Le geste géométrique,

ou l'acte de démontrer

Jean-Claude Duperret

IREM de REIMS

La géométrie du collège (et maintenant de la seconde) me semble un lieu privilégié pour rendre les mathématiques vivantes auprès de nos élèves : avec peu d'outils, pour la plupart hérités des Grecs, on peut proposer à nos élèves de véritables problèmes[1]*, les re-situer dans un contexte historique qui en montre les enjeux.*

Cette réflexion a été à l'origine de la première version de cet article. Celle-ci a suscité de nombreuses réactions : au-delà de la quantité, je tiens à souligner la qualité des critiques que j'ai reçues. J'ai pris le maximum de l'apport de chacun, et cet article est maintenant un peu celui de ces collègues qui m'ont fait avancer dans ma réflexion. C'est une chance que nous avons dans les IREM que ces débats d'idées, malheureusement réservés à trop peu d'enseignants. En guise de bibliographie, j'ai tenu à les citer pour les remercier de leur apport . Quant à donner de façon précise les références de tous ceux qui m'ont au cours des années fait avancer dans ma réflexion, j'en étais incapable ; je me suis donc contenté de flécher au fil du texte les contributions directes.

Je vais cependant me permettre d'en mettre deux en avant. Tout d'abord Rudolf Bkouche[2]*, qui m'a envoyé un texte d'une grande profondeur : il m'a permis de corriger certaines erreurs historiques, mais surtout de relier des "gestes" que je propose dans cet article : l'outil formidable que sont les cas d'égalité et de similitude des triangles, qui ont été le fondement de mon apprentissage de la géométrie en tant qu'élève, la force des transformations, que j'ai découvert en tant qu'enseignant avec les nouveaux programmes de 1986, la richesse de la méthode des aires. Ensuite Daniel Perrin*[3]*, qui m'a permis de faire le lien avec une vision plus moderne de la géométrie, celle de Félix Klein dans le programme d'Erlangen : une géométrie est un ensemble muni d'un groupe de transformations. Je n'avais ni la place, ni la compétence pour développer ici cet apport, et je renvoie le lecteur au "Rapport d'étape*

1. Au fil des années, j'ai proposé à mes élèves de collège la plupart des activités de ce texte, mais jamais sous cette forme "brute" destinée à des enseignants.

2. Au delà du texte privé que j'évoque ci-dessus, je tiens à signaler sa brochure "Autour du théorème de Thalès" et son article dans la brochure "Autour de Thalès" de la commission Premier Cycle.

3. Au-delà du rapport d'étape de la CREM que je cite, je renvoie à son article dans le bulletin n° 431 de l'APMEP de novembre 2000.

sur la géométrie"[4] *de la CREM (commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques).*

Une critique que la plupart m'ont faite était qu'emporté par une certaine passion, j'avais tendance dans cette première mouture à privilégier des démarches qui m'apparaissaient "naturelles" au détriment d'autres qui leur semblaient plus pertinentes. Cette critique justifiée faisait que mon article allait à l'encontre de son objectif, car apprendre à nos élèves à faire des mathématiques, c'est leur apprendre à se déplacer pour voir la même chose de plusieurs façons. Il n'y a pas de chemins privilégiés, et, comme dit le proverbe russe, le chemin le plus court est celui que tu connais.

Nos élèves peuvent-ils découvrir seuls ces différents chemins ?

Il y a, je crois, une certaine forme de "compagnonnage" à avoir avec eux pour les leur montrer (je prends le risque d'une levée de bouclier en employant ce terme). Je suis profondément persuadé que l'élève est tout aussi sensible au rapport qu'a le professeur avec l'objet qu'il veut lui enseigner qu'à cet objet lui-même. L'important est d'éclairer sans éblouir, de faire en sorte que l'élève comprenne à la fois comment l'enseignant procède et pourquoi il a fait ce choix, même si dans un premier temps il se sent incapable de mener tout seul le travail.

L'objectif est que l'élève puisse à terme, devant un nouveau problème, prendre seul une décision raisonnable pour sa résolution. Je rejoins ici Jean-Pierre Kahane, à qui je dois aussi beaucoup : «Rien n'est plus beau en mathématiques qu'une belle démonstration, rien n'est plus bouleversant que de découvrir une démonstration par ses seules forces. Je souhaite que nous ayons en vue un objectif inaccessible : que chaque enfant, que chaque adulte, ait éprouvé au cours de sa vie la joie de la contemplation et de la découverte mathématique»[5].

1 - Les enjeux d'un enseignement de géométrie pour tous

La démonstration : objet de luxe pour nantis des mathématiques. C'est ainsi qu'elle est trop souvent perçue par beaucoup de nos élèves. C'est le souvenir qu'elle laisse chez la plupart des adultes. Alors faut-il renoncer à faire des démonstrations ? Mais faire des mathématiques sans démontrer, est-ce encore faire des mathématiques ?

Quelle vision nos élèves ont-ils de la démonstration, quelle image en garderont-ils plus tard ? Une forme d'écrit, intimement liée à la géométrie, excroissance sans enjeu d'un problème qu'on a déjà résolu ? Une explication canonique, dont le rituel est de partir des hypothèses pour aller vers la conclusion, en utilisant des "donc" et des "d'où"[6] ?

S'ils ne gardent que ce côté assez réducteur de cette forme de raisonnement hypothético-déductive comme image de la démonstration, on comprendra leur réticence, voire leur refus d'y adhérer. Si le souvenir qu'ils garderont des mathématiques

4. paru dans le bulletin n° 430 de L'APMEP.

5. Jean-Pierre Kahane, *Profession de foi* in "Mathématiques au collège : les enjeux d'un enseignement pour tous" Actes du Colloque de la Commission inter-IREM Premier Cycle - Juin 1999. IREM de Lille éditeur

6. Voir Jean Houdebine in *REPÈRES-IREM n° 1*

est cette vision, on comprendra que tant d'adultes nous renvoient une image aussi négative de notre discipline.

Mais leur a-t-on donné conscience que dès qu'ils s'attaquent à un problème, ils raisonnent, et que s'ils en trouvent une issue, ils ont fait "acte de démontrer"?

Un enfant de CM2 qui, devant le dessin d'un carré, prend sa règle et mesure les quatre côtés et déclare qu'ils sont égaux, prend son équerre et mesurant un des quatre angles déclare qu'il est droit, et affirme alors: «c'est bien un carré», a fait "acte de démontrer"[7]. Il l'a fait avec son niveau de conceptualisation, de traitement, et de validation.

Mais ne nous interdisons-nous pas dans notre enseignement de mathématiques de "flécher" cette action comme une forme, encore naïve, de démonstration? N'attendons-nous pas trop l'accès à une "figure idéelle" et à une "argumentation uniquement discursive" pour oser déclarer: «voilà vraiment ce qu'est une démonstration»? Cela conduit beaucoup de nos élèves, qui ont pourtant maintes fois fait cet acte de démontrer à quitter l'enseignement des mathématiques avec le sentiment profond qu'ils ne savent pas et ne sauront jamais démontrer.

Démontrer, c'est un geste, ou une succession de gestes, et en aucun cas une contemplation passive d'une figure. Le caractère spécifique de la géométrie est qu'on peut "voir" ces gestes. Apprendre à démontrer en géométrie, c'est apprendre "le geste géométrique". Ce geste géométrique n'est pas unique, et chaque problème rencontré pourra fournir différents chemins d'accès vers la compréhension et la validation: le "meilleur" pour chacun d'entre nous est lié à notre expérience et à l'expertise que nous avons développée; mais il ne sera pas forcément le "meilleur" pour d'autres. C'est ce que je vais essayer d'illustrer dans ce texte.

Quel va donc être ce long cheminement qui va conduire à la maîtrise de ce geste géométrique?

Lorsque l'enfant entre à l'école à trois ans, il y entre avec sa perception du **"monde physique"**[8]: il y a appris très tôt à percevoir des objets (boules, balles, ...). Certains objets vont alors acquérir un statut plus particulier: ce sont les objets de la géométrie élémentaire, objets plans comme le carré, le rectangle, le disque, objets de l'espace comme le cube, la boule. Quelle perception première a-t-il de ces objets? La ligne qui "entoure" et/ou la surface elle-même pour les objets plans, la surface qui "enveloppe" et/ou la portion d'espace pour les objets de l'espace?

C'est en tout cas un premier niveau d'abstraction qu'il va alors réaliser avec la reconnaissance de ces "formes": j'appelle ici "forme" le couple "objet géométrique-contour" (ce qui ne pose aucune ambiguïté pour les objets de la géométrie élémentaire). Le second niveau d'abstraction sera le "dessin" de ces formes, avec une appréhension séquentielle des gestes à accomplir pour le réaliser (je reviendrai plus loin sur la spécificité de la représentation plane des objets de l'espace).

---

7. J'emprunte cette expression à Claudine Ruget, car je la trouve très signifiante

8. Je resterai volontairement très ambigu sur ce que je mets sous ce vocable "monde physique", laissant au contexte le soin de l'éclairer: monde sensible, monde concret, monde réel, réalité abstraite sur laquelle les mathématiques peuvent raisonnablement s'exercer ...

Pour entrer pleinement dans le "monde mathématique", une dernière abstraction sera nécessaire : c'est le passage du "dessin" à la "figure". Tant de choses ont déjà été écrites sur ce "statut de la figure" [9] que je préfère en donner une définition simpliste : c'est pour moi le couple "dessin-regard mathématique". Le carré que reconnaît l'enfant de trois ans est le même que celui qu'il construira en cycle III ou que celui sur lequel il tentera une démonstration au collège, et ces trois carrés sont pourtant profondément différents. Ce qui change , c'est le regard qu'on porte sur cet objet, et j'utilise ici le mot regard non pas comme contemplation, mais comme action possible et gestes associés. Quand un élève de quatrième prend sa règle pour vérifier que c'est un carré, son geste traduit qu'il ne voit pas le carré que nous aimerions qu'il voie. C'est par sa capacité à avoir une action raisonnée sur la figure que nous saurons qu'il est pleinement entré dans le monde des mathématiques.

Vous allez trouver ces derniers propos en contradiction avec mon introduction. Il n'en est rien, car pour moi, le raisonnement se fait aussi bien sur la forme, sur le dessin que sur la figure, et l'acte de démontrer est un constant aller-retour entre ces trois niveaux. Du reste, devant l'énoncé «soit $ABCD$ un carré», lequel d'entre nous se contentera de placer les quatre points : nous "tracerons" le carré sur notre feuille ou dans notre tête, même si notre action est purement mathématique, pour "voir" à la fois le polygone plein, le contour et les sommets.

Le geste géométrique va associer "regard", "actions", et "acte de démontrer". Quelles sont donc ces actions ? Je vais essayer d'en lister un certain nombre, en les séparant de façon artificielle car elles sont toujours en interaction. J'ai fait le choix de ne pas développer celle qui consiste à algébriser la géométrie (le repérage, le vectoriel, ...). Pour illustrer ces actions, je vous propose quelques "balades géométriques", et vous les ferez à votre guise, en flânant ou en vous hâtant selon que vous les connaissiez déjà ou non : vous trouverez en annexe les raccourcis # de ces promenades.

2 - Connaissance, reconnaissance et comparaison des formes, des grandeurs et des mesures

Connaître une forme est la première action nécessaire pour travailler dessus : cette connaissance peut se faire soit au premier niveau de la perception purement visuelle (voire gestuelle), soit au second niveau physique du dessin, soit au troisième niveau mathématique des propriétés.

Reconnaître une forme, c'est pouvoir la discerner des autres . Là encore ce peut être purement visuel ; physique en utilisant une "caractérisation", qui à ce niveau peut être encore redondante et qu'on validera avec des instruments comme la règle ou l'équerre ; mathématique avec une "propriété caractéristique" et une "hiérarchisation" de cette forme par rapport à d'autres.

9. Voir en particulier Raymond Duval in Repères-IREM n° 17

Mais comparer des formes, cela a-t-il un sens ? Cela peut se faire à tant de niveaux :

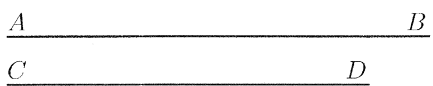
⋆ “égalité” de deux formes,

⋆ différenciation primaire : un triangle et un carré n'ont pas le même nombre de côtés, ...

⋆ différenciation au niveau des grandeurs : longueur, aire, volume, angle,

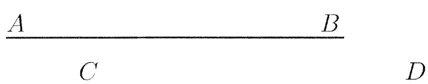
⋆ différenciation numérique par la mesure.

Attacher à une forme une ou des grandeurs, à ces grandeurs des mesures, à ces mesures des nombres en passant par l'unité est un apprentissage long, difficile et indispensable pour amener à changer le premier regard naïf de l'élève vers une forme porteuse de plusieurs attributs sur lesquels vont s'exercer les mathématiques. Il est donc indispensable de “sonder” régulièrement les élèves sur quels attributs ils fondent leur différenciation ou leur comparaison de deux formes. Prenons les exemples suivants pour éclairer mon propos :



Si l'on demande à des élèves en début de collège quel est le plus grand de ces deux segments, tous répondront sans hésiter [AB].

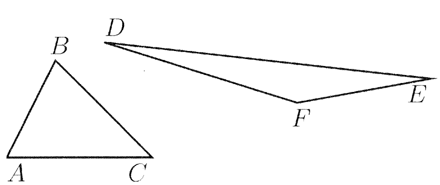
C'est évidemment au niveau de la longueur qu'ils auront effectué cette comparaison, de façon purement perceptive.



Devant ces deux segments, ils seront amenés à utiliser un geste géométrique, ici celui du report (avec un compas, une règle, et pourquoi pas une ficelle).

Déclarer qu'ils sont “égaux” relèvera alors d'une convention tacite qui prend en compte l'approximation du geste physique (à l'épaisseur de la mine près, au mm près, ...).

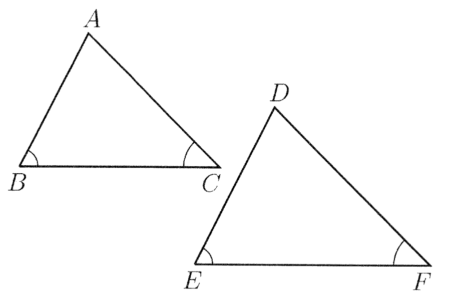
La “grandeur” d'un segment est donc naturellement la longueur, et “l'égalité”, qui ne peut être ici que de l'ordre du “physique”, est liée aux limites de leur perception ou de leurs instruments de mesure.



Si maintenant on leur demande quel est le plus grand des deux triangles ci-contre, leur hésitation sera beaucoup plus grande. Mais, expérience faite, j'ai toujours constaté que la majorité choisissait le triangle EDF.

Et si on leur fait expliciter leur choix, c'est en général parce qu'il “tient plus de place”. Nous les attendons sur périmètre et aire, et ils sont sur le registre de “l'encombrement”. On peut du reste parfaitement donner un sens mathématique à cet encombrement avec la notion de diamètre d'une partie.

En l'absence de toute donnée, comparer leurs périmètres et leurs aires sera là encore du domaine du physique, mais avec un passage mathématique par report, mesure et formule.



Prenons le dernier exemple ci-contre, où l'égalité des angles est indiquée. Devant la même question, aucun élève n'hésitera, et tous déclareront que le plus grand des deux triangles est EDF.

Ils sont donc tous sensibles à la notion de "même forme" (selon la terminologie du nouveau programme de seconde, à laquelle je préférerai "semblable" lorsqu'on est dans le registre des mathématiques), et intuitivement ils comprennent que les trois grandeurs ci-dessus auront des mesures qui conduiront à la même réponse pour la comparaison.

3 - Opérations sur les formes

Je parle d'opérations sur les formes, et non sur les figures, car ces opérations sont à la fois associées à des gestes physiques et à des gestes mathématiques. Je les rangerai en quatre catégories :

Transformation isométrique :

Très tôt un enfant utilise de telles transformations dans l'espace sur des puzzles où très vite il comprendra que telle pièce doit aller à telle place : ce geste raisonné repose sur deux informations, "l'égalité" reconnue a priori de deux formes, le "mouvement" qui permettra de valider ce choix. Cela nous renvoie au débat actuel sur les "cas d'égalité" des triangles qui apparaissent comme un choix contre les transformations. Il n'y a pas lieu d'opposer ces deux approches, mais d'en montrer la complémentarité : avec une isométrie, je suis sûr d'obtenir une "copie conforme" de mon objet. Si j'ai les moyens d'affirmer que deux objets sont "copie conforme", je sais qu'il y a une isométrie qui me permet de passer de l'un à l'autre. Il faut du reste distinguer le "mouvement" qui permet de définir l'égalité des figures et la notion d'isométrie. Le geste géométrique se constitue de ces différents aspects.

Agrandissement, réduction :

On retrouve dans cette seconde action les aspects vus ci-dessus : agrandir ou réduire un objet, acte qui en préserve les "proportions", pouvoir justifier que deux objets sont "semblables" (la caractérisation de deux triangles semblables par l'égalité de leurs angles est à mon sens tout à fait à la portée d'élèves de collège). Cette seconde action est liée au numérique avec le modèle de la proportionnalité et va pleinement devenir un geste géométrique avec "Thalès".

Pliage, découpage, puzzle :

Il s'agit là de "manipulations physiques" auxquelles nous allons donner un statut mathématique. Découpage et puzzle nous rapprochent des mathématiques chinoises, avec leur technique de "rapiéçage". Toutes les activités que l'on peut faire avec le "Tangram" sont extrêmement formatrices. Ces actions sont au centre de la première balade que je vous propose.

Le mouvement "pliage" est intimement lié à l'isométrie "symétrie axiale", et pourtant ils sont deux actes profondément différents, même si leur "conclusion" est la même : la symétrie axiale est une isométrie indirecte du plan, le pliage est un mouvement de l'espace qui se traduit mathématiquement par une isométrie directe de l'espace. Mais ce passage physique dans l'espace éclaire pleinement l'action mathématique dans le plan. La combinaison des deux participent là encore à l'acquisition du geste géométrique.

Déformation :

Déformer, c'est modifier la forme, tout en en gardant des caractéristiques et en s'attachant à certains invariants. C'est par déformation que l'enfant va construire de nouvelles formes à partir d'anciennes : partant de la figure équilibrée qu'est le carré, il va la déséquilibrer pour en faire un rectangle : il constatera qu'il a gardé les quatre angles droits, l'égalité des longueurs des diagonales, donc la cocyclicité, et qu'il a perdu la symétrie par rapport à ces diagonales, c'est à dire une possibilité de pliage. A cet instant de son apprentissage, un carré ne peut être un rectangle, et ce n'est que plus tard qu'il apprendra à réorganiser toutes ces nouvelles formes (rectangle, losange, parallélogramme) pour y réintégrer le carré.

C'est certainement un des gestes les plus difficiles, mais les plus porteurs de la géométrie : passer du cercle à l'ellipse, du triangle équilatéral au triangle isocèle par affinité orthogonale, et s'assurer ainsi de l'invariance des rapports d'aire par cette déformation : déformer un triangle en s'attachant à conserver son aire.

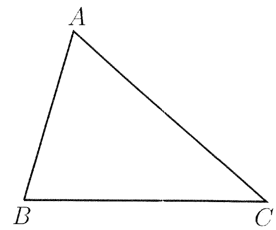
Première balade ... dans les aires[10]

J'ai plus avant posé la question de comparer deux triangles ABC et DEF. Je vais préciser maintenant que je souhaite comparer leurs aires. Pour cela, revenons à la méthode des aires qui permet, via le "découpage" des figures et leurs "recombinaisons", de comparer les aires de deux "formes" différentes. C'est cette méthode qui permet d'établir les formules usuelles. On la trouve dans les Éléments d'Euclide. Je vous propose comme première promenade de découper un triangle pour en faire un carré de même aire. Cela illustrera certaines actions dont j'ai parlé dans le paragraphe précédent, l'obligation des différentes "actions" étant de conserver l'aire.

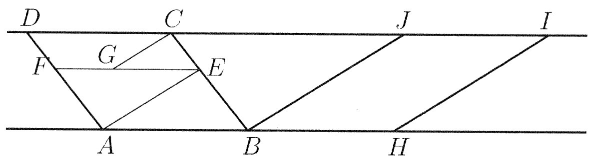
10. les # renvoient à une solution proposée en Annexes "Première balade"

Du triangle au parallélogramme :

// "Découper" le triangle ABC pour en "faire" un parallélogramme de base $[BC]$ et de même aire.



Du parallélogramme au parallélogramme :

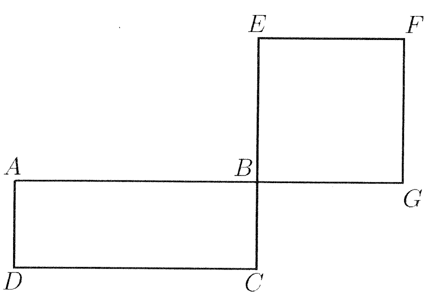


Les parallélogrammes $ABCD$ et $BHIJ$ ont deux "bases" de même longueur $AB = BH$. Le parallélogramme $ABCD$ a été découpé en 4 pièces en utilisant la direction de (BJ) : ABE, AEF, EGC, $DCGF$.
"Reconstituer" le parallélogramme $BHIJ$ avec ces quatre pièces.

Du parallélogramme au rectangle :

C'est évidemment un cas particulier de ce qui précède, une des directions de découpage s'en trouvant "simplifiée".

Du rectangle au carré



Il faut déjà construire un tel carré $BEFG$ qui ait même aire que le rectangle $ABCD$.

// Il faut ensuite trouver un découpage du rectangle qui permette de reconstituer le carré.

Du polygone au carré :

// Nous savons maintenant découper un triangle pour en faire un carré ; tout polygone se découpe en triangles. Le problème devient donc comment, à partir de deux carrés "faire" un carré, et comment découper ces carrés pour reconstituer ce troisième carré. À vous de jouer !

Bilan des “opérations” :

Le problème que nous venons de résoudre est pour moi un “vrai” problème, où prend pleinement sa dimension le geste géométrique : que d'opérations, que d'aller-retour entre figure et dessin, entre coups de ciseaux physiques et coups de ciseaux mathématiques.

La démarche a été double : d'abord construire les objets “convoités”, en utilisant et validant par “Thalès” pour le passage du rectangle au carré, par “Pythagore” pour le passage de deux carrés à un troisième carré ; ensuite imaginer les découpages. Pour ce second travail la prise d'information sur le dessin est absolument nécessaire, car ce sont les “bords” qui vont guider notre action : recherche simultanée de “pièces isométriques” et du “déplacement” correspondant. Les mathématiques nous garantissent alors que le “découpage” que nous avons effectué est un bon “puzzle”, c'est-à-dire qu'il ne laissera pas de “vide” ni de “superposition” entre les pièces lorsque nous retournerons dans le découpage physique.

Le résultat mathématique est d'une grande force : deux polygones de même aire sont “puzzle-équivalents” (théorème de Bolyai [11]).

Mener une telle activité avec des élèves de collège nécessite de revenir effectivement au problème physique, et procéder au découpage [12].

Thalès, Pythagore, c'est qui ?

Je ne peux ici m'empêcher une petite pause, en laissant la parole à Denis Guedj, qui, dans son livre «Le théorème du perroquet», fait dire, dans le chapitre 3 «Thalès, l'homme de l'ombre», à un de ses jeunes héros, Jonathan : «Comme tous les élèves du monde, Jonathan avait croisé Thalès à plusieurs reprises. Chaque fois, le professeur leur avait parlé du théorème, jamais de l'homme. D'ailleurs, en cours de maths, on ne parlait jamais de personne. De temps en temps, un nom tombait, Thalès, Pythagore, Pascal, Descartes, mais c'était seulement un nom. Comme celui d'un fromage ou d'une station de métro. On ne parlait pas non plus de où ni de quand ça s'était fait. Les formules, les démonstrations atterrissaient sur le tableau. Comme si personne ne les avait créées, comme si elles avaient été là de tout temps, comme les montagnes ou les fleuves. Encore que les montagnes, elles, n'avaient pas été là de tous temps. Et l'on arrivait à ceci que les théorèmes avaient l'air plus intemporels que les montagnes ou les fleuves ! Les maths, ce n'était ni l'histoire, ni la géographie, ni la géologie. C'était quoi au juste ? La question n'intéressait pas grand monde».

Faire Pythagore sans en parler, faire Thalès sans en parler, faire les équations sans parler d'Al Khwarizmi, faire des mathématiques sans jamais leur redonner leur consistance historique, c'est enlever au geste mathématique beaucoup de sa légitimité, et perdre l'occasion d'en faire une matière vivante auprès de nos élèves. Au

11. Ce résultat ne s'étend pas à l'espace ; on ne peut pas découper un tétraèdre pour en faire un cube.

12. J'ai souvent proposé cette activité à mes élèves, mais jamais d'un bloc : en quatrième, c'étaient les passages triangle-parallélogramme-rectangle ; en troisième le passage rectangle-carré.

delà des aspects anecdotiques, ce sont les aspects problématiques auxquels répondent ces théorèmes qui permet de donner du sens à leurs enjeux.

Thalès, Pythagore, c'est quoi ?

Je les ai "employés" sans aucune précision. Le théorème de Pythagore apparaît très souvent dans notre enseignement comme un lien entre le géométrique (le triangle rectangle) et le numérique (la relation liant la longueur de l'hypoténuse et celles des côtés de l'angle droit). Cette seule vision ne permet pas de trouver le passage ci-dessus de deux carrés à un troisième. Il faut donc revenir à l'enjeu historique de ce théorème, qui est celui de la quadrature de la figure formée par deux carrés, et à la configuration associée.

Le théorème de Thalès énonce lui, soit des égalités de rapports de longueurs (énoncé géométrique), soit des égalités de rapports de mesures de longueurs (énoncé numérique). Au-delà de son énoncé, "Thalès" pose un certain nombre de questions d'enseignement :

⋆ Est-ce une configuration ?

 Oui, dans la mesure où c'est une figure prototypique déclenchant un réflexe de reconnaissance.

⋆ Est-ce un théorème ?

 Oui, pourvu qu'on puisse s'appuyer sur des résultats déjà établis, et avec une méthode de démonstration reconnue.

⋆ Est-ce un modèle ?

 Oui, ou plutôt Thalès recouvre un certain nombre de modèles : le modèle géométrique (affine, vectoriel, transformations, ...) ; le modèle proportionnalité-linéarité avec la formalisation du lien entre parallélisme et égalité de rapports ; le modèle des grandeurs, avec le passage du commensurable à l'incommensurable ; le modèle numérique, avec le passage du rationnel au réel.

⋆ Est-ce un concept ?

 Oui, un concept fédérateur de tous ces modèles : la perception du monde et la géométrie élémentaire sont fortement liées à la notion de figures semblables : que la notion vague de "même forme" conduise à des relations de proportionnalité est un des points fondamentaux de l'enseignement de la géométrie au collège.

Voilà ce qui va être le fil conducteur de la suite de ce texte.

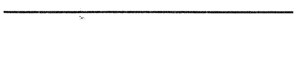
4 - La vision géométrique

C'est un des points les plus délicats. Comment savoir ce qu'un élève "voit" ? Nous pouvons le deviner en partie en le regardant agir : se contente-t-il de regarder, prend-il un instrument de traçage ou de mesure, est-il déjà en train d'écrire les propriétés de la figure, par exemple en la codant ?

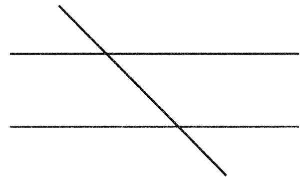
Existe-t-il des moyens pour aider l'élève à acquérir ce regard mathématique qui va transformer son dessin en figure ? Je crois que oui, et je vais essayer d'en cibler trois ici.

Les configurations :

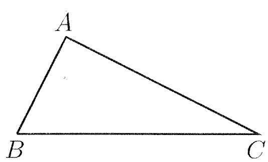
Je viens d'en donner une définition : figure prototypique déclenchant un réflexe de reconnaissance. Illustrons cela avec trois exemples :



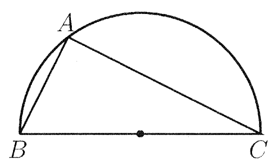
Voilà deux droites parallèles



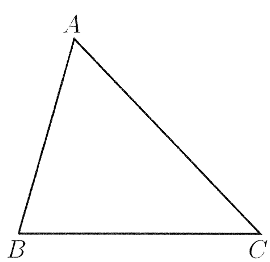
En y ajoutant une sécante, on crée une configuration, porteuse d'égalités d'angles.



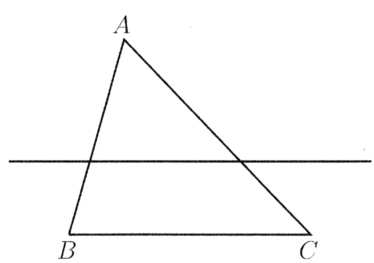
Voilà un triangle



En y ajoutant un demi-cercle de diamètre $[BC]$, on crée une configuration liée au triangle rectangle.



Voilà un triangle



En y ajoutant une parallèle à (BC), C'est Thalès !

Mais rester à ce stade de la reconnaissance est insuffisant : il faut arriver au stade de l'action, avec la mise en œuvre des propriétés portées par la configuration. Et là intervient un ordre : qui était le premier ?

⋆ Dans la première configuration, était-ce la parallèle ou les égalités d'angles ?

⋆ Dans la seconde, était-ce le triangle rectangle ou le demi-cercle ?

Pour que ces configurations aident vraiment l'élève dans son regard, il faut qu'elles deviennent dynamiques : il faut lui apprendre à retrouver la suite des "gestes" qui l'ont amené à cette configuration.

Un regard dynamique :

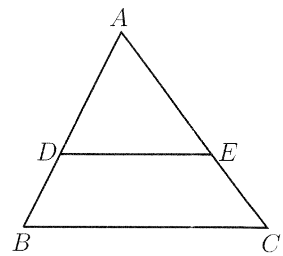
Avoir un regard dynamique sur une figure ou une configuration, c'est en voir les genèses possibles : cela permet la meilleure expertise des problèmes rencontrés, en choisissant la meilleure stratégie. Illustrons cela avec la troisième configuration, celle de Thalès [13] :

l'aspect "projection" :

Cet aspect met en évidence le "passage" de la droite (AB) à la droite (AC) dans la direction de (BC). Il donne l'égalité de rapports :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$$

C'est le rapport de projection, qui donnera le cosinus. Du point de vue de la proportionnalité, c'est un rapport "externe".



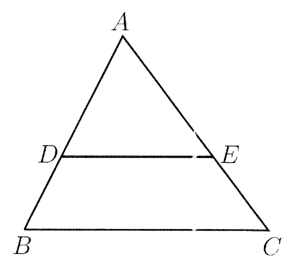
l'aspect "homothétie" :

Cet aspect met en évidence le passage du triangle ABC au triangle ADE. Il donne l'égalité de rapports :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

C'est le rapport d'homothétie. Du point de vue de la proportionnalité, c'est un rapport "interne".

Cet aspect permet une action sur le troisième côté de ces deux triangles, et au niveau de la trigonométrie, il donnera le sinus et la tangente.



Avoir cette double vision dynamique de Thalès [14] permet de choisir la mieux adaptée dans un problème.

Ajoutons que si ces deux aspects sont équivalents dans le plan, il n'en est plus de même dans l'espace. En prenant trois plans parallèles, et deux droites sécantes à ces plans, on retrouve la conservation des rapports : c'est l'aspect "projection". Mais si ces deux droites sont non coplanaires, il n'y a pas d'homothétie ! Il est dommage que les nouveaux programmes de troisième aient évacué cet aspect projection, le seul qui résiste dans l'espace.

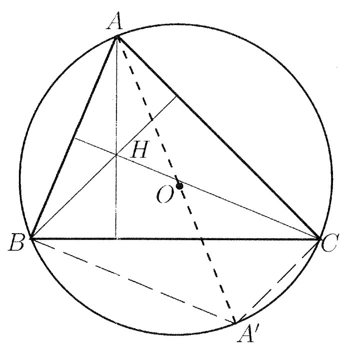
13. Voir Jean-Claude Duperret in Repères-IREM n° 20

14. Ce double regard conduit à deux configurations de Thalès (pour autant qu'elles appartiennent à Thalès, ce qui semble douteux) ; mais l'aspect projection "s'éclaire" bien mieux avec la configuration de deux droites "découpées par des segments parallèles".

Une aide possible, les logiciels de géométrie :

Les logiciels de géométrie sont un outil particulièrement formateur à ce regard mathématique dont je parle. Leurs possibilités dynamiques permettent de multiplier les exemples, de s'intéresser aux cas particuliers, et, par là, de conjecturer en situation de résolution de problèmes. Et pour construire les quelques "figures" de ce texte, il valait mieux que je connaisse un peu de géométrie !

Mais ce n'est qu'un outil, et le retour au "papier-crayon" est souvent indispensable pour la validation. C'est là que peuvent arriver les difficultés : l'émergence trop rapide et sans réflexion d'une conjecture peut être un obstacle à sa validation.



Prenons l'exemple suivant, bien classique pour les géomètres : soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O, B et C deux points fixes de ce cercle, A un point variable de ce cercle ; soit H l'orthocentre du triangle ABC.

Quel est le "lieu" de H quand A décrit $(\mathcal{C})$?

Devant le dessin de cette figure, différents gestes géométriques peuvent nous guider vers une solution, ceux-ci étant liés à notre habitus, à notre intuition (au sens cartésien du terme), à notre plus ou moins longue pratique. Pour moi, ma pratique me conduit, par la présence du cercle, à m'intéresser au point A' diamétralement opposé à A, et alors à "voir" un parallélogramme : $A'BHC$. Ma conclusion est que le lieu cherché est le cercle symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport au milieu I de $[BC]$.

La fonction "lieu" de certains logiciels de géométrie permet d'avoir instantanément le lieu cherché. Qu'avons-nous alors devant les yeux : deux cercles sécants en B et C. Le geste géométrique naturel pour valider (en tout cas chez les élèves de collège) sera la symétrie axiale par rapport à (BC) : me voilà bien éloigné de ma démarche, alors que ceux qui auront comme pratique l'angle inscrit s'y retrouveront sans problème.

Utilisons alors la fonction "trace" (bien meilleure par son côté dynamique) : le mouvement nous fait alors penser à une translation, mais comment "repérer son vecteur" . Ayant résolu le problème, je sais que j'ai effectué une double symétrie centrale pour aller de A à H, et la réponse est donc $2 \cdot \overrightarrow{OI}$. Mais il est plus facile de composer deux symétries centrales (c'est au programme de troisième) que de décomposer de façon intéressante une translation ! On peut cependant alors s'en tirer avec le théorème des "milieux".

Seconde balade ... dans l'espace[15]

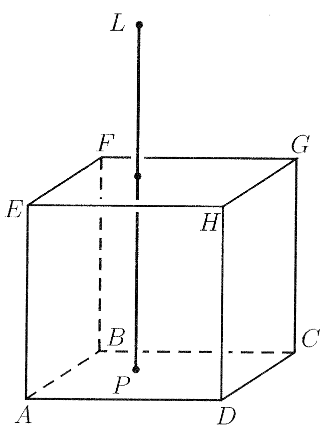
Une des principales difficultés de la vision dans l'espace, est que justement on ne peut voir entièrement l'objet ! Il faut donc, soit le faire tourner si c'est possible, soit tourner autour. La connaissance de l'objet va nous permettre d'économiser nos mouvements en "imaginant" ce qui est caché. C'est un des apprentissages fondamentaux du début de la scolarisation.

La seconde étape va être la représentation plane des objets de l'espace : c'est un apprentissage auquel nous ne consacrons pas assez de temps, et nous considérons trop souvent la "perspective cavalière" comme "naturelle" chez nos élèves de collège.

L'utilisation de logiciels de géométrie est là sans conteste un outil d'aide à la vision de l'espace, par la possibilité qu'il donne de faire tourner les objets, ou plus exactement leurs représentations planes.

De l'espace au plan : l'ombre

Une des spécificités de la "géométrie de l'espace", est que le raisonnement précède le dessin, que l'acte de démontrer est souvent nécessaire à la réalisation de la figure. Pour illustrer cela, je vous propose l'activité suivante, certainement classique pour beaucoup d'entre vous.



// $ABCDEFGH$ est un cube.
Une lampe est placée en L.
P est la projection orthogonale de L sur le plan $ABCD$.
Dessiner l'ombre du cube sur le plan $ABCD$.

Quel est le problème :
comment construire les intersections de (LE), (LF), (LG), (LH), avec le plan $ABCD$.

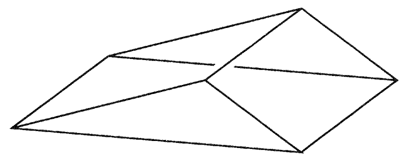
// Mais au fait, quelle est la forme de cette ombre ?

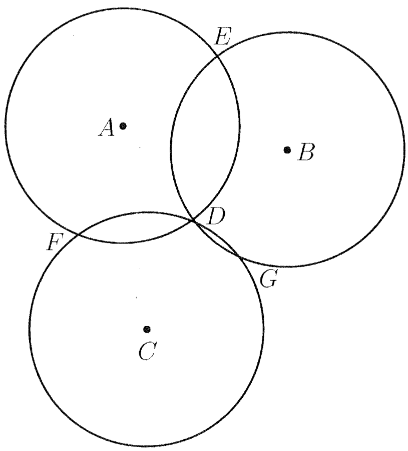
15. les # renvoient à une solution proposée en Annexes "Seconde balade"

Du plan à l'espace : les trois cercles

En éduquant la vision plane des objets de l'espace, on peut avoir une appréhension particulièrement dynamique de problèmes de géométrie plane.

Par exemple la transitivité de "l'équipollence" "s'éclaire" avec la vision d'un prisme droit :





// Soient trois cercles de même rayon, de centres respectifs A, B, C, et qui sont sécants en un point D.

Soient E, F, G les autres points d'intersection de ces cercles. Montrer qu'il existe un cercle passant par E, F, G (çà, ce n'est pas un scoop) de même rayon que les trois autres.

Oubliez les trois cercles, et "regardez bien les points". Faites apparaître des losanges : vous voyez mieux. Plongez alors dans l'espace à la recherche du point caché. Ramenez-le dans votre plan, et démontrez !

Ces deux exemples supposent que l'on sait voir dans une figure plane la projection d'une figure de l'espace. Ils illustrent deux propriétés de Desargues :

- ⋆ La configuration définie par la donnée de deux parallélogrammes contigus est la projection d'un prisme.
- ⋆ La configuration définie par les trois losanges $DAEB$, $DBGC$, $DCFA$ est la projection d'un cube.

5 - Démontrer : convaincre ou éclairer ?

Convaincre ou éclairer[16] : voilà un vieux débat du $XVII^{me}$ siècle, mais qui me paraît toujours d'actualité dans notre enseignement. C'est en tout cas une question qui est loin d'être simple. Tout dépend en effet du regard que l'on porte sur la situation que l'on étudie, autrement dit le regard mathématique est multiple, ce qui laisse entendre que les modes de compréhension d'une situation géométrique sont multiples. Parler de démonstrations "éclairantes" nous renvoie donc au problème

16. J'ai choisi de ne pas développer l'aspect historique de ce débat : je renvoie aux travaux d'Evelyne Barbin, qui ont donné lieu à plusieurs articles dans la revue Repères-IREM et dans le bulletin de l'APMEP.

suivant : la source d'où jaillit la “lumière” n'est pas la même pour tous. Au-delà de convaincre ou éclairer, pour moi **démontrer c'est avant tout donner du sens**.

Je vais essayer d'illustrer cela avec les théorèmes de Pythagore et Thalès. Ces deux théorèmes ont pour support la forme-clé de la géométrie plane élémentaire : le triangle. Cette présence constante peut se résumer avec le constat suivant : «donnez moi trois points, et je vous tiens le plan».

Pour démontrer, il faut des outils, et j'en vois trois fondamentaux pour le collège, que je vais aller chercher dans Euclide. Ces outils permettent une action de comparaison entre deux triangles placés dans une position particulière.

Des outils et des positions

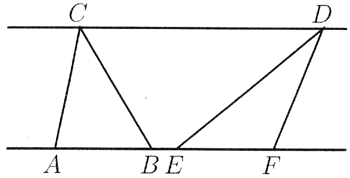
Outil 1 : les cas d'égalité des triangles.

J'ai déjà dit que je ne les opposais pas aux transformations, mais que je les mettais en interaction. Il est souvent plus facile de montrer que deux triangles sont “isométriques” que d'exhiber l'isométrie qui permet de passer de l'un à l'autre. On peut même aller jusqu'à parler d'unicité d'une forme triangulaire à une isométrie près (passage à la classe d'équivalence).

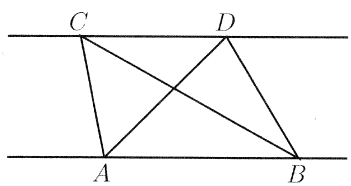
Je dirai que deux triangles égaux sont en position 1 : cette position me garantit “l'identité des triangles” à un “déplacement”[17] près.

Outil 2 : la proposition 38 du livre I d'Euclide.

«Les triangles construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux».



$Aire(ABC) = Aire(EFD)$



$Aire(ABC) = Aire(ABD)$

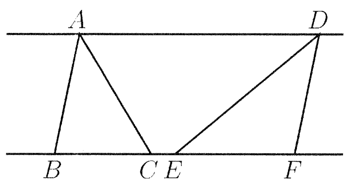
17. Je n'emploie pas ici le mot déplacement dans son sens mathématique.

"Égaux" s'entend ici au sens des aires ! Le mouvement qui permet de passer d'un triangle à un autre est une "déformation" qui conserve les aires. (D'un point de vue actuel, c'est l'invariance de l'aire par une transvection).

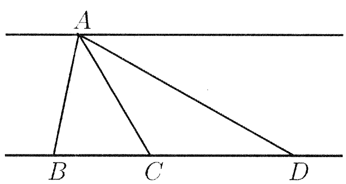
Je dirai que deux tels triangles sont en position 2 : cette position me garantit l'égalité des aires.

Outil 3 : la proposition 1 du livre VI d'Euclide.

«Les triangles qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases».



$$\frac{Aire(ABC)}{Aire(DEF)} = \frac{BC}{EF}$$



$$\frac{Aire(ABC)}{Aire(ABD)} = \frac{BC}{BD}$$

Cet outil permet de passer des rapports d'aires aux rapports des longueurs. (D'un point de vue actuel, c'est une dilatation).

Je dirai que deux tels triangles sont en position 3.

Il y a un quatrième outil fondamental : les cas de similitude. L'un d'eux est revenu en classe de seconde, mais il me semble que cet outil aurait sa place en collège, avec la position de triangles semblables.

Comme tout outil, il faut s'en servir régulièrement, sinon on est obligé de revenir à la "notice d'emploi" et focaliser sur l'outil et non sur son utilisation dans un problème qui le nécessite[18].

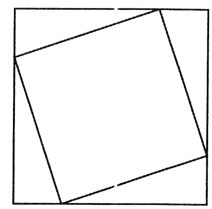
18. Ces outils sont un héritage des grecs : le fondement de la métaphysique grecque est de mettre en place la nécessaire harmonie entre le discours rationnel et le monde réel

Démonstrations du théorème de Pythagore :

Démontrons le théorème dit direct :

«Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés».

Démonstration 1

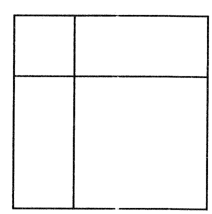


C'est la démonstration classique qu'on trouve dans la plupart des manuels.

En disposant "quatre fois" le triangle rectangle comme ci-contre, on montre qu'on obtient deux carrés, et on calcule l'aire du grand de deux façons.

La méthode usuelle pour arriver à la "relation de Pythagore" est alors de passer par l'algèbre. J'y vois trois inconvénients :

- ⋆ Pour pouvoir la rédiger sans avalanche d'écriture, on est amené à appeler a la longueur de l'hypoténuse, b et c les longueurs des côtés de l'angle droit ; la relation obtenue «$a^2 = b^2 + c^2$» éloigne définitivement du triangle, les noms des sommets n'apparaissant plus.
- ⋆ La relation de Pythagore s'obtient par un tour de passe-passe algébrique : la disparition du double produit.
- ⋆ Cette démonstration est certes convaincante, mais elle éloigne du sens profond de Pythagore, à savoir son aspect géométrique que j'ai rappelé plus avant.



Mais si à partir du découpage ci-dessus, on va jusqu'au bout de la démonstration indienne, on peut par un nouveau découpage, en décomposant et recomposant les figures, "montrer" que l'aire du carré de côté a est égale à la somme des aires des carrés dont les côtés ont pour longueur respective b et c. Cette lecture géométrique rend cette démonstration tout à fait éclairante.

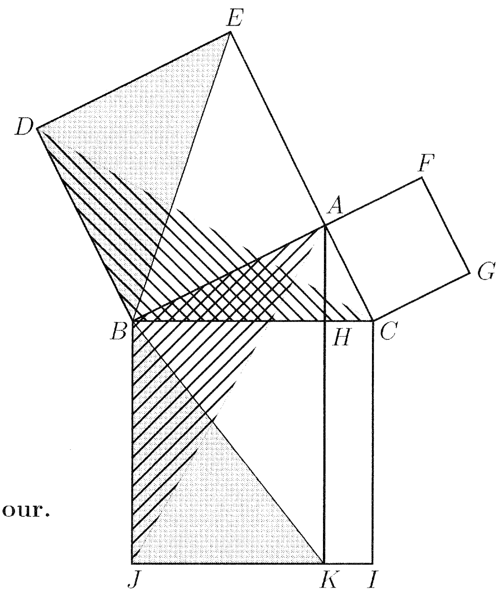
Démonstration d'Euclide en quatre mouvements

H et K sont les projections orthogonales de A sur (BC) et (IJ).

Premier mouvement : découpage

En découpant le carré $BCIJ$ en deux rectangles $BHKJ$ et $HCIK$, le problème se ramène à déformer le carré $ABDE$ en le rectangle $BHKJ$ avec conservation de l'aire.

Avec un nouveau découpage, le problème se ramène à déformer le triangle EBD en le triangle BKJ avec conservation de l'aire.



Second mouvement : déformation.

Avec l'outil 2, je déforme EBD en CBD : ces deux triangles sont en position 2, donc ils ont même aire.

Troisième mouvement : quart de tour.

Par un quart de tour autour de B, BDC se transforme en BAJ : ces deux triangles sont en position 1, donc a fortiori ont même aire.

Quatrième mouvement : déformation.

Avec de nouveau l'outil 2, je déforme ABJ en KBJ : ces deux triangles sont en position 2, donc ont même aire.

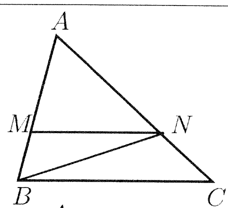
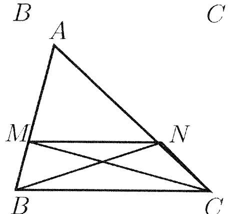
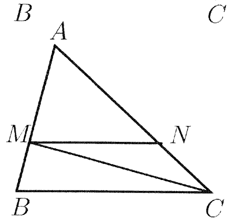
J'utilise dans cette démonstration des quarts de tour là où Euclide utilise les cas d'égalités des triangles. Voilà un exemple où l'isométrie peut être explicitée : l'avantage est qu'on voit ces deux carrés "se fondre" dans le troisième. En utilisant rétroprojecteur et couleurs, ou la dynamique de l'ordinateur, on donne toute sa vie à cette démonstration auprès des élèves.

Elle m'apparaît plus éclairante que la précédente, mais l'est-elle pour tous ? Cela renvoie de nouveau au regard que l'on porte sur la figure.

Démonstrations du théorème de Thalès :

Démontrons le théorème dit direct :

«Dans un triangle, toute parallèle à un côté découpe les deux autres en "segments proportionnels"».

	*Mouvement 1.* On passe d'un rapport de longueurs à un rapport d'aires	Les triangles NMA et NMB sont en position 3, donc : $\frac{MA}{MB} = \frac{Aire(NMA)}{Aire(NMB)}$
	*Mouvement 2* On passe du côté $[AB]$ au côté $[AC]$	Les triangles BMN et CMN sont en position 2, donc : $Aire(NMB) = Aire(MNC)$
	*Mouvement 1.* On passe d'un rapport d'aires à un rapport de longueurs	Les triangles MNA et MNC sont en position 3, donc : $\frac{Aire(MNA)}{Aire(MNC)} = \frac{NA}{NC}$

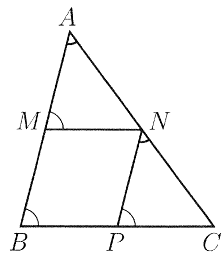
Cette démonstration est convaincante, éclairante pour des mathématiciens, car ils savent qu'il y a eu un lourd tribut à payer avant d'y arriver, sur lequel je reviendrai un peu plus loin. Mais est-elle éclairante pour des élèves, qui auront l'impression que ce passage par les aires est un tour de passe-passe qui les éloigne du sens de "leur Thalès" : relation entre parallélisme et proportionnalité de longueurs?

Démonstration de Clairaut ($xvii^{me}$ **siècle) :**

Abandonnons Euclide, et faisons un saut de 20 siècles, et suivons Clairaut dans ses «Élémens de Géométrie», où il reprend pour "Thalès" une argumentation d'Arnault (Nouveaux éléments de géométrie) :

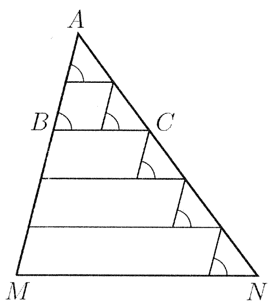
Notre théorème des "milieux" :

M est le milieu de $[AB]$, $(MN)//(BC)$.
On construit $(NP)//(AB)$.
Par parallélisme : $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = \widehat{NPC}$; $\widehat{MAN} = \widehat{PNC}$.
En utilisant milieu et parallélogramme : $AM = MB = NP$
Les triangles AMN et NPC sont en position 1 (on a même de façon évidente le déplacement : une translation). Donc $AN = NC$, d'où N est le milieu de $[AC]$

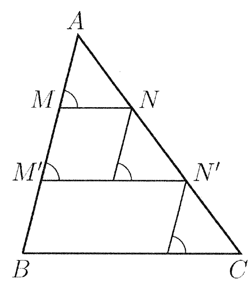


Au delà du fait que cette démonstration m'apparaisse comme particulièrement éclairante pour des élèves de collège, Clairaut vient de se construire une procédure auto-reproductible, et donc une méthode. Suivons le plus avant :

Deux fois et demi



Notre théorème des tiers



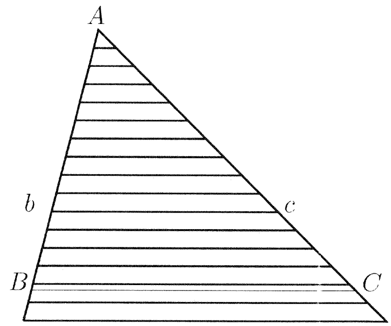
Je viens de résumer, avec une adaptation très moderne, et sans les nombreuses justifications de Clairaut, les pages 42 et 43 de ses «Élémens de Géométrie». A partir de ces trois exemples, Clairaut laisse imaginer la généralisation du procédé, et considère achevée cette démonstration de Thalès.

Clairaut a des doutes :

Retrouvons Clairaut à la page 98 : «Mais de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourrait-il naître quelque soupçon sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionnalité des figures semblables. Il faut donc que nous revenions sur nos pas».

Clairaut prend alors l'exemple suivant : soit un triangle ABC où $AB = \sqrt{2}$, soit b le point de $[AB]$ tel que $Ab = 1$, et c le point de $[AC]$ tel que $(bc)//(BC)$. Il fait alors le raisonnement suivant :

«Supposons Ab divisé en 100 parties ; ce que AB contiendra de ces parties se trouvera entre 141 et 142. Contentons nous donc de 141 et négligeons le petit reste. Il est clair que AC contiendra aussi 141 des parties de Ac».



J'ai exemplifié avec le dessin ci-dessus où j'ai choisi un partage en 10 parties. Les historiens noteront d'autre part que je n'ai pas comme Clairaut fait la distinction entre A et a, cela pour que ce soit clair aux non spécialistes.

Clairaut recommence alors en divisant Ab en 1000 parties, et dit alors :

«De plus, ces restes comme nous venons de l'observer, seront de part et d'autre d'autant plus petits que le nombre des parties de Ab sera plus grand. Donc il sera permis de les négliger, si on imagine la division de Ab poussée jusqu'à l'infini».

Nous venons de passer dans le monde de l'analyse. Nous venons de passer du commensurable à l'incommensurable, du rationnel au réel. Nous venons surtout de changer notre regard sur Thalès :

Les pages 42 et 43 sont pour le collège et la seconde, les pages 98, 99, 100 et 101 sont pour les classes suivantes, car Clairaut éclaire ici autre chose que Thalès !

Mais où est passée l'incommensurabilité ?

Mais alors pourquoi la démonstration d'Euclide est-elle aussi simple ? Où est passée l'incommensurabilité ?

En mathématiques, il faut toujours payer quelque part, et le vrai nœud du problème est la proposition suivante : «**Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases**».

Si la démonstration de cette proposition est simple dans le cas commensurable, elle est plus sophistiquée si les bases sont incommensurables. On peut comparer les textes d'Euclide et de Legendre (1823) : ce dernier utilise la double réduction à l'absurde qui est l'autre aspect de la théorie des proportions d'Eudoxe, utilisée par Euclide et plus tard par Archimède.

La formule de l'aire du rectangle est alors conséquence de l'utilisation combinée de la méthode des aires et de la théorie des proportions.

Finalement, établir la formule de l'aire du rectangle :

aire du rectangle = longueur×largeur

Et le reste vient tout seul ! Mais l'aire du rectangle est une telle évidence dans nos programmes !

Quoique !

Troisième balade ... dans l'irrationnel[19].

$\sqrt{2}$ est irrationnel : comment le "montrer" à nos élèves ?

Deux problèmes a priori distincts surgissent : un problème géométrique, celui de doubler un carré, un problème arithmétique, celui de trouver une fraction dont le carré vaut 2.

Un problème géométrique qui "amène" $\sqrt{2}$[20]

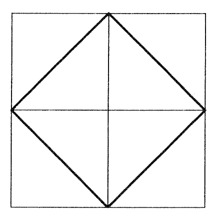
Prenons un carré de côté 2. Son aire est 4.

Plions le comme ci-contre ; on obtient un nouveau carré d'aire moitié du précédent, c'est-à-dire 2.

Le côté de ce carré est donc un nombre dont le carré est 2.

Écrivons le $\sqrt{2}$.

Ce côté est aussi la diagonale d'un carré de côté 1.



L'irrationalité de $\sqrt{2}$:

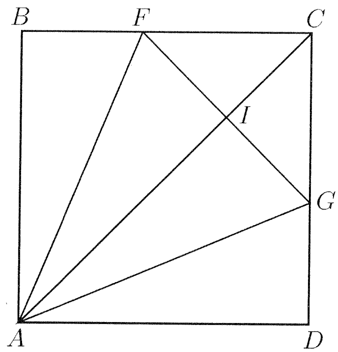
La méthode la plus pratiquée est la démonstration arithmétique par le pair et l'impair. C'est une démonstration exemplaire pour les questions d'irrationalité numérique. Mais celle-ci éloigne alors du problème géométrique ci-dessus.

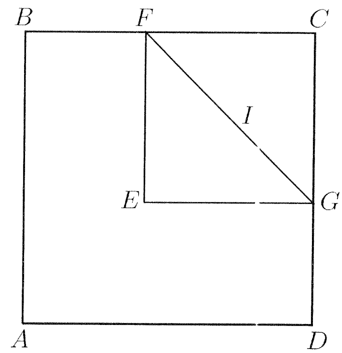
Adaptons une idée qu'on pouvait trouver de façon dynamique sur le site du colloque de Grenoble EM 2000.

19. les # renvoient à une solution proposée en Annexes «Troisième balade».

20. D'un point de vue historique, la méthode ci-dessous peut faire penser à la démonstration géométrique du doublement d'un carré popularisée par le "Ménon" de Platon, mais cette dernière est d'un autre ordre, car il n'y avait pas de "nombre" dans cette démonstration.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers. "Agrandissons" alors le carré de côté 1 avec un rapport q. On obtient un carré $ABCD$ de côté entier q et de diagonale entière p.





Faisons alors les pliages ci-dessus : deux pliages par rapport à (AF) et (AG) ramenant les côtés $[AB]$ et $[AD]$ sur la diagonale $[AC]$, puis un pliage par rapport à (FG).

Déplions tout, revenons dans le monde des mathématiques et examinons la figure obtenue :

Montrez que le carré $EFCG$ est aussi à côté et diagonale entiers.

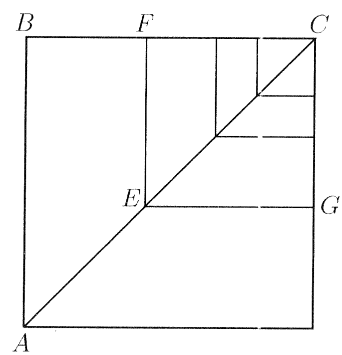
Une "descente infinie finie" :

Le procédé est auto-reproductible :
on a donc une "descente infinie" de carrés de plus en plus petits.

Mais les côtés de ces carrés sont des entiers naturels.

Une suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.

C'est absurde !



Une seule marche :

Pour ceux qui craignent les trop grandes descentes, ils peuvent se contenter d'une seule étape, en choisissant $\frac{p}{q}$ irréductible. Ils obtiennent alors une contradiction dans le carré $EFCG$ de côté entier $p' < p$ et de diagonale $q' < q$ et qui vérifient $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$

Développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue :

La descente infinie me paraît plus éclairante que la seule marche. Pour des élèves de collège, on peut exemplifier la démarche : partant d'un nombre entier q (par exemple 48), on peut leur faire constater qu'au bout de $n+1$ pliages maximum (49) le carré n'existe plus, alors qu'il existe toujours !

Cet algorithme est à rapprocher de l'anthyphérèse qui conduit au développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue.

Soit un carré de côté q et de diagonale p ($\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ n'est pas rationnel d'après ce qui précède). En reprenant les notations ci-dessus, et en posant $p' = EC$ et $q' = FC$, montrer que : $\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1+\frac{p'}{q'}}$

En déduire le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ (réitérer le procédé).

En conclusion :

L'accès à l'irrationnel passe par l'absurde et/ou l'infini

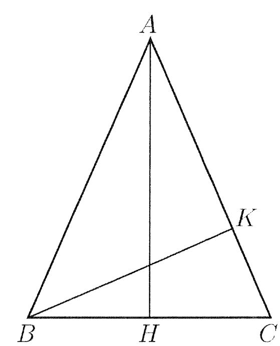
6 - Une configuration européenne

Cosinus ou Thalès, lequel choisir ?

Enseigner le cosinus avant Thalès est un contre-sens historique, et démontrer Thalès avec le cosinus devient un contre-sens épistémologique. Mais lorsque les deux sont en place, ce choix devient-il important ?

Considérons pour commencer cet exercice proposé dans un manuel de troisième au chapitre «trigonométrie» :

ABC est un triangle isocèle en A. $AB = AC = 10$; $BC = 8$. K est la projection orthogonale de B sur (AC), H celle de A sur (BC). Que vaut KC ?



Que font la plupart des élèves : ils calculent le cosinus de $\widehat{ACH}$ dans le triangle ACH, qu'ils trouvent égal à $0,4$; puis prenant leur calculatrice, un "petit coup de «shift cos» (ou «inv cos», ou «2nd cos»)" leur permet d'avoir accès à la mesure de cet angle qu'il arrondissent à 66^o ; travaillant alors dans le triangle BKC, ils en déduisent la longueur de KC en multipliant 8 par $\cos(66^o)$, ce qui leur donne environ $3,25$.

Cette démarche n'est pas inintéressante, car elle suppose un enchaînement d'actions et de validations. Mais ce passage cosinus-inverse du cosinus a un double inconvénient : faire jouer à la calculatrice le rôle d'une boîte noire ; ne pas obtenir le résultat "exact". Ce peut être l'occasion d'un travail sur la calculatrice pour garder la précision maximale.

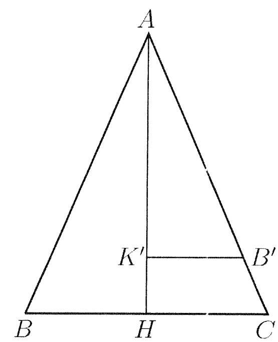
Le véritable enjeu de cet exercice est d'écrire le cosinus de $\widehat{ACH}$ de deux façons sans "calculer" cet angle pour arriver à l'égalité des rapports : $\dfrac{CH}{AC} = \dfrac{CK}{BC}$ qui donne $CK = 3,2$

Avec les nouveaux programmes de seconde, cette égalité s'obtient en montrant que les triangles ACH et BCK ont "même forme".

Mais on peut dès le collège "illustrer" cette égalité en "déplaçant" le triangle BKC pour l'amener en $AB'K'$ (la validation du "mouvement" se fait par "constat" de l'"égalité" des deux triangles).

La configuration qui apparaît est celle de Thalès ; elle amène à l'égalité : $\dfrac{B'K'}{AB'} = \dfrac{CH}{AC}$

Un tel geste demande une pratique que n'ont pas les élèves. Son seul objectif est de leur permettre de faire le lien entre Thalès, trigonométrie et triangles "de même forme" pour les élèves de seconde.



Thalès en Europe :

Revenons alors sur notre première balade. Pour découper un rectangle pour en faire un carré, j'ai utilisé le résultat : dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur relative à l'hypoténuse est égale au produit des longueurs des segments qu'elle détermine sur cette hypoténuse, et j'ai dit : «c'est Thalès».

Promenons-nous en Europe[21] :

En Angleterre : «Theorem of Thales»

«An angle inscribed in a semi-circle is a right angle»[22]

En Allemagne : «Der Satz des Thales»

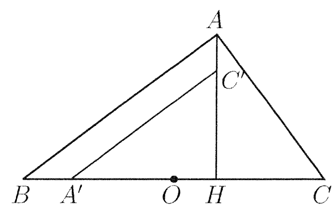
«Jedes Dreieck über einem Durchmesser in einem Halbkreis ist rechtwinklig»[23]

En Suisse : c'est la propriété de la hauteur que j'ai énoncé ci-dessus.

21. Avec Henry Plane in Brochure «Autour de Thalès» déjà citée
22. Un angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit.
23. Un triangle construit sur un diamètre et inscrit dans un demi-cercle est rectangle.

Une configuration européenne :

Si l'on veut "montrer" le "théorème suisse", c'est à dire l'égalité $AH^2 = BH \times CH$, on peut utiliser le fait que les tangentes des angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{ACH}$ sont inverses l'une de l'autre. Soyons dynamiques, et faisons "tourner" le triangle ACH d'un quart de tour autour du point H . Il "devient" le triangle $HA'C'$, et nous retrouvons notre "Thalès français", celui des "lignes proportionnelles".



L'égalité ci-dessus se déduit alors de l'égalité des rapports :

$$\frac{CH}{AH} = \frac{C'H}{A'H} = \frac{C'H}{AH} = \frac{A'H}{BH} = \frac{AH}{BH}$$

Nos amis d'outre Manche et d'outre Rhin retrouveront aussi dans cette configuration leur Thalès.

Encore une fois il ne s'agit pas ici de nier la force de la trigonométrie, et sa facilité d'accès aux élèves, mais de montrer la complémentarité que peut apporter l'aspect dynamique du mouvement à l'éclairage du problème[24].

Mais on peut rêver en multipliant les occasions de cette géométrie de mouvement d'installer chez les élèves des gestes qui peuvent devenir des méthodes. C'est ce que je vous propose d'illustrer dans la quatrième balade.

Quatrième balade... dans le triangle rectangle[25]

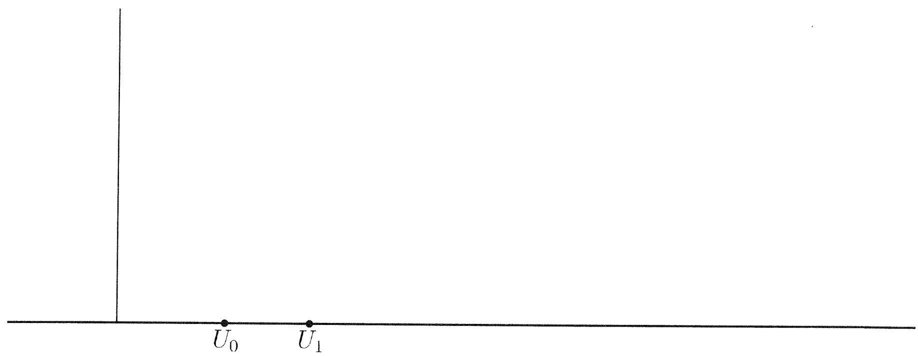
Une configuration porteuse de suite :

Lorsque l'élève découvrira les suites géométriques, et qu'il comprendra que tout terme est moyenne géométrique de celui qui le précède et de celui qui le suit, peut-être se souviendra-t-il de la configuration ci-dessus, qui "fait voir" cette moyenne géométrique.

Connaissant U_0 et U_1, il pourra alors "positionner" $HC = U_0$ et $HA = U_1$ comme dans la configuration précédente, et construire $HB = U_2$. Utilisant alors la combinaison de cette configuration et la "répétition" de notre Thalès, il pourra construire des suites géométriques connaissant les deux premiers termes sans connaître la raison de cette suite : c'est ce que je vous propose de faire.

24. On peut aussi montrer ce résultat avec Pythagore !
25. les # renvoient à une solution proposée en Annexes "Quatrième balade"

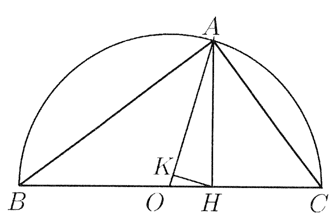
Construire la suite géométrique de premier terme U_0 et U_1.



Il y a moyenne et moyenne :

Moyenne arithmétique, la plus simple et la plus classique, liée aux phénomènes de "progression arithmétique", et base des indicateurs statistiques ; moyenne géométrique, liée à tous les phénomènes de "progression géométrique", et si présente dans notre quotidien (qui n'a pas un prêt en cours?) ; moyenne harmonique, liée à "l inverse proportionnalité", et qui nous fait maudire les bouchons sur l'autoroute lors de nos départs en vacances qui réduisent tant notre "vitesse moyenne" : comment sont-elles liées ?

Replongeons dans notre triangle rectangle :



Considérons le triangle rectangle ABC ci-contre.

Soit H la projection orthogonale de A sur (BC), K celle de H sur (OA).

Soit $HB = a$ et $HC = b$.

OA est la moyenne arithmétique de a et b.

AH est la moyenne géométrique de a et b.

Montrez que AK représente la moyenne harmonique de a et b.

Cette configuration nous permet d'affirmer :

moyenne harmonique $\leq$ moyenne géométrique $\leq$ moyenne arithmétique

la double égalité ayant lieu si et seulement si $a = b$.

On peut évidemment montrer ces inégalités par l'algèbre, mais la configuration ci-dessus lie étroitement ces trois moyennes, et nous permet de visualiser pour $a + b$ constant la sensibilité de chacune de ces moyennes à l'écart entre a et b.

7 - Un théorème extrêmement simplificateur

Je vais terminer ce "parcours géométrique" par un théorème fondamental :

«Tout triangle est isocèle»

Un corollaire immédiat est :

«Tout triangle est équilatéral»

Vous ne me croyez pas ! En voici une démonstration :

Le triangle ABC ci-contre est a priori quelconque. I est le point d'intersection de la bissectrice issue de A et de la médiatrice de $[BC]$. H et K sont les projections orthogonales de I sur (AB) et (AC).

I étant sur la bissectrice, $IH = IK$. Les triangles rectangles AIH et AIK sont donc "égaux".

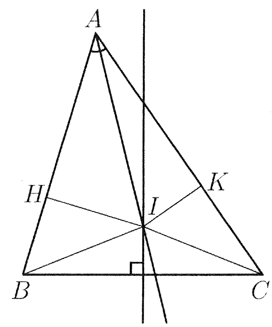
Donc $AH = AK$.

I étant sur la médiatrice de $[BC]$, $IB = IC$. Comme $IH = IK$, les triangles rectangles IBH et ICK sont donc aussi "égaux".

Donc $HB = KC$.

On en déduit : $AB = AH + HB = AK + KC = AC$.

Donc le triangle est isocèle en A.



Vous ne connaissiez pas ce résultat, et vous avez repris la démonstration, sans y trouver de "faille". Votre inquiétude grandit à l'idée d'avoir à "balancer" tout votre cours de géométrie, ainsi que cet article qui n'a plus lieu d'être !

Rassurez vous : refaites un dessin et vous verrez la supercherie. Ce que j'ai en fait montré ici "par l'absurde", c'est que si le triangle n'est pas isocèle en A, ce point I est à l'extérieur du triangle (H et K sont l'un à l'intérieur du côté, l'autre à l'extérieur).

J'ai souvent entendu que le propre des mathématiques était de pouvoir raisonner juste sur une figure fausse : oui, mais pas trop fausse ! Cela m'amène à deux points de réflexion que je trouve fondamentaux :

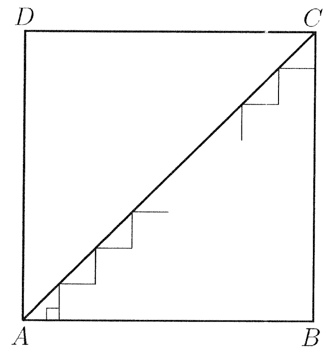
- ⋆ Une démonstration n'a pas pour objectif de prouver qu'une chose est "vraie", mais de vérifier que le cheminement qui a conduit à la conclusion à partir des hypothèses est valide.
- ⋆ On évacue presque toujours les notions particulièrement délicates d'intérieur et d'extérieur, de convexité, de connexité, en les gommant par une prise d'information sur le dessin.

8 - La maison des mathématiques

Nous avons suivi des chemins qui proposent un aller-retour constant entre le monde physique et le monde mathématique, entre la forme et l'objet mathématique, entre le dessin et la figure, entre la "connaissance naturelle" et la "connaissance évoluée". C'est vers la "maison des mathématiques" que conduisent ces différents chemins.

Mais y sommes nous vraiment entrés? Prenons l'activité suivante:

Considérons le carré $ABCD$ ci-contre, la "rampe" $[AC]$, et "l'escalier" qui va de A à C avec des marches de "pas" $\frac{1}{n}$.



Notre intuition, notre perception naïve, nous font penser que:

$$\lim_{n\to\infty}(\text{“escalier”}) = \text{“rampe”}.$$

Mais pour tout n, la longueur de l'escalier est 2. Donc

$$\begin{aligned} 2 &= \lim_{n\to\infty}(\text{“longueur de l'escalier”}) \\ &\neq \text{“longueur de la rampe”} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Reprenons notre exemple de découpage d'un triangle pour en faire un carré, et posons-nous la question: peut-on reconstituer un cercle à partir d'un carré par "dissection" et "déplacements". Le problème ainsi posé dans les années 1920 par Banach et Tarski s'appelle «la quadrature géométrique du cercle». Naturellement, dans ce dernier cas, on ne peut pas espérer faire des partitions à l'aide de ciseaux car un disque a une frontière "bombée" que ne possède pas le carré!

Laczkovitch, mathématicien hongrois, a donné une réponse positive à cette question: il a montré que de telles partitions du carré et du disque étaient possibles et que l'on pouvait passer des morceaux du disque aux morceaux du carré par des translations[26].

Les mathématiques à cet autre niveau vont donc aller contre notre intuition, contre notre perception: c'est Cantor qui, venant de construire une bijection de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}^2$ écrit à Dedekind: «Je le vois, mais je ne peux le croire». De manière plus générale, la science peut aller contre notre intuition, et je laisse le soin à Rudolf Bkouche d'exemplifier cela: «Toute la science moderne s'est construite autour de cette "vérité" paradoxale: la terre tourne autour du soleil... On ne l'a jamais expérimenté même si on sait l'expliquer; en fait c'est bien plus l'harmonie qui se dégage de l'héliocentrisme qui a fait la force de cette théorie, ce qui n'empêche pas de considérer la terre comme notre repère naturel et de vivre comme si elle ne se mouvait pas».

26. Voir Jean-Pierre Kahane in Repères-IREM n^o 29.

Exhiber les exemples mathématiques ci-dessus à nos élèves est sans doute prématuré si l'on considère que l'enseignement scientifique est moins de raconter la "modernité" que d'en donner les clés d'accès, mais leur donner la possibilité d'aller plus loin chaque fois que l'occasion s'en présente peut donner à certains l'envie de mieux connaître cette "maison des mathématiques" : cette curiosité peut être le début d'une "vocation scientifique".

Mais revenons dans le cadre de notre texte, c'est-à-dire celui d'un enseignement pour tous : son objectif est de tracer des chemins qui mènent à cette "maison des mathématiques" ; libre alors à chacun de vouloir la visiter plus à fond, ou au contraire de ne pas la trouver à son goût. L'important est que tous en connaissent des accès, et soient capables de les retrouver un jour s'ils en ont besoin.

Ces chemins ne sont pas faciles, et il est important de les baliser régulièrement par une hiérarchisation progressive des niveaux de conceptualisation, de traitement, de validation. Ceux de la géométrie élémentaire que j'ai essayé d'explorer ici reposent sur la conviction suivante : **le voir, le croire et le savoir se construisent ensemble dans la plus grande intimité.**

Un grand merci à :

Evelyne Barbin, Rudolf Bkouche, Françoise Chamontin, Marie-Claire Combes, Jean-Pierre Kahane, Marc Legrand, Madeleine Marot, René Mulet-Marquis, Daniel Perrin, Mireille Sauter, ...

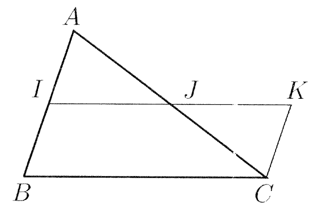
pour leurs contributions à ce texte.

ANNEXES

Première balade

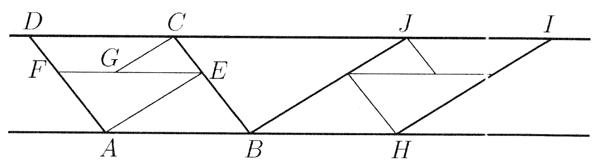
Du triangle au parallélogramme :

Une symétrie centrale vient aisément au bout du problème.

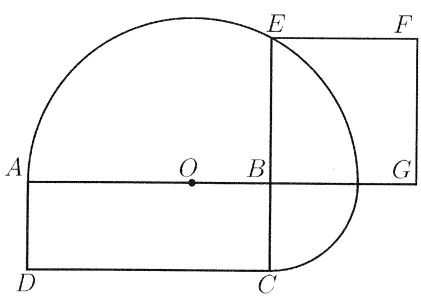


Du parallélogramme au parallélogramme.

On utilise la direction de (BC) et des translations immédiates.



Du rectangle au carré.

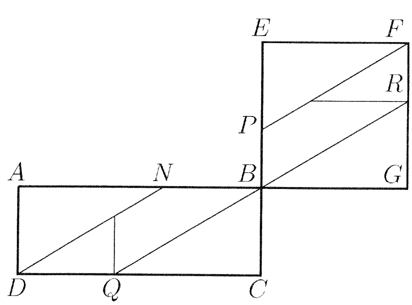


On construit sur (AB) le point M tel que $BM = BC$ et B appartienne à $[AM]$. On construit le demi-cercle de diamètre $[AM]$ Soit E l'intersection de ce demi-cercle avec la droite (BC). Le triangle AEM est donc rectangle, et $[EB]$ est la hauteur relative à l'hypoténuse. D'après Thalès (voir plus loin), on a donc :

$$BE^2 = AB \times BM = AB \times BC$$

$[BE]$ est donc le côté d'un carré de même aire que le rectangle.

D'où la fin de la construction

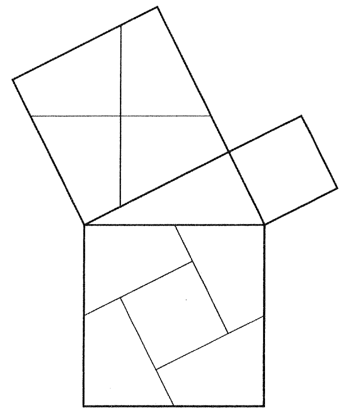


Pour le découpage, on construit le triangle AND avec $AN = EF$, on construit le triangle EPF avec $EP = AD$. On est ainsi assuré d'avoir construit deux triangles égaux qui se déduisent l'un de l'autre par une translation.

On fait de même avec les triangles BQC et BRG.

Il ne reste plus qu'à montrer que $BNDQ$ et $BPFR$ sont deux parallélogrammes ayant même base et même hauteur, ce qui nous ramène au découpage précédent.

De deux carrés à un troisième : merci Pythagore.



Le découpage ci-contre est lié aux bords du triangle rectangle, donc des trois carrés.

On passe là encore des deux "petits carrés" au "grand carré" par translation des pièces.

On peut trouver ce puzzle dans le livre de Steinhaus «Les instantanés mathématiques»[27].

Il existe de nombreux autres "puzzles de Pythagore".

Seconde balade

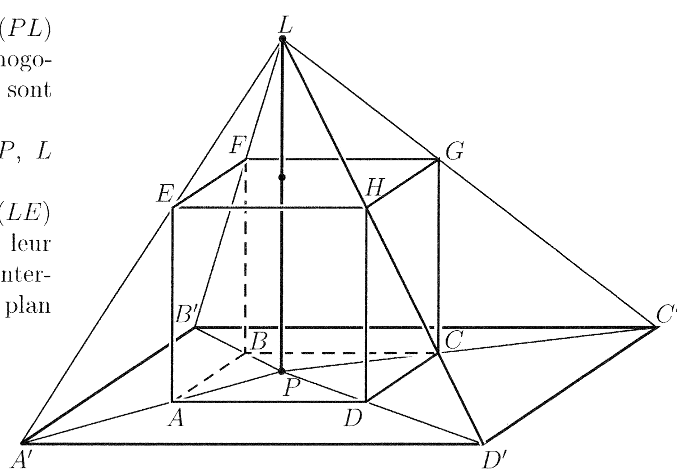
L'ombre :

Les droites (AE) et (PL) étant toutes deux orthogonales au plan $ABCD$ sont parallèles.

Les points A, E, P, L sont donc coplanaires.

Les droites (PA) et (LE) sont donc sécantes, et leur intersection A' est l'intersection de (LE) et du plan $ABCD$

On obtient de même les points B', C', D'.

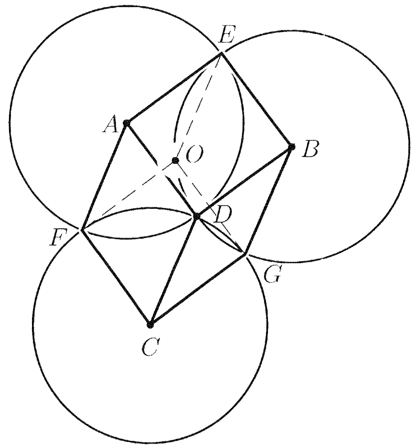


La forme de l'ombre $A'B'C'D'$ est un carré, car homothétique du carré $ABCD$. Peut-être avez-vous hésité sur cette forme. Rassurez-vous, c'est le cas de la plupart, qui pensent que pour que ce soit un carré, il faut que P soit centre du carré $ABCD$. Seule la démonstration peut ici nous permettre d'affirmer cela.

Je vous laisse admirer l'omniprésence de Thalès.

27. Voir l'article de Jean-Pierre Kahane dans *REPÈRES-IREM n° 29*

Les trois cercles :



On fait apparaître un parallélépipède rectangle en perspective cavalière.

Le sommet caché O est le centre du quatrième cercle, et le rayon de ce cercle OE a la même longueur que les trois autres cercles.

Troisième balade

L'irrationalité :

En utilisant les symétries axiales, on montre aisément que $EFCG$ est un carré.

Par symétrie, $AI = AB = q$; donc $IC = p - q$; donc EC est un entier.

Par symétrie, $BF = FI$; or $FI = IC = p - q$; donc BF est un entier, donc FC est un entier.

Le développement en fraction continue :

On a : $\dfrac{p}{q} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AI + IC}{BC} = 1 + \dfrac{\frac{p'}{2}}{q} = 1 + \dfrac{1}{\frac{2q}{p'}}$

Or $\dfrac{q}{p'} = \dfrac{BF + FC}{p'} = \dfrac{\frac{p'}{2} + q'}{p'}$;

donc $\dfrac{2q}{p'} = 1 + \dfrac{2q'}{p'} = 1 + \dfrac{2q'^2}{q'p'} = 1 + \dfrac{p'^2}{p'q'} = 1 + \dfrac{p'}{q'}$; d'où le résultat...

On a de même : $\dfrac{p'}{q'} = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{p''}{q''}}$ et ainsi de suite ...

D'où le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

Quatrième balade

Moyenne harmonique :

Avec Thalès,... ou le cosinus, on montre :

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AH}{AO};$$

d'où $\dfrac{1}{AK} = \dfrac{AO}{AH^2} = \dfrac{\frac{1}{2}(a+b)}{ab} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\Big)$

D'où le résultat.

Construction d'une suite géométrique :