, de la motivation chez les élèves pour assimiler cette nouvelle propriété. On parle alors de la ligne d'horizon que l'on voit constamment lorsqu'on se déplace dans un paysage plat ou au bord de la mer.

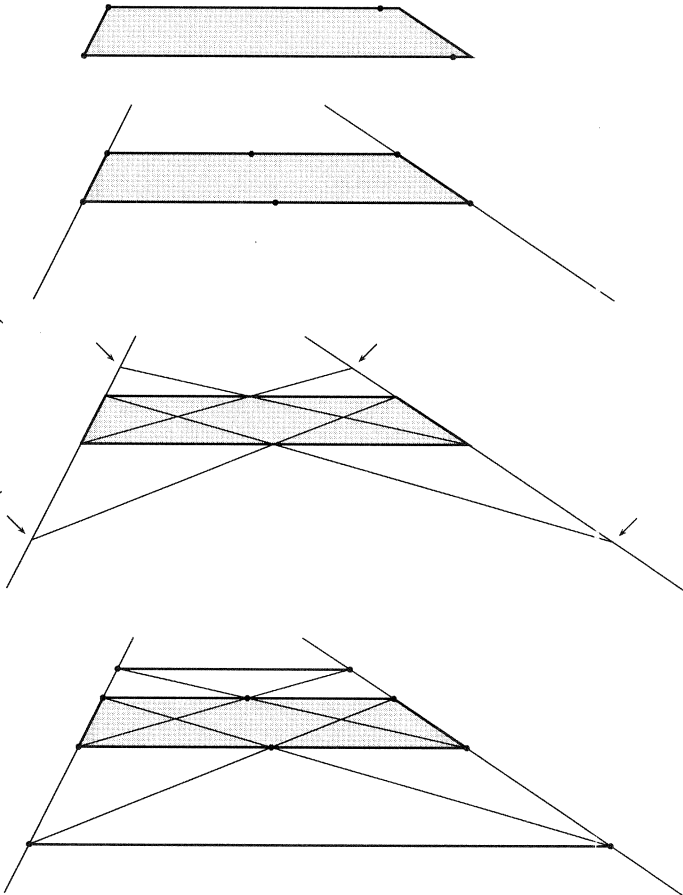
Fiche IV - 3

3^{ème} exemple, adjoindre un rectangle derrière et devant.

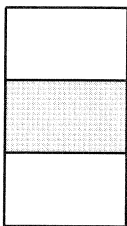
Un rectangle vu de face



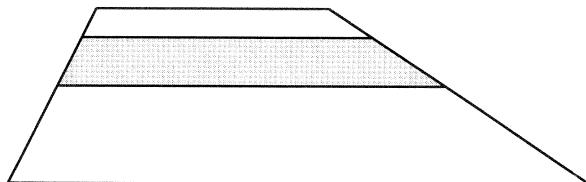
Le rectangle vu en perspective centrale



Les trois rectangles vus de face

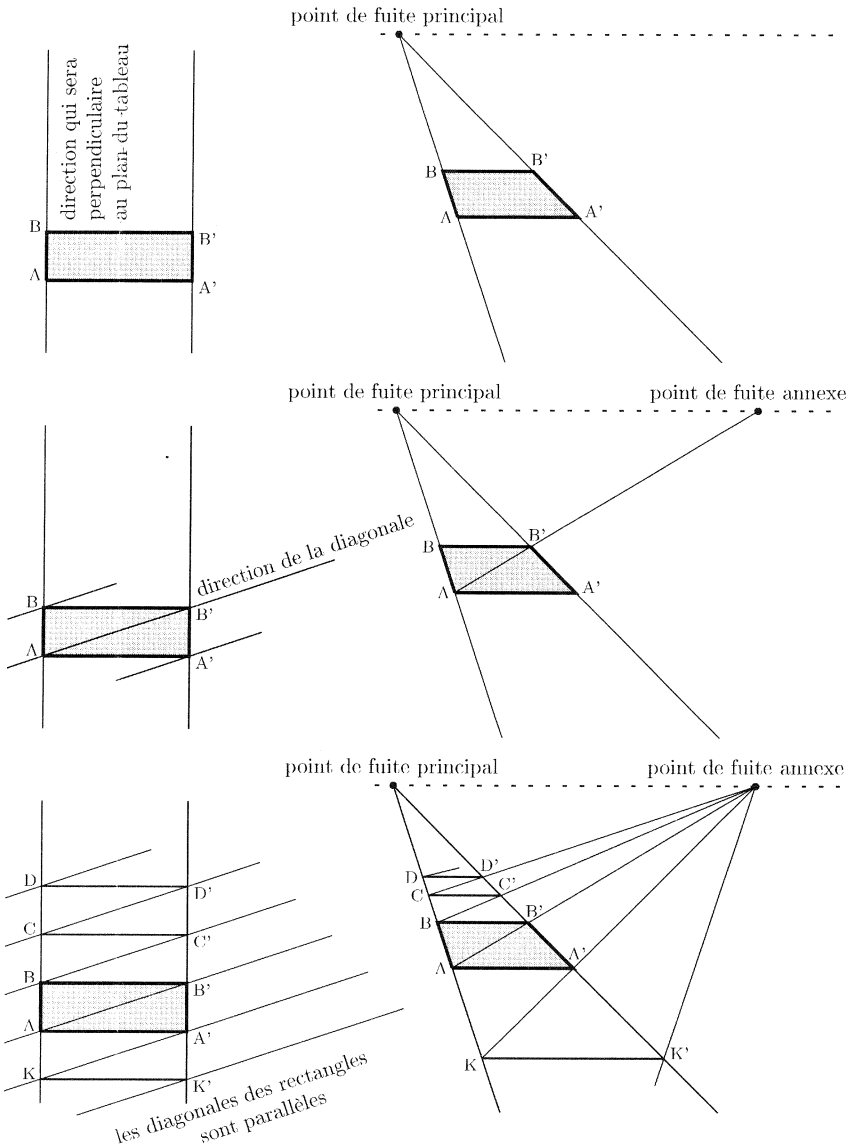


Les trois rectangles vus en perspective centrale



Fiche IV - 4 Deuxième méthode.

Un rectangle (un carré) est représenté par un trapèze.
Lui adjoindre au delà et en deça des rectangles qui lui sont égaux.



Dans une deuxième partie les figures représentées sont toujours dans un plan horizontal, mais, les côtés ne sont pas toujours parallèles au plan du tableau.

La ligne d'horizon, les droites parallèles à la ligne d'horizon.

On considère maintenant un rectangle (un carré) placé dans un plan horizontal dont aucun des côtés n'est parallèle au plan du tableau. Les parallèles aux côtés vont être représentées par deux familles de droites, concourantes en deux points de fuite situés sur la ligne d'horizon.

Le premier problème qui se présente est le partage, en perspective centrale, d'un segment oblique en un nombre donné de segments égaux. Sachant que sur les droites parallèles à la ligne d'horizon, les segments égaux de l'espace restent égaux entre eux sur le dessin, on va tracer une droite intermédiaire parallèle à la ligne d'horizon.⁶

Là encore, c'est l'analyse de la figure en vraie grandeur, en triant ce qui se conserve (l'égalité des longueurs sur les parallèles à la ligne d'horizon) de ce qui se modifie (les droites parallèles deviennent des fuyantes) qui va permettre la transposition de la colonne de gauche (dessin en vraie grandeur) à la colonne de droite (perspective).⁷ Dans la représentation en vraie grandeur, la partition d'un côté du rectangle en segments égaux se projette parallèlement à l'autre côté suivant une équipartition sur la droite auxiliaire d'après le théorème de Thalès.

On trace la droite auxiliaire : la projection parallèle d'une équipartition donne une équipartition en segments égaux ; cette construction se fait pour chacun des deux côtés. Dans le report sur le dessin en perspective, on trace la ligne d'horizon et sa parallèle qui passe par l'un des sommets du quadrilatère. C'est sur cette ligne qu'on utilise l'invariant des rapports de longueurs. La famille des parallèles projetantes va se transformer en une famille de droites concourantes qui s'appuie sur une équipartition horizontale.

Dans cette activité on raisonne beaucoup. Autant avec sa tête qu'avec ses yeux, son crayon, sa règle et ses mains. La multiplication des exercices, le succès et la permanence des résultats amènent peu à peu l'auteur et acteur de ses dessins à désirer, à un niveau donné, une justification mathématique rigoureuse.

Pourquoi ça marche ?

Mais ce n'est pas aussi simple qu'il y paraît.

6. Pour plus de commodité on a choisi pour parallèle à la ligne d'horizon, celle qui passe par le sommet inférieur du quadrilatère : rien n'empêche d'en choisir une autre.

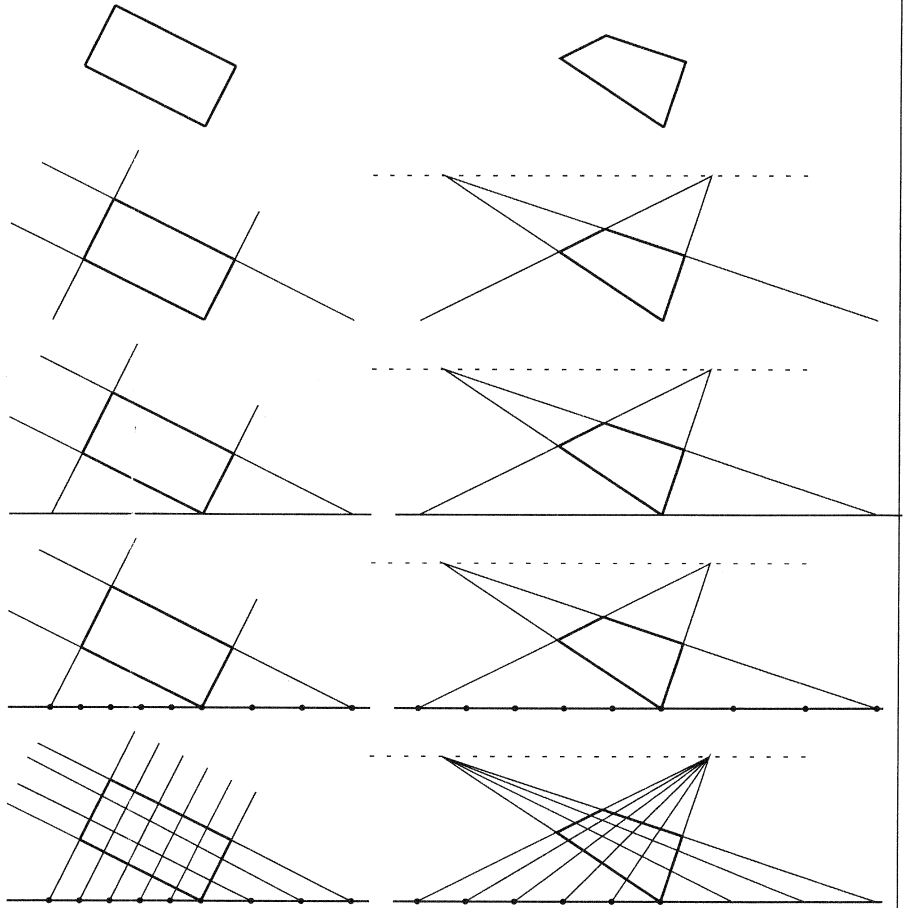
7. On voit que la colonne de gauche se lit de bas en haut, et celle de droite de haut en bas. En effet, on analyse la figure 5 de la colonne de gauche, on ajoute une droite parallèle à la ligne d'horizon et on obtient la figure 4, puis on oublie progressivement les structures jusqu'à la figure 0, et on transpose les figures sur la colonne de droite.

Fiche V - 3

3^{ème} exemple Partager le rectangle en 3×5 rectangles égaux.

Le rectangle vu de face

Le rectangle vu en perspective centrale



Le rectangle vu de face, partagé en 3×5 Le rectangle vu en perspective centrale, partagé en 3×5



Première conclusion

On vient de voir quelques éléments fondamentaux permettant une activité plus complète qui débouche sur la réalisation en perspective centrale de dessins, de solides et d'édifices.

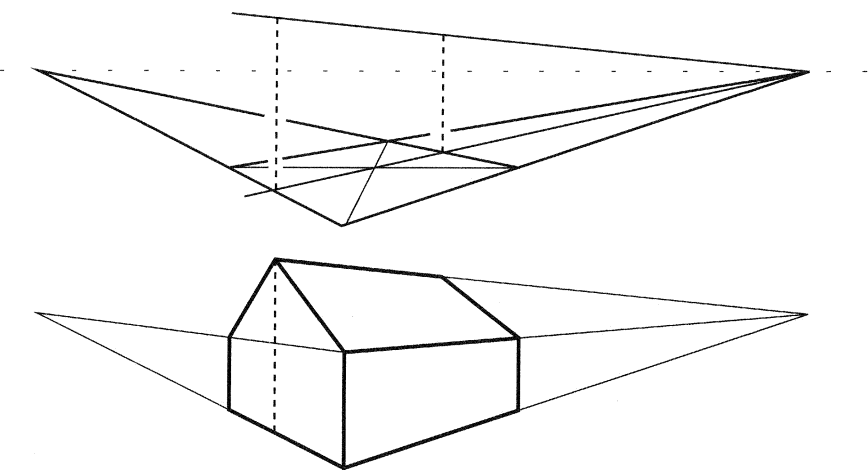
Pour exemple on a dessiné, sur la page qui suit, les traces structurales qui permettent de représenter convenablement une maison et un hangar. Selon le but recherché dans l'expression du dessin, il est possible d'être plus ou moins précis dans le rendu des volumes. La connaissance des règles de bases de la perspective centrale est indispensable pour un dessin précis et efficace quand la complexité augmente.

Tout au long des exercices on n'oublie pas que le dessin en perspective centrale est l'expression d'une relation entre un objet et son observateur. Pour un dessin effectué, l'observateur doit se placer en un endroit précis afin que celui-ci voit ce qu'a voulu représenter le dessinateur. Se placer autrement c'est voir un autre objet. On trouvera à la fin de l'ouvrage cité en référence la détermination exacte du point où doit se situer l'œil pour voir correctement un tableau réalisé en perspective centrale.

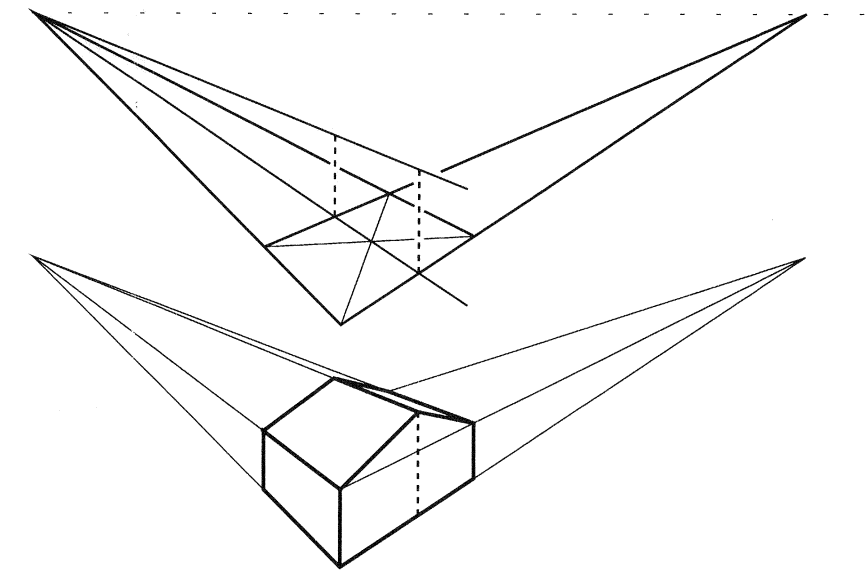
J'ai développé cette pratique, d'une façon ou d'une autre, pendant une quinzaine d'années, sans que ce soit jamais au détriment du programme. Il se trouve toujours des périodes particulières où cette activité est la bienvenue : les fins de trimestres, les séances qui suivent immédiatement les conseils de classe, brevets blancs et autres contrôles ... Des moments où l'on serait tenté de faire de la garderie, et où il vaut mieux proposer un travail apparemment ludique mais qui contribue à la formation culturelle et scientifique.

La perspective cavalière et la perspective centrale sont toutes deux très intéressantes à pratiquer avec les élèves : elles initient au passage des objets de l'espace à leurs représentations et permettent aux élèves d'élaborer et de structurer leur propre rapport à l'espace. Tandis que la perspective cavalière conduit à étudier bon nombre de propriétés des solides en travaillant sur le parallélisme et les milieux, la perspective centrale, elle, outre qu'elle fournit une meilleure représentation du réel sur le papier, utilise ces propriétés et fournit l'occasion d'approcher de façon sensible la notion d'invariant dans une transformation, notion centrale de la géométrie moderne.

Représentation d'une maison

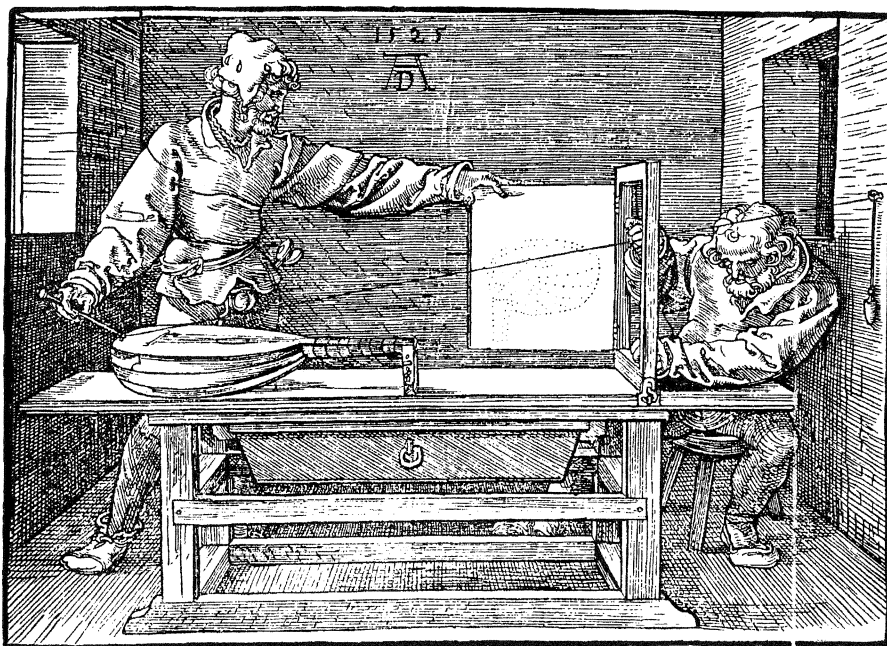


Représentation d'un hangar vu du haut



Mathématiser pour démontrer

Jusqu'ici c'est l'observateur-dessinateur qui a utilisé des règles en faisant un raisonnement étayé et conforté par des résultats cohérents et efficaces. Ces règles ont été établies par des artistes-mathématiciens⁸ de la Renaissance, capables de mettre simultanément en situation l'objet à dessiner, qu'ils placent dans un plan horizontal, et l'œil de l'observateur, qu'il représente par un point. Le rayon lumineux qui joint l'œil et l'objet est représenté par une droite. Un plan vertical – le plan du tableau – va symboliser la relation objet-observateur de la façon la plus simple qui soit. Un point de l'objet et le point O représentant l'œil de l'observateur déterminent une droite – le rayon lumineux – qui coupe le plan vertical : l'intersection sera la représentation du point de l'objet.



La gravure de Dürer placée ci-dessus, illustre parfaitement ce propos. Elle représente l'élaboration expérimentale, point par point, du dessin d'un luth : on voit que l'œil a été remplacé par un clou sur le mur, le rayon lumineux par le fil tendu, et les images des points du luth sont repérées dans le plan vertical par leurs distances aux bords du cadre, et reportées sur la feuille à côté.

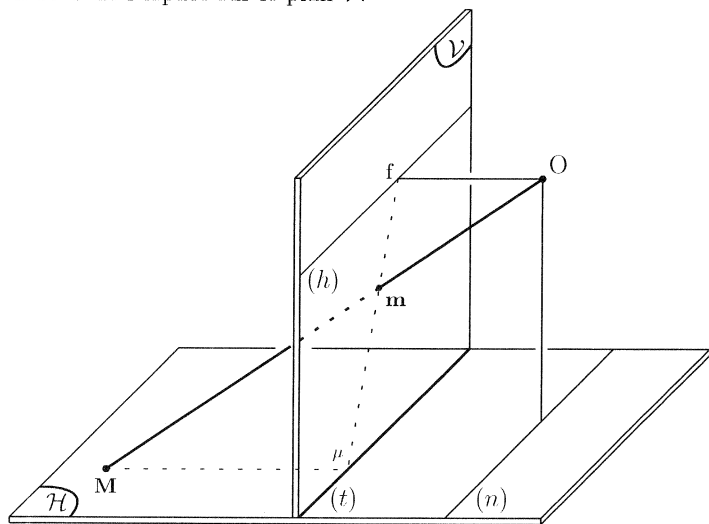
8. Alberti, Brunelleschi, Piero della Francesca, Viator ... et plus tard Desargues.
Cf Mais où est donc passée la troisième dimension ? de Didier BESSOT et Jean-Pierre LE GOFF dans "HISTOIRE DE PROBLÈMES, HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES" - Ed. ELLIPSES.

Si on reprend la démarche des artistes de la Renaissance, on se place dans l'espace usuel, on applique les propriétés d'incidence et ce qui en résulte dans le plan vertical quant aux propriétés de la représentation en perspective centrale. Cette démarche pourrait inspirer un travail au lycée avec des élèves de seconde ou de première. Les contenus des programmes actuels le permettent⁹. Il est plus ambitieux de penser que dans l'avenir, il pourrait déboucher en terminale sur une introduction à la géométrie projective plane par les coordonnées homogènes.

Image d'un point.

L'observateur (repéré par son œil O) étant placé sur un plan horizontal $\mathcal{H}$, regarde devant lui et dessine sur un plan vertical $\mathcal{V}$. Si M est un point d'un objet situé derrière le tableau, le rayon visuel (OM) allant de l'œil à l'objet rencontre le plan ($\mathcal{V}$) en m qui sera l'image du point M sur le tableau.

Ce qui conduit à considérer d'un *point de vue mathématique*, la correspondance qui à tout point M de l'espace fait correspondre l'unique point m (quand il existe) de $\mathcal{V}$ aligné avec O et M . C'est la projection centrale (ou perspective à point de fuite) de centre O de l'espace sur le plan $\mathcal{V}$.



- Elle n'est pas définie pour tout point du plan $\mathcal{V}_o$ parallèle à $\mathcal{V}$ passant par O .
- L'image d'une droite (d) est en général une droite, intersection du plan (O,d) et du plan $\mathcal{V}$.

Si on se limite à étudier les images des points de $\mathcal{H}$, trois droites apparaissent qui vont jouer un rôle particulier :

- la ligne de terre (t) intersection de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{V}$ sera une droite de points fixes.

9. On ne peut pas en dire autant des horaires impartis aux mathématiques aujourd'hui.

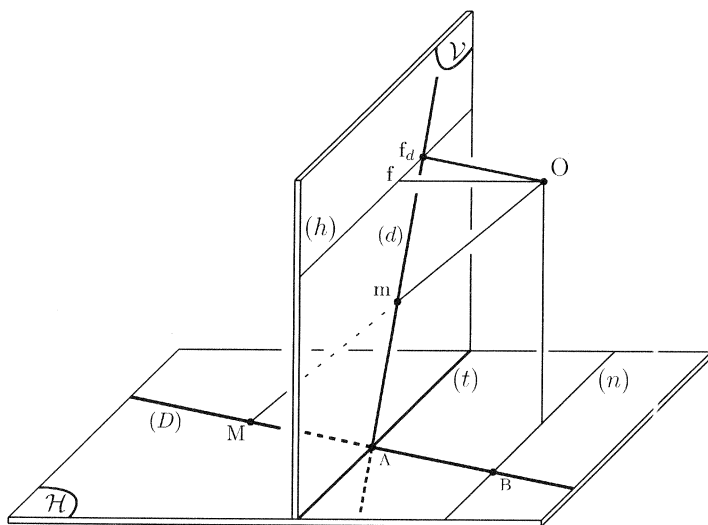
- la ligne neutre (n), intersection de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{V}_o$: ses points n'ont pas d'image.
- la ligne d'horizon (h) parallèle à $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{V}$, intersection de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{H}_o$ plan parallèle à $\mathcal{H}$ passant par O .

Tous les points de $\mathcal{V}$ seront atteints par la correspondance sauf ceux situés sur la droite (h). Le point O se projette orthogonalement sur le plan $\mathcal{V}$ en un point f de (h) appelé le point de fuite principal.

Pour construire le point m , on projette M en μ orthogonalement sur $\mathcal{V}$. Le plan $(OM\mu)$ contient la droite (Of) qui est parallèle à $(M\mu)$. Il coupe $\mathcal{V}$ suivant la droite (μf) qui rencontre (OM) en m .

En peinture, on considère les points situés dans le demi-espace limité par $\mathcal{V}$ qui ne contient pas O et dans $\mathcal{H}$, le demi-plan limité par (t) qui ne contient pas (n) .

Image d'une droite.



Soit (D) une droite du plan $\mathcal{H}$ qui coupe la ligne de terre (t) en A . Le plan $(D; O)$, déterminé par la droite (D) et le point O , coupe le plan $\mathcal{V}$ selon la droite (d) qui est l'image de (D) .

Le plan $(D; O)$ coupe la ligne d'horizon (h) en f_d . Comme le plan $(h; O)$ est parallèle au plan $\mathcal{H}$, la droite (Of_d) est parallèle à la droite (D) : f_d est le point de fuite sur (h) lié à la direction de la droite (D) .

Tout point M de (D) n'appartenant pas à (n) a une image sur $\mathcal{V}$.

Le point A sur (t) est invariant.

Le point à l'infini de (D) a son image en f_d .

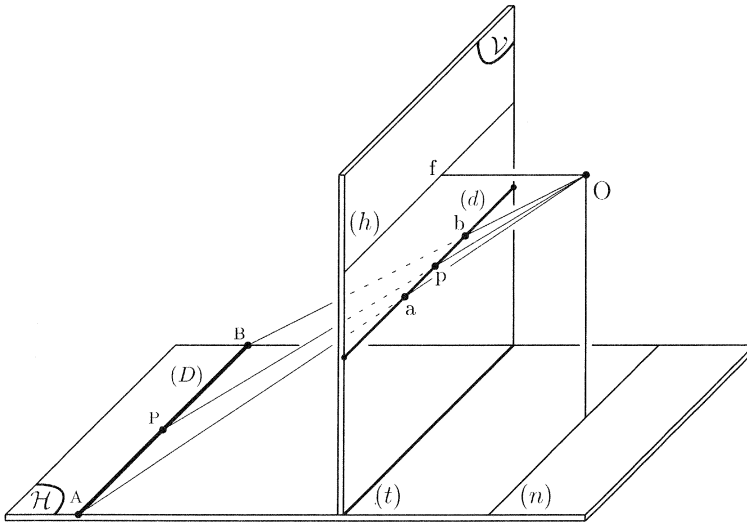
On retiendra la propriété :

L'image d'une droite non parallèle à la ligne de terre (t) est une droite passant par le point de fuite annexe f_d lié à la direction de (D).

Remarque.

On appelle B le point à l'intersection de (D) avec (n). L'image de la demi-droite ouverte $]BA)$ est la demi-droite ouverte $]f_dA)$.

Image d'une droite parallèle à la ligne de terre (t).



La droite (AB) est dans le plan $\mathcal{H}$ parallèle à la ligne de terre (t) et distincte de la ligne neutre (n) ; on la note (D). Le plan (D ; O) déterminé par la droite (D) et le point O coupe le plan $\mathcal{V}$ selon la droite (d) qui est son image. Cette droite (d) est parallèle à (t) et à la ligne d'horizon (h).

A a pour image a , B a pour image b et le segment $[AB]$ a pour image le segment $[ab]$.

Les triangles OAB et Oab sont homothétiques. Si on ajoute un point quelconque P sur $[AB]$ et son image p sur $[ab]$, on a l'égalité des rapports

$$\frac{AP}{AB} = \frac{ap}{ab}.$$

En particulier si P est le milieu de $[AB]$ son image p est le milieu de $[ab]$ l'image de $[AB]$.

On retiendra les propriétés :

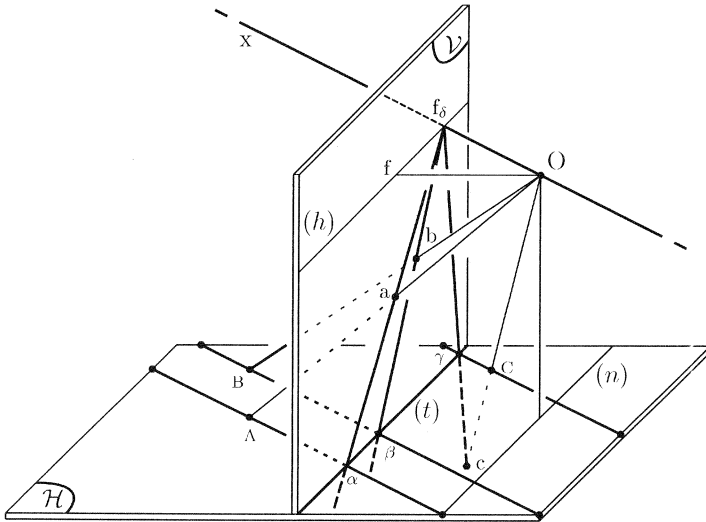
L'image d'une droite de $\mathcal{H}$ parallèle au plan $\mathcal{V}$ est parallèle à la ligne d'horizon.

Lorsqu'un segment est parallèle à la ligne d'horizon, l'image de son milieu est le milieu de l'image de ce segment.

Image de droites à supports parallèles.

Si les droites sont parallèles à la ligne de terre leurs images seront parallèles à la ligne d'horizon et parallèles entre elles.

On considère maintenant des droites parallèles entre elles qui coupent la ligne de terre (t).



On a tracé des droites parallèles appartenant à la direction δ . Elles coupent la ligne de terre en α, β, γ . Sur chacune d'elles se déplace respectivement les points A, B, C qui ont pour images a, b, c , sur le plan $\mathcal{V}$.

Les plans $(A\alpha; O)$, $(B\beta; O)$, $(C\gamma; O)$ ont une droite commune qui passe par O et qui appartient aussi à la direction δ . Cette droite coupe la ligne d'horizon (h) en f_δ qui est le point de fuite annexe lié à la direction δ .

L'intersection de ces plans avec $\mathcal{V}$ est formé des droites concourantes $(f_\delta\alpha), (f_\delta\beta), (f_\delta\gamma)$, qui se rejoignent en f_δ .

On retiendra la propriété :

Les droites parallèles du plan $\mathcal{H}$ ont pour images des droites concourantes sur la ligne d'horizon en un point qui est le point de fuite lié à la direction de ces parallèles.

Si les droites de $\mathcal{H}$ sont parallèles à la ligne de terre, leurs images sont des droites parallèles à la ligne d'horizon.

Conclusion.

On reproduit ici un extrait de l'article de Rudolf Bkouche dans Repère IREM n°39.

“Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science”

Le problème de la représentation est exemplaire en ce sens que la théorisation, ici la géométrisation, se construit aux limites d'une pratique, pratique du peintre ou pratique architecturale si l'on se place du point de vue de l'histoire, mais simplement pratique du dessin si l'on se place du point de vue de la classe. La théorisation se situe ici à deux niveaux, le premier répond à la question du “comment faire” lorsqu'on ne sait pas ou on ne sait plus faire, le second répond à la question de la légitimation des réponses à la première question.

On peut alors considérer cet usage de la représentation perspectiviste dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace de deux façons. Ou bien l'on considère que la question de la représentation est une simple motivation pour “vendre” la géométrie dans l'espace et dans ce cas la problématisation est une donnée extérieure, une belle histoire qui peut convaincre quelques élèves et laisser d'autres sceptiques¹⁰ ; ou bien l'on considère que la problématique de la représentation participe de la géométrie elle-même et dans ce cas la pratique perspectiviste participe pleinement de l'enseignement de la géométrie.

Il faut rappeler ici l'une des difficultés de l'enseignement de la géométrie dans l'espace ; d'une part la nécessité d'utiliser de représentations planes pour étudier les situations spatiales, d'autre part la nécessité de règles de représentation s'appuyant sur la géométrie dans l'espace. Le recours à l'histoire et en particulier à celle du développement de la représentation perspectiviste permet d'aborder la difficulté en montrant comment une pratique du dessin a conduit d'une part à construire les concepts théoriques qui la légitiment et d'autre part comment la construction de tels concepts a conduit la théorie à s'émanciper de ses origines avec le développement de la géométrie projective¹¹. En ce sens, on peut concevoir que l'enseignement de la géométrie dans l'espace prenne en compte assez tôt le point de vue projectif.

10. ainsi, lors d'une exposition sur les mathématiques, des élèves protestaient contre une partie consacrée à la peinture en proclamant : “la peinture c'est beau, les mathématiques c'est pas beau”.

11. Jean-Pierre Le Goff, “La perspective en première scientifique : une certaine suite dans les

On voit ainsi l'apport d'une mise en perspective historique, d'abord la mise en évidence du rôle joué par une pratique (ici le dessin) dans le développement d'une théorie mathématique, ensuite la façon dont cette théorie d'une part légitime des règles pratiques et d'autre part s'émancipe de cette pratique pour constituer un nouveau domaine de la science. C'est alors une façon de rompre avec la dichotomie "mathématiques pures/mathématiques appliquées" et de mieux comprendre comment les mathématiques dites pures interviennent dans la connaissance du monde.

Pour en savoir plus, on pourra consulter :

- "Mais où est donc passée la troisième dimension ? " de Didier BESSOT et Jean-Pierre LE GOFF dans *"HISTOIRE DE PROBLÈMES, HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES"* - Ed. ELLIPSES.
- "DESTIN DE L'ART, DESSEINS DE LA SCIENCE". Actes du colloque A.D.E.R.H.E.M. de Caen (1986), diffusé par l'IREM de CAEN.
- "LA PLACE DE J.-H. LAMBERT (1728-1777) DANS L'HISTOIRE DE LA PERSPECTIVE" de Roger LAURENT et Jeanne PEIFFER. Ed ...
- "LA PERSPECTIVE EN QUESTION" de Thérèse GILBERT, Ciaco éd., Louvain-la-Neuve.
- *LES CAHIERS DE LA PERSPECTIVE*, IREM de CAEN. 5 numéros parus.
- *GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE ET CALCUL VECTORIEL*, de Philippe LOMBARD, Topiques éditions.
- *LA RÈGLE, UN INSTRUMENT DE LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE*, de Rudolf BKOUCHE, bulletin APMEP N° 415 avril-mai 1998.

idées", *Repères IREM* n°7, avril 1992 ; Didier Bessot et Jean-Pierre Le Goff, "Mais où est passée la troisième dimension?" in *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*, Commission Inter-IREM Épistémologie, Ellipse, Paris 1993.

Cet article a été inspiré dans une très large mesure par la publication:

LA PERSPECTIVE CENTRALE AU COLLÈGE
et ... peut-être au lycée

BERNARD CAZIER - FRANÇOISE CHAMONTIN
IREM de LILLE
1999

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Lille
USTL - Bât.M1 - 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
email: irem@univ-lille1.fr - Site web: www.univ-lille1.fr/irem/
tél 03 20 43 41 82 fax 03 20 33 71 61