La mesure des grandeurs au Collège :

une préparation à l'apprentissage de l'analyse.

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

IREM de STRASBOURG

La mesure des grandeurs au collège

Dans son ouvrage célèbre intitulé *"La mesure des grandeurs"*[1], Henri Lebesgue souligne que :

> *"Il n'y a pas de sujet plus fondamental : la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes* les applications des mathématiques[2] *et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie ; d'autre part,* cette mesure fournit le nombre, c'est-à-dire l'objet même de l'Analyse. *Aussi parle t-on de la mesure des grandeurs dans les trois enseignements : primaire, secondaire, supérieur ; le rapprochement de ce que l'on fait dans les trois ordres d'enseignements fournit un exemple de ces efforts de compréhension d'ensemble, de coordination qui me paraîtraient pouvoir servir plus efficacement à la formation des futurs professeurs que le travail exigé d'eux : le fignolage verbal de leçons isolées."*

Nous en avons souligné trois idées qui nous paraissent fondamentales :

1. Elle est le point de départ de toutes les applications des mathématiques.
2. Elle fournit le nombre, c'est à dire l'objet de l'analyse.
3. Elle fournit un exemple de compréhension d'ensemble.

C'est dire d'abord que l'enseignement des mathématiques au collège ne doit pas être pensé à l'intérieur et en fonction des seuls programmes et objectifs du collège, mais bien plutôt dans une dynamique qui, s'appuyant sur les acquis de l'école primaire, conduit l'élève au lycée et à l'université. Le thème de la mesure des grandeurs est en ce sens le plus représentatif d'une double transversalité qui doit inspirer continuellement l'enseignement des mathématiques au collège : transversalité verticale comme nous venons de le signaler qui organise les programmes dans une vue

1. H. LEBESGUE : *"La mesure des grandeurs"* ré-édition A. Blanchard 1975 - page 2
2. c'est nous qui soulignons

d'ensemble allant depuis l'école primaire jusqu'au début de l'université ; transversalité horizontale aussi, en ce que le thème de la mesure des grandeurs conditionne directement l'apprentissage des sciences en général, et particulièrement celui des sciences physiques ; car la physique est expérimentale, et l'expérimentation passe nécessairement par la mesure des grandeurs. C'est en ce sens, par exemple, que l'on peut comprendre la question posée lors de ce colloque et qui concerne la géométrie :

> *"Le rôle essentiel de la géométrie n'est-il-pas de mettre en place la démonstration, avec le passage du monde physique au monde mathématique ?"*

La réalité physique est appréhendée, et saisie, d'emblée en termes de grandeurs et de variation des grandeurs. Mais pour que cette saisie devienne scientifique, il faut qu'elle soit l'objet de mesures, c'est à dire traduite en termes de nombres et de fonctions.

Les programmes de mathématiques du collège entérinent d'ailleurs très largement cet ancrage dans la réalité physique avec des rubriques telles que : la mesure du temps (en 5ème), les grandeurs quotient (en 4ème), les grandeurs composées (en 3ème).

Plus précisément, on trouve une rubrique Grandeurs et mesures pour chacune des classes, avec les thèmes suivants :

- en sixième :
  Périmètre et aire d'un rectangle, aire d'un triangle rectangle.
  Longueur d'un cercle.
  Volume d'un parallélépipède rectangle à partir d'un pavage.
- en cinquième :
  Somme des angles d'un triangle. Aire du parallélogramme, du triangle, du rectangle.
  Mesure du temps.
  Aire latérale et volume d'un prisme droit, du cylindre de révolution
- en quatrième :
  Grandeurs quotients courantes.
  Volume d'une pyramide, volume et aire latérale d'un cône de révolution.
- en troisième :
  Grandeurs composées.
  Aire de la sphère, volume de la boule.

On peut seulement regretter que ces rubriques soient coupées d'autres parties explicites du programme placées dans d'autres thèmes tels que Fonctions numériques avec :

- en sixième :
  Changements d'unités de longueur, d'aire.
  Étude d'exemples relevant ou non de la proportionnalité.
- en cinquième :
  Mouvement uniforme.
  Changements d'unités de temps et de volume.

en quatrième :
Vitesse moyenne.
Changements d'unités pour des grandeurs quotients courantes.

– en troisième :
Étude générale de l'effet d'une réduction d'un agrandissement sur des aires, des volumes mais aussi des thèmes comme Nombres et calcul numérique et l'utilisation des touches $\sqrt{\ }$ ou cos( ).

Or Lebesgue a raison : la mesure des grandeurs fournit aussi ce qui fait l'un des domaines les plus riches des mathématiques : le nombre et l'analyse.

Historiquement, l'analyse s'est constituée et développée principalement autour du thème de la mesure des grandeurs. La notion de nombre irrationnel, de réel, le calcul différentiel et intégral, sont nés de problèmes de mesures de longueurs, d'aires, de volumes. Ces problèmes ont leur ancrage dans une réalité physique, mais ont conduit très tôt à des découvertes qui dépassent largement la simple intuition. Ils sont donc exemplaires pour mettre en évidence la frontière entre le fait constaté et le fait démontré : leur ancrage dans la réalité physique les rend accessibles à l'intuition de l'élève mais l'incapacité de cette intuition à rendre compte de toutes les situations et à résoudre certains problèmes (grandeurs incommensurables, surfaces limitées par des courbes), l'oblige à dépasser le stade empirique pour accéder au stade théorique de l'analyse mathématique.

Il y a en effet une difficulté insurmontable dans la démonstration de la plupart des résultats élémentaires de la mesure des grandeurs : les formules connues depuis l'antiquité nécessitent pour leur démonstration un recours et une gestion de l'infini. Démontrer des formules aussi classiques que :

– aire du rectangle égale longueur fois largeur,
  aire du disque égale πR^2,
– périmètre du cercle égale $2\pi R$, etc…

suppose la mise en place d'une théorie du continu et du nombre tout à fait inaccessible à l'élève du collège ou de l'école primaire.

D'où la tentation de limiter l'apprentissage de ces formules à une activité du type artisanale au même titre que le travail d'un arpenteur, tonnelier, charpentier, lesquels en font effectivement une utilisation quotidienne. Cela est tout à fait justifié et légitime à l'école primaire. Mais au collège, le moment est venu d'initier l'élève à une activité proprement mathématique, c'est-à-dire une activité de raisonnement, de justification et de démonstration qui dépasse la simple mise en forme de faits et de résultats observés ou expérimentés ? L'enseignement des mathématiques au collège doit sensibiliser progressivement l'élève au fait que la réflexion, le raisonnement, l'abstraction, en un mot la pensée, peuvent aller plus loin dans la précision, la justesse de certains résultats, et l'inciter peu à peu à une démarche scientifique qui aille au delà du sensible pour découvrir la beauté et la richesse des objets mathématiques idéaux.

Alors la rigueur exigée dans les mathématiques n'apparaîtra plus comme un exercice ennuyeux et inutile, mais bien au contraire comme le garant d'une pensée juste et conquérante d'un monde inaccessible aux seules données des sens.

Seulement, pour en arriver là, on ne peut se contenter de dire : voilà, on vous a donné à l'école primaire ou en sixième, cinquième, des formules sans vous les démontrer - le moment est venu à présent, en quatrième, en troisième (en seconde?), de les démontrer : cela ne les intéressera pas et de toute façon, cela n'est pas réalisable car trop difficile. Ce que l'on peut faire, par contre, c'est mettre en place quelques questionnements, quelques démarches, quelques progressions qui préparent aux raisonnements et aux démonstrations propres de l'analyse mathématique à partir des connaissances acquises par les élèves à l'école primaire et dans les premières années de collège, et qui s'appuient sur quelques rubriques du programme : particulièrement la rubrique Grandeurs et mesures.

L'exposé qui suit, plutôt que de s'en tenir à un discours théorique, coupé de l'enseignement au quotidien, préfère partir de quelques questions ou problèmes ouvrant des pistes de réflexion et d'expérimentation, autour de trois types de préoccupations :

1. Il y a des formules concernant la mesure des grandeurs que les élèves connaissent depuis l'école primaire ou qui font partie des programmes de collège. Comment placer les élèves dans un questionnement mathématique sur ces formules développant une démarche de raisonnement et progressivement de validation de ces formules?

2. Comment amener les élèves à une conscience claire et précise de l'existence de nombres qui ne sont ni des entiers ni des fractions d'entiers, mais qui pourtant sont indispensables pour mesurer de façon exacte certaines grandeurs?

3. Comment familiariser les élèves avec des démarches spécifiques de raisonnement en analyse, c'est-à-dire qui mettent en œuvre le continu et donc l'infini?

Plusieurs équipes pédagogiques, particulièrement dans les IREM, travaillent et progressent sur ces objectifs.

Nous nous proposons d'explorer ici quelques pistes que peut nous fournir l'histoire des mathématiques, qui comme nous l'avons signalé plus haut a rencontré beaucoup de problèmes liés à la mesure des grandeurs. La progression proposée se développera en trois étapes qui tentent de donner un début de réponse aux trois interrogations formulées ci-dessus :

1. **Montrer sur des exemples simples, mais non triviaux, ce que peut être une démarche de raisonnement et de démonstration au collège.** Le point d'appui - déjà développé ailleurs - est que les grandeurs, considérées en elles-mêmes, c'est-à-dire sans être forcément liées à l'idée de leur mesure, sont une source inépuisable de propriétés simples à démontrer, ne nécessitant qu'un arsenal réduit d'axiomes ou de propriétés de base.
Nous croyons en effet qu'une des raisons des difficultés actuelles de l'apprentissage d'une véritable démarche mathématique au collège tient au fait de ne pas séparer l'étude des grandeurs de leur mesure. Par exemple, rien que déjà pour mesurer les côtés d'un triangle rectangle, interviennent les radicaux, c'est-à-dire des nombres irrationnels, concept inaccessible sans une préparation méthodique qui fera l'objet de la deuxième étape. Or le théorème de Pythagore peut se penser et s'énoncer sans recours à la mesure et au nombre.

2. **Dégager de manière convaincante la nécessité d'introduire des nombres dits irrationnels,** posés par un acte de pensée qui manifeste à la fois la réalité de ces nombres, en ce qu'ils mesurent des grandeurs physiques, sensibles et observables, et leur caractère abstrait, en ce qu'ils ne peuvent pas s'écrire exactement avec les chiffres usuels. L'impossibilité d'écrire ces nombres exactement, mais la possibilité d'en donner une valeur approchée aussi précise que l'on voudra introduit alors aux démarches spécifiques de l'analyse mathématique mettant en jeu les processus infinitaires.

3. **Quelques exemples de démonstration introduisant au raisonnement de l'analyse.**
Ceux-ci peuvent alors être abordés sur quelques exemples simples développés dans une troisième partie par une approche des problèmes liés au continu où nous tenterons quelques premières démonstrations de formules classiques comme l'aire du rectangle, la longueur de la circonférence et l'aire du cercle ou le volume de la sphère.

Les aires : outil heuristique, outil démonstratif.

Il est une idée simple concernant les grandeurs, simple parce que liée à l'intuition sensible du jeune élève et qui est d'ailleurs explicitement inscrite dans les programmes du collège, c'est celle d'agrandissement et de réduction avec, sous jacente, l'idée de conservation de la forme. On a déjà cité certains extraits de programme à ce sujet. Voici ce qui concerne la Troisième :

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES
Proportionnalité et traitement usuels sur les grandeurs	
Application de la proportionnalité	Dans des situations mettant en jeu des grandeurs, l'une des grandeurs étant fonction de l'autre. - représenter graphiquement la situation d'une façon exacte si cela est possible, sinon d'une façon approximative, - lire et interpréter une telle représentation.
Grandeurs composées Changement d'unités	
Calculs d'aires et de volumes	Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné. Calculer le volume d'une boule de rayon donné.
Effet d'une réduction ou d'un agrandissement sur des aires ou des volumes.	**Connaître et utiliser le fait que, dans un agrandissement ou une réduction de rapport k,** **- l'aire d'une surface est multipliée par k^2** **- le volume d'un solide est multiplié par k^3**

Nous utiliserons donc une propriété de base, repérée ici propriété (A-R) (comme agrandissement - réduction).
Dans un agrandissement - réduction de rapport k, l'aire d'une surface est multipliée par k^2 (A-R).

Une première série d'activités d'agrandissement ou de réduction

Limitées à des figures simples, elle mettront en évidence la compréhension du fait que si les longueurs sont multipliées par k alors les aires sont multipliées par k^2. On pourra cependant faire observer que si la constatation de ce fait est claire sur les figures rectilignes (carrés, triangles, ...) elle ne l'est pas du tout sur les figures délimitées par des lignes courbes. Ce peut être l'occasion d'un premier questionnement sur l'aire du disque :

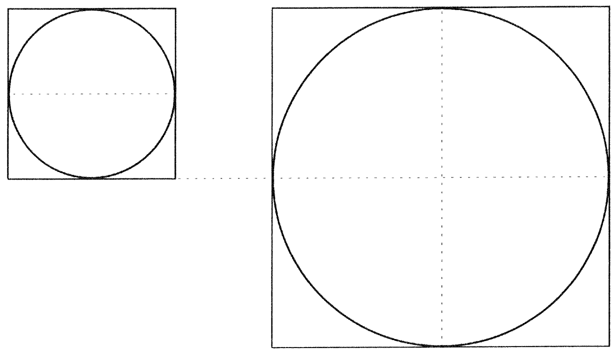


figure 1

Si le diamètre d'un cercle est doublé, le carré construit sur le diamètre est quatre fois plus grand. En est-il de même pour le cercle inscrit (figure 1)?

A chacun de voir s'il peut aller plus loin en explorant les divers polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle (figure 2).

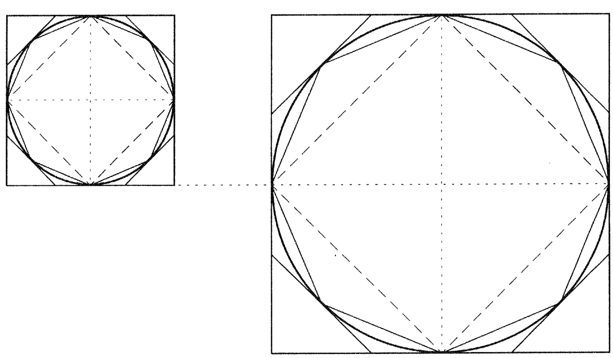


figure 2

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, l'aire d'une surface est multipliée par k^2.

Passons alors au problème, d'une certaine façon inverse, dans lequel c'est le facteur k^2 qui est donné. Commençons par quelques idées d'activité en classe. Elles sont simplement esquissées. Chaque professeur les adaptera et les étoffera par les questions intermédiaires qu'il pense utiles.

Construire une figure d'aire n fois plus grande qu'une figure donnée et de même forme.

a) Construire un carré d'aire double d'un carré donné.

Ce problème, comme on le sait, est fort ancien et donne déjà à Platon dans son dialogue le Ménon l'argument d'une distinction essentielle entre dire le côté du carré double et construire ce côté. Ni le serviteur auquel fait appel Socrate, ni Socrate lui-même ne peuvent dire en nombre le côté du carré double puisque ce côté est incommensurable au côté du premier. Mais ils peuvent le construire à partir de la diagonale (figure 3) :

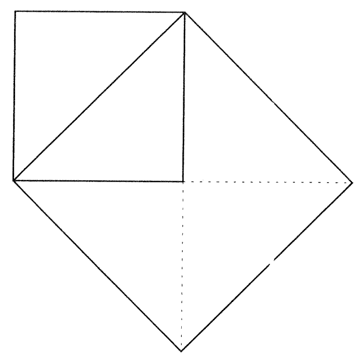


figure 3

Reste tout de même la question :

Quel est le rapport de l'agrandissement qui fait passer d'un carré au carré double?

b) Construire un triangle équilatéral d'aire double d'un triangle équilatéral donné

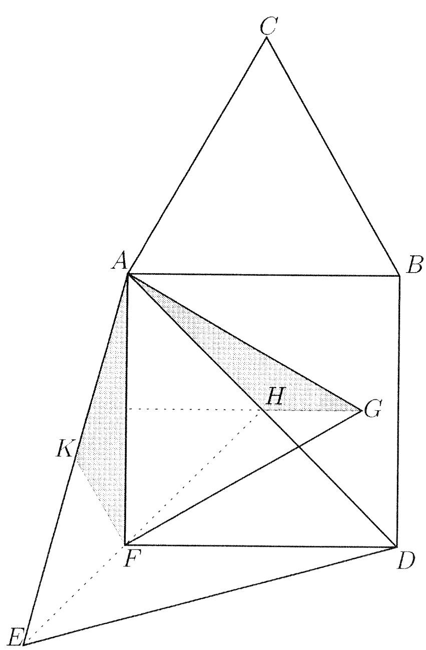


figure 4

Si le carré est doublé en remplaçant son côté par sa diagonale, on peut imaginer que le triangle équilatéral est doublé en remplaçant son côté par la diagonale du carré construit sur le côté du triangle initial.

Peut-on le démontrer simplement, au niveau collège (figure 4)?

Il suffit de démontrer que le triangle AGF a même aire que le demi triangle équilatéral AHE.

Dans ces deux triangles, AHF est commun. Soit K le milieu de $[AE]$.
Alors les triangles AHG et AKF sont superposables (isométriques par la rotation de centre A et d'angle 60°)donc égaux. Et comme K est le milieu de $[AE]$, les triangles AKF et KFE ont même aire. D'où l'égalité en aire des triangles AGF et AHE, et l'aire double du triangle ADE par rapport au triangle AGF ou ABC.

c) Construire un cercle d'aire double d'un cercle donné.

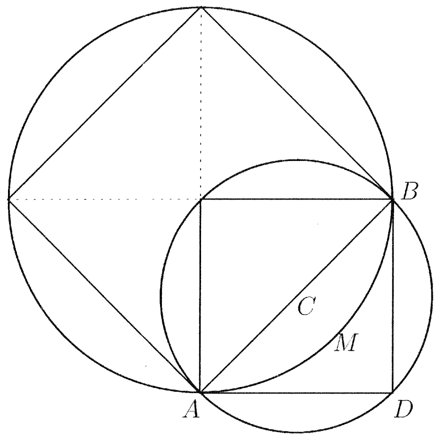


figure 5

La même idée que pour le carré ou le triangle s'applique, mais comment le démontrer? Le professeur peut renvoyer au paragraphe 1 et avouer que pour le moment il ne peut encore le prouver avec la même facilité que pour le carré ou le triangle (figure 5).

d) La lunule d'Hippocrate.

A partir de ce résultat, il est facile de démontrer l'égalité en aire de la lunule AKBD avec le carré ACOE (figure 6).

Les disques de centres respectifs C et O sont dans le rapport 1 à 2, donc le demi-disque ADB est égal au quart de disque OAKB (la moitié est égale au quart du double). Aux deux grandeurs égales OAKB et ADB, on enlève une même partie (AKB). On obtient donc des grandeurs de même aire (OAB) et (ADBK) ou encore (OCAE) et (ADBK) (figure 7).

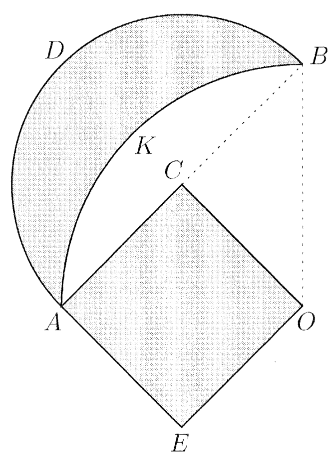


figure 6

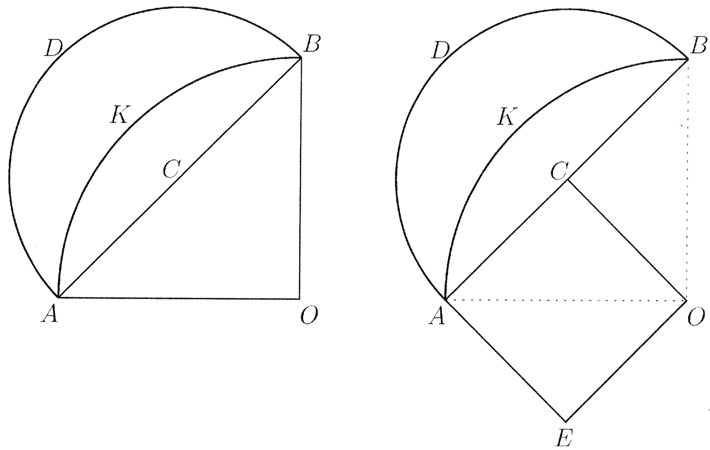


figure 7

e) La lunule brisée d'Artus de Lionne.

Sur les lunules, on peut encore aller plus loin et donner l'occasion aux élèves d'approfondir certaines relations de proportionnalité importantes sur le cercle, en même temps que d'exercer leurs facultés de raisonnement, toujours sur des grandeurs (donc maintien d'un lien avec l'intuition sensible) et avec appui sur une axiomatique géométrique réduite. La propriété à démontrer généralise celle de la lunule vue au paragraphe précédent, et affirme l'égalité des aires (AMN) et (ACD) - parties hachurées de la figure 8. On la trouve dans un échange épistolaire entre Tchirnhaus et Leibniz, mais elle était déjà découverte par Artus de Lionne en 1610 .

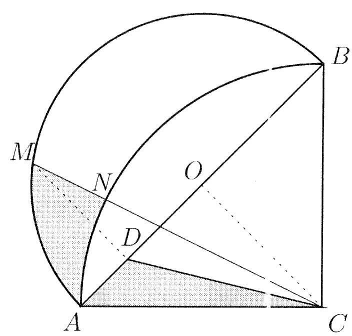
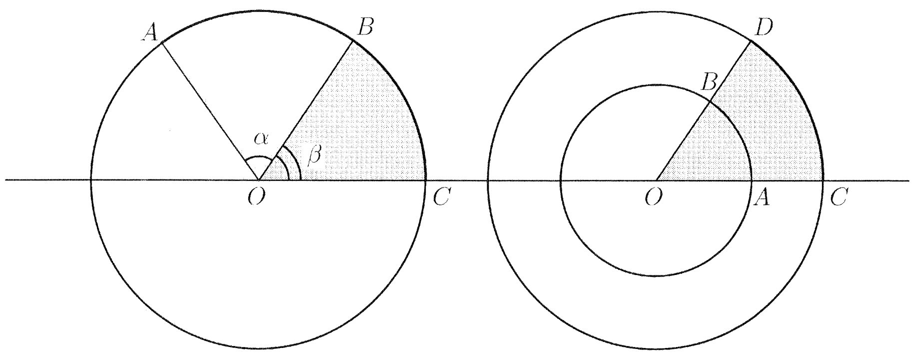


figure 8

La figure de base est la même, mais tronquée par une droite CNM correspondant à un angle $\widehat{ACM} = \alpha$ quelconque compris entre 0 et 90°. Le point M est projeté orthogonalement en D sur AB. Cette propriété nous donne d'abord l'occasion de bien distinguer deux types de proportionnalité entre secteurs angulaires dont la mise en correspondance permet de mettre en relief le caractère spécifique de chacune. Elle permet aussi de faire saisir la différence entre une proportionnalité linéaire simple (rapport d'agrandissement réduction k) et une proportionnalité au carré, que les Anciens appelaient double (rapport A-R égal à k^2).



Pour un même rayon et des angles distincts

$$\frac{Aire OAB}{Aire OBC} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Pour un même angle et des rayons distincts

$$\frac{Aire(OAB)}{Aire(OCD)} = \left(\frac{OA}{OC}\right)^2$$

figure 9

La démonstration de l'égalité de la lunule tronquée (AMN) avec le triangle ACD se fait alors facilement en trois étapes :

1) $\underline{Aire\ du\ secteur(OAM) = Aire\ du\ secteur(CAN)}$

a) l'angle au centre $\widehat{AOM}$ est le double de l'angle inscrit $\widehat{ACM}$

b) le carré du rayon OM est la moitié du carré du rayon CA

2) $\underline{Aire(MEO) = Aire(DEC)}$

a) $Aire(OMC) = Aire(ODC)$

parce que ces triangles ont même base OC et des sommets situés sur une même parallèle (MD) à cette base.

b) $Aire(MEO) = Aire(OMC) - Aire(OEC)$

c) $Aire(DEC) = Aire(ODC) - Aire(OEC)$

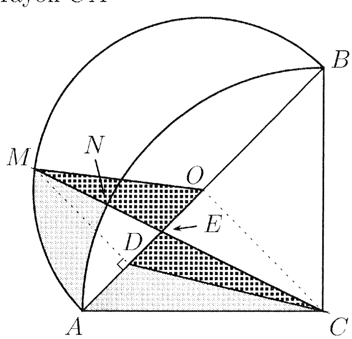


figure 10

3) $\underline{Aire(AMN) = Aire(ACD)}$

a) $(AMN) = secteur(OAM) - (ANE) - (MEO)$

b) $(ACD) = secteur(CAN) - (ANE) - (DEC)$

D'où l'égalité souhaitée

Ce travail de reconnaissance de certaines proportionnalités prépare le terrain à un questionnement plus large et général : construire un carré, un triangle équilatéral, un cercle, etc..., N fois plus grand qu'un carré, qu'un triangle équilatéral, qu'un cercle, etc... donné.

Cela nécessite la mise en place du théorème de Pythagore.

f) Le théorème de Pythagore.
Nous en connaissons des dizaines de démonstrations, mais l'une d'entre elles s'appuie sur l'unique propriété (A-R) et a l'avantage de se généraliser à des figures quelconques, en mettant l'accent sur l'idée de figures de même forme (donc agrandissement - réduction d'une figure donnée).

Considérons le triangle ABC rectangle en A. Sa hauteur AH définit deux autres triangles rectangles (ABH) et (ACH) de même forme (semblables) au triangle ABC (figure 11).

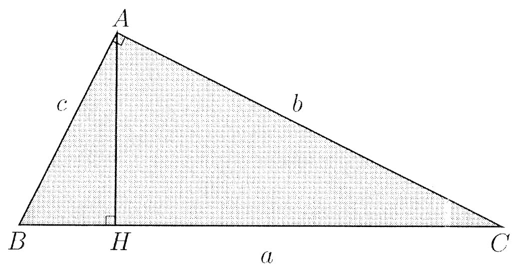


figure 11

Désignons par a, b, c les longueurs des côté BC, CA, AB respectivement.

Plus précisément :

– le triangle ABH est une réduction de ABC dans le rapport $\frac{c}{a}$

– le triangle ACH est une réduction de ABC dans le rapport $\frac{b}{a}$

Donc

$$Aire(ABH) = \Big(\frac{c}{a}\Big)^2.Aire(ABC) \quad \text{et} \quad Aire(ACH) = \Big(\frac{b}{a}\Big)^2.Aire(ABC)$$

D'où, en additionnant membre à membre

$$Aire(ABC) = \Big(\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\Big).Aire(ABC)$$

Donc $a^2 = b^2 + c^2$
De plus, si l'on note h la hauteur AH, m et n les longueurs des segments BH et HC,

$$\text{on a} \qquad \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \qquad \text{ou} \qquad h^2 = m.n$$

Relation qui nous servira dans la suite.

Mais à ce niveau, il est important de ne pas limiter le théorème de Pythagore à sa forme numérique $a^2 = b^2 + c^2$, mais d'y associer des images géométriques parlantes.

En faisant une symétrie par rapport à chacun des côtés du triangle ABC, le théorème de Pythagore peut se lire (figure 12) :

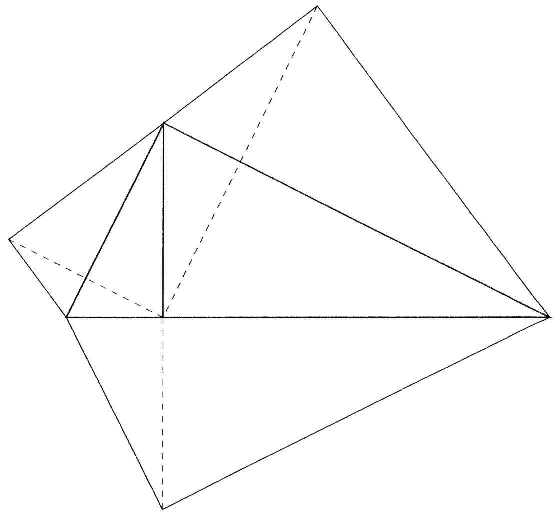


figure 12

Si, sur les côtés d'un triangle rectangle donné, on construit des triangles rectangles semblables à ce triangle donné, la somme des aires des triangles construits sur les côtés de l'angle droit est égale à l'aire du triangle construit sur l'hypoténuse.

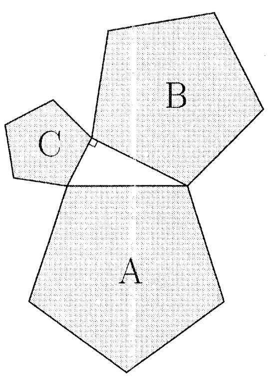


figure 13

Théorème qui se généralise à des figures quelconques, en vertu de la propriété (A-R).(figure 13 à 15)

En particulier, nous voici en mesure de résoudre le problème : construire une figure N fois plus grande et semblable à une figure donnée. Il suffit de construire un triangle rectangle dont les carrés de deux côtés ont une somme ou une différence égale à N.

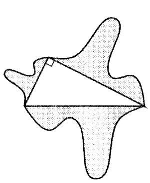


figure 14

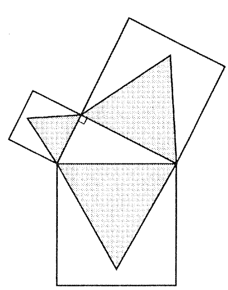


figure 15

Exemple : Construire un carré 5 fois plus grand qu'un carré donné : $5 = 2^2 + 1^2$

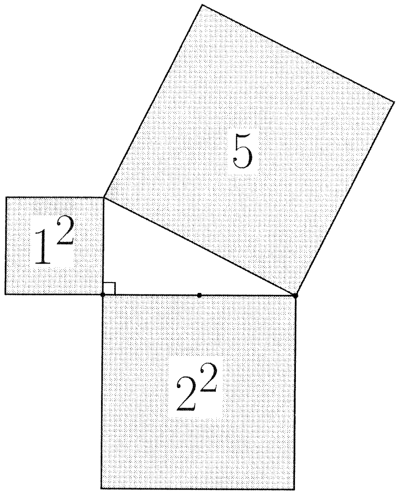


figure 16

Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et 2 répond à la question, en vertu du théorème de Pythagore (figure 16).

D'où une question d'arithmétique, en passant : quels sont les nombres N qui s'écrivent comme somme de deux carrés : $n = p^2 + q^2$?

On pourra faire constater ou vérifier que ce n'est pas possible pour $n = 3$ ou $n = 7$ ou $n = 11$ etc...

Mais de toute façon, on peut toujours écrire

$$n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

par exemple :
$7 = 4^2 - 3^2$; $\quad 11 = 6^2 - 5^2$
et ramener encore le problème à la construction d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse dans ce cas aura pour longueur $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ (figure 17).

Cela nous amène alors tout naturellement à la question :

Combien mesure le côté du carré 7 fois plus grand (n fois plus grand) qu'un carré donné de côté pris pour unité ?

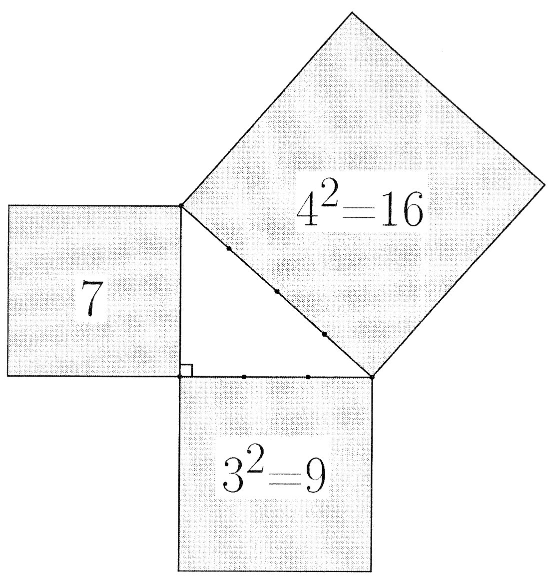


figure 17

C'est le deuxième objectif : conduire les élèves à la conscience qu'il y a des grandeurs dont la mesure ne peut s'exprimer ni par un entier ni par une fraction d'entier.

L'introduction du symbole $\sqrt{}$ et du nombre $\sqrt{n}$

Une vielle idée due à Archytas de Tarente (IVe s. av. J.C.) peut nous y aider et, d'une manière étonnamment proche de l'analyse moderne : celle des suites.

Considérons deux grandeurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, mesurées par les nombres entiers$a$ et b (nous supposons $b < a$), par exemple $a = 2$ et $b = 1$, comme sur la figure 18).
Construisons le cercle de centre O, de diamètre AB, mesurant $a + b$ et la perpendiculaire $GM = g$ en G telle que $AG = a$, $GB = b$.
Alors nous avons, $m = OM = \dfrac{a+b}{2}$ et $g^2 = ab$.

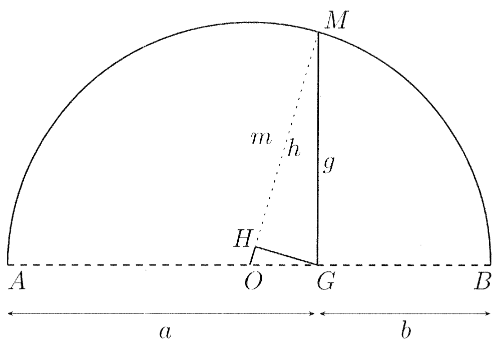


figure 18

Projetons encore orthogonalement G en H sur OM et soit $MH = h$. Dans le triangle rectangle OGM nous avons : $g^2 = m$ de sorte que $h = \dfrac{2ab}{a+b}$
m, g, h sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique de a et b et vérifient les inégalités :

$$b < h < g < m < a$$

A ce niveau là, on peut très bien se contenter de la propriété géométrique évidente que la perpendiculaire est plus courte que toute oblique, pour affirmer les inégalités strictes : $h < g < m$ et pour les termes extrêmes, on pourra faire les raisonnements suivants :

1. $b < a$ donc $b + a < a + a$ donc $m = \dfrac{b+a}{2} < a$
2. $\dfrac{1}{a+a} < \dfrac{1}{a+b}$ donc $\dfrac{2ab}{a+a} = b < \dfrac{2ab}{a+b} = h$

L'intérêt de ces inégalités c'est que

1. Si a et b sont rationnels, alors h et m le sont aussi, mais pas nécessairement g.
2. Comme $g^2 = hm$, on peut itérer la mise en place de moyennes encadrant g, en introduisant :

$m_1 = \dfrac{m+h}{2}$ nouvelle moyenne arithmétique

$h_1 = \dfrac{2mh}{m+h}$ nouvelle moyenne harmonique avec $m_1 h_1 = mh = g^2$ puis

– $m_2 = \dfrac{m_1 + h_1}{2}$; $h_2 = \dfrac{2m_1 h_1}{m_1 + h_2}$ et ainsi de suite.

– Pour tout n on aura $m_n h_n = g^2$: la moyenne géométrique reste fixe.

Avec les élèves, on aura intérêt à expérimenter la construction de ces suites d'abord avec des exemples où g^2 est un carré d'entier et ensuite seulement avec g^2 non carré d'entier.

Exemple 1 : $b = 4\,;\ a = 9\,;\ g = 6$

h		m		largeur de l' intervalle [h,m] inférieur à
en décimale	*en fraction*	*en décimale*	*en fraction*	
$5,538461538$	$\frac{72}{13}$	$6,500000000$	$\frac{13}{2}$	1
$5,980830670$	$\frac{1872}{313}$	$6,019230770$	$\frac{313}{52}$	10^{-1}
$5,999969280$	$\frac{1171872}{195313}$	$6,000030720$	$\frac{195313}{32552}$	10^{-4}
$6,000000000$	$\frac{457763671872}{76293945313} = 6 - \frac{1}{76293945313}$	$6,000000000$	$\frac{76293945313}{12715657552} = 6 + \frac{1}{12715657552}$	10^{-9}

Exemple 2 : $b = 1\,;\ a = 2\,;\ g = \sqrt{2}$

h		m		largeur de l'intervalle [h,m] inférieur à
en décimale	*en fraction*	*en décimale*	*en fraction*	
$1,333333333$	$\frac{4}{3}$	$1,500000000$	$\frac{3}{2}$	2×10^{-1}
$1,411764706$	$\frac{24}{17}$	$1,416666667$	$\frac{17}{12}$	10^{-2}
$1,414211438$	$\frac{816}{577}$	$1,414215687$	$\frac{577}{408}$	10^{-5}
$1,414213562$	$\frac{941664}{665857}$	$1,414213563$	$\frac{665857}{470832}$	10^{-9}
touche $\sqrt{\ }$		$\sqrt{2} = 1,414213562$		

Ces expérimentations numériques peuvent sensibiliser les élèves à plusieurs résultats concernant la construction des réels, base de l'analyse :

1. distinction entre un nombre et l'écriture décimale approchée que peut donner une machine.
2. exemples de suites rapidement convergentes.
3. existence de nombres limites qui ne sont ni décimaux, ni fractionnaires.

Pour ce dernier point, voici un exemple de démonstration classique en son début mais original ensuite et extrait d'un manuel allemand de classe 9 (environ classe française de seconde)[3].

Trous sur la droite des nombres :

On se demande maintenant s'il y a vraiment un nombre rationnel racine carrée de 2. Supposons qu'il existe un tel nombre.
Alors il se met sous la forme fractionnaire $\frac{p}{q}$ $(p, q \in N)$ simplifiée le plus possible.
La fraction $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p \times p}{q \times q}$ est alors également non simplifiable, et son dénominateur est différent de 1. Alors $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ n'est pas un nombre entier, notamment non égal à 2. C'est en contradiction avec notre hypothèse qu'il existe un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ avec $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. L'hypothèse était donc fausse ; il n'existe pas de nombre rationnel de carré 2.

La longueur de la diagonale d'un carré de côté 1cm ne peut pas être exprimée par un nombre rationnel en cm.

Autrement formulé : le nombre 2 n'a pas de racine carrée dans Q. Des études analogues pour les autres entiers naturels montrent que :

Les nombres entiers naturels, qui ne sont pas des carrés d'entiers, n'ont pas de racine carrée dans Q

Intervalles emboîtés :

On peut décrire précisément le lieu d'un point P de la droite réelle, qui ne correspond à aucun nombre rationnel, à travers des nombres. Comme le point P

3. Référence du livre : Lambacher Schweizer, Sachsen ; Klett, 1995.

correspondant au côté d'un carré d'aire 2 se situe :

entre	1	et	2	car	1^2	$< 2 <$	2^2
entre	1.4	et	1.5	car	1.4^2	$< 2 <$	1.5^2
entre	1.41	et	1.42	car	1.41^2	$< 2 <$	1.42^2
entre	1.414	et	1.415	car	1.414^2	$< 2 <$	1.415^2
	...		...		...		...

On obtient sur la droite une suite infinie d'intervalles $[A_1B_1]$; $[A_2B_2]$; $[A_3B_3]$; ... d'amplitudes respectives $0,1$; $0,01$; $0,001$; ...
Tous les nombres, qui par exemple sont compris entre 1 et 2 (1 et 2 compris) forment l'intervalle $[1;2]$. Les nombres rationnels qui appartiennent aux intervalles $[1;2]$; $[1,4;1,5]$; $[1,41;1,42]$; ... construisent des intervalles emboîtés (figure 19) :
On a pris 10 cm pour le côté du carré - Puis 10 cm entre 1,41 et 1,42 .

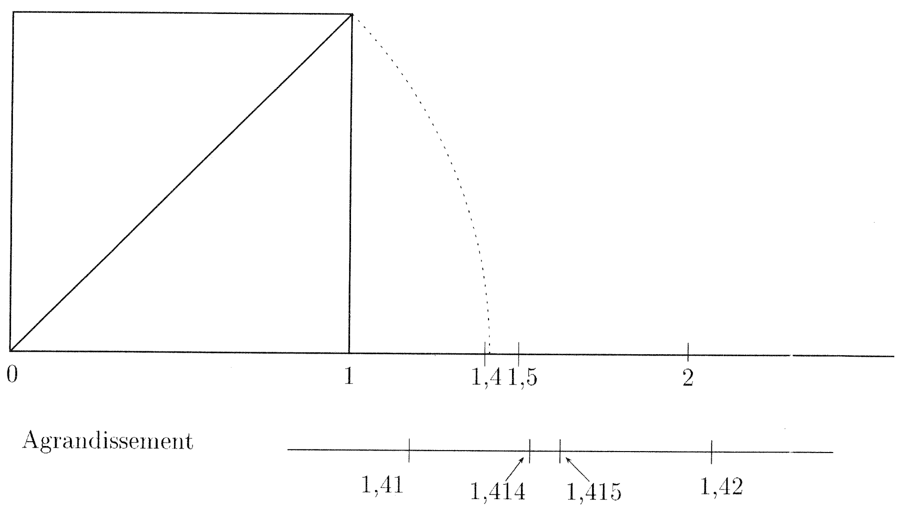


figure 19

1. chaque intervalle est inclus dans le précédent,
2. l'amplitude de chaque intervalle va diminuant et peut devenir aussi petite que souhaitée (c'est-à-dire plus petite que tout nombre positif arbitrairement petit).

Le point P appartient à tous les intervalles emboîtés. Chaque autre point Q $(\neq P)$ n'appartient pas à tous les intervalles parce que ceux-ci seront finalement d'amplitude plus petite que $[PQ]$: les intervalles emboîtés $[1;2]$; $[1,4;1,5]$; $[1,41;1,42]$; ... déterminent le point P sans équivoque.

Les intervalles emboîtés déterminent sur la droite réelle exactement un point.

Quelques approches de démonstration de formules.

Maintenant que l'existence de nombres irrationnels est en place, nous pouvons poser la question de la légitimité des formules notamment des formules d'aires mettant en jeu de tels nombres. Prenons simplement l'aire d'un rectangle :

Tout élève sortant de l'école primaire connaît la formule : *longueur* × *largeur* pour mesurer une telle aire. Et peut-être saura-t-il aussi la justifier sur un exemple. Si la longueur mesure 5 cm et la largeur 3 cm, le rectangle est constitué de 5×3 carrés unités de côté un cm. Et donc le rectangle mesure $15cm^2$ (figure 20).

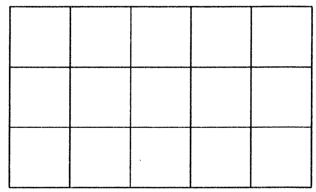


figure 20

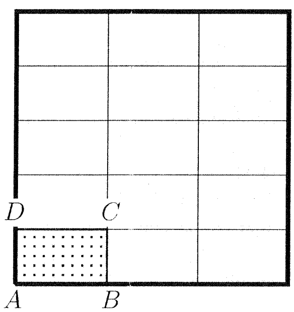


figure 21

La justification est déjà moins immédiate lorsque les dimensions du rectangle $ABCD$ s'expriment par des fractions de l'unité de longueur, par exemple $L = \frac{1}{3}$ et $l = \frac{1}{5}$.
Dans ce cas, on décomposera le carré unité U selon la figure 21 en mettant en évidence que le rectangle $ABCD$ mesure $\frac{1}{15}$ de l'aire du carré unité.

De même, lorsque plus généralement $L = \frac{m}{n}$ et $l = \frac{r}{s}$; m, n, r, s, entiers strictement positifs quelconques, le rectangle $ABCD$ (figure 22) mesure $m \times r$ parties du carré unité U, chaque partie valant un $(n \times s)$-ième de ce carré unité (figure 22 avec $L = \frac{5}{8}$ et $l = \frac{3}{4}$).

Mais que devient cette formule lorsque les côtés sont irrationnels?

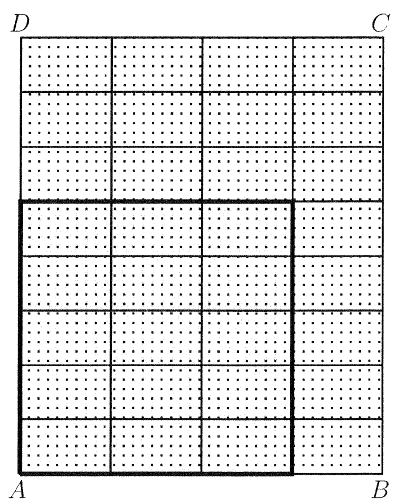


figure 22

Reprenons par exemple la comparaison des triangles équilatéraux construits respectivement sur le côté et la diagonale du carré (partie I. figure 4). Nous avons démontré, sans recours à la mesure, que le second est double en aire du premier. Pour le démontrer en utilisant la formule de l'aire du rectangle (à laquelle on peut se ramener), on écrira, en posant a la longueur du côté du carré,

1. $Aire(ABC) = \frac{1}{2}a \times a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
   (après avoir fait mesurer la hauteur au moyen du théorème de Pythagore).
2. $Aire(ADE) = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \times \left(a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 2 \times Aire(ABC)$.

Cela peut donner une illusion de facilité comme la donne toujours une formule toute faite, mais quel est l'élève de troisième capable de faire un tel calcul abstrait sur des symboles mathématiques et en comprenant ce qu'il fait?

Est-ce à dire qu'il faut en rester à la comparaison des grandeurs, sans utilisation de la mesure, sans utilisation des formules usuelles, à la manière des Anciens?

A cet endroit il n'est peut-être pas inutile de redéfinir la relation entre grandeurs et nombres que l'on appelle **mesure.**

Je ne saurais mieux expliquer cette relation que A. A. Cournot ne le fait dans un livre un peu ancien[4] , mais que je recommande aux professeurs de mathématiques pour sa clarté et la profondeur de ses réflexions.

> *Mesurer une grandeur, c'est la rapporter à une autre grandeur de même espèce prise pour unité ; sa mesure, c'est son rapport avec cette grandeur : réciproquement, le rapport d'une grandeur A à une autre grandeur B de même espèce, c'est le nombre ou l'expression numérique qui donnerait la mesure de A, si B était prise pour unité (...) D'après cela, si les grandeurs A et B, rapportées à une troisième grandeur C prise pour unité, sont respectivement mesurées par les nombres m et n (...) la valeur fractionnaire m/n est (...) l'expression du rapport de A à B (..)*
>
> *Le rapport de deux grandeurs A et B ne saurait changer avec la troisième grandeur C, dont on fait choix arbitrairement pour l'unité de mesure. Si les grandeurs A et B, rapportées à cette troisième grandeur C, se trouvent exprimées par des valeurs ou des nombres fractionnaires, on remplacera les nombres fractionnaires par des nombres entiers, en changeant convenablement l'unité de mesure, et l' on retombera sur le cas envisagé d'abord.*
>
> *Deux grandeurs A et B sont dites commensurables, lorsqu'elles ont une commune mesure, ou lorsqu'on peut assigner une grandeur de même espèce qui soit une partie aliquote de l'une et de l'autre: dans le cas contraire, les grandeurs sont dites incommensurables. (...)*

4. A.A. Cournot ; De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie ; Hachette ; 1847 ; p..26-32.

Des grandeurs de même espèce ou d'espèces différentes peuvent être liées entre elles, de manière que, si l'une vient à changer, l'autre change nécessairement, soit qu'elles augmentent et diminuent ensemble, soit que l'une augmente quand l'autre diminue, ou réciproquement. Or, ce qu'on peut imaginer de plus simple quand des grandeurs sont ainsi liées entre elles, c'est qu'elles augmentent ou diminuent proportionnellement, en sorte que, si l'une devient deux fois, trois fois, quatre fois plus grande, l'autre devienne aussi double, triple, quadruple, et ainsi de suite. Telle est, dans l'ordre des phénomènes naturels, la liaison entre l'espace décrit par un corps qui n'éprouve plus, une fois mis en mouvement, l'action d'aucune force ni d'aucune résistance, et le temps pendant lequel il se meut. Telle est encore, pour passer au faits les plus vulgaires dans la vie pratique, la liaison entre la quantité d'une denrée qui se vend à tant le mètre, le litre, le kilogramme, et le prix de la quantité vendue.

De même qu'on obtiendra l'espace décrit pendant 2, 3, 4 unités de temps, en multipliant par 2, 3, 4, le nombre qui mesure l'espace décrit pendant l'unité de temps, on obtiendra l'espace décrit pendant la moitié, le tiers, le quart d'une unité de temps en divisant ce nombre par 2, 3, 4. On obtiendrait l'espace décrit pendant 2/3 d'unité de temps en divisant ce nombre par 3, puis en doublant le résultat, et ainsi de suite. La liaison dont il s'agit conduira donc selon les cas, tantôt à une multiplication arithmétique, tantôt à une division arithmétique, tant, et plus généralement, à une combinaison de ces deux opérations de calcul. Cela dépendra des valeurs particulières des grandeurs qu'on aura à comparer ; et même, ces grandeurs ne variant pas, il suffirait de changer l'unité de temps qui est arbitraire, pour substituer à une opération arithmétique l' opération inverse.

Cependant la nature d'une telle liaison est indépendante, non-seulement des valeurs particulières attribuées aux grandeurs que l'on compare, mais encore des unités dont on a fait choix pour chaque espèce de grandeurs. Si donc nous voulons conserver dans le signe ou dans l'expression de l'idée le degré d'abstraction ou de généralité qui se trouve dans l'idée même, il faudra désigner par le même terme le lien mathématique entre le nombre h qui mesure l'espace décrit dans l'unité de temps, le nombre t qui mesure le temps écoulé durant le mouvement, et le nombre l qui mesure l'espace décrit pendant ce temps ; les trois nombres h, t, l, pouvant être indifféremment entiers ou fractionnaires. On dira en conséquence dans tous les cas que l est le produit de h et de t, ou qu'on obtient l en multipliant h par t ; et alors on considérera la division de h par $2, 3, 4$, *etc., comme la multiplication de h par les fractions* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, *etc.*

Cette relation que nous écrivons aujourd'hui sans difficulté : $l = h \times t$, faisait problème pour Galilée, pourtant l'un des principaux initiateurs de la physique classique au $XVII^{me}$ siècle. Elle faisait problème parce que Galilée était encore totalement prisonnier de la pensée grecque et de la théorie des proportions développées par Euclide dans le livre V des Éléments, pour gérer le problème des grandeurs incommensurables. On aura une idée de la complication à laquelle échappent nos élèves qui disposent de la notion de mesure et des relations algébriques telle que l'explique Cournot ci-dessus, en prenant connaissance de la manière dont Galilée exprime la loi du mouvement uniforme.

Théorème I - Proposition I

Si un mobile animé d'un mouvement uniforme parcourt, avec une même vitesse, deux distances, les temps des mouvements seront entre eux comme les distances parcourues.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{e_1}{e_2}$$

pour v donné

Théorème II - Proposition II

Si un mobile parcourt deux distances en des temps égaux, ces distances seront entre elles comme les vitesses. Et si les distances sont comme les vitesses, les temps seront égaux.

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\Longleftrightarrow t_1 = t_2$$

Théorème III - Proposition III

Si un même espace est franchi avec des vitesses inégales, les temps seront en raison inverse des vitesses.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

Pour e fixé

Théorème IV - Proposition IV

Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales, les espaces qu'ils parcourront en des temps inégaux seront entre eux dans un rapport composé du rapport des vitesses et du rapport des temps.

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{v}{v_2} \times \frac{t_1}{t_2}$$

Théorème V - Proposition V

Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales et sur des espaces inégaux, alors le rapport des temps sera composé du rapport des espaces et du rapport inverse des vitesses.

$$\boxed{\frac{t_1}{t_2} = \frac{e_1}{e_2} \times \frac{v_2}{v_1}}$$

Théorème VI - Proposition VI

Si deux mobiles sont animés d'un mouvement uniforme, le rapport de leurs vitesses sera composé du rapport des espaces parcourus et du rapport inverse des temps.

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{e_1}{e_2} \times \frac{t_2}{t_1}}$$

Tout le travail historique sur la numération décimale de position, sur le calcul symbolique et la construction de l'algèbre, sur la numérisation des raisons (Descartes) a totalement modifié l'approche que nous pouvons faire aujourd'hui de la mesure des grandeurs. La formule e = v t où e, v, t désignent des nombres mesurant des grandeurs de nature totalement hétérogènes efface les contraintes qu'imposait la théorie des proportions entre grandeurs homogènes telle que Galilée était encore obligé de l'énoncer. Mais il serait dangereux de court-circuiter totalement ce travail sur les grandeurs et les nombres qui permet de les rapprocher, car les proportions restent présentes mais cachées dans les questions d'unité de mesure. Et l'on sait combien ces questions sont source d'erreur chez les élèves, lorsque l'on passe trop vite des grandeurs à leur mesure.

Ce point étant précisé, voyons alors quelques exemples de démonstrations mettant en jeu le caractère infinitaire des nombres réels. Elles peuvent initier, nous semble-t-il, une réelle préparation à l'enseignement de l'analyse au lycée, surtout avec les outils calculatoires modernes.

La formule de l'aire du rectangle

lorsque l'un des côtés au moins est irrationnel.

Soit le rectangle $ABCD$ de hauteur rationnelle h de longueur réelle non rationnelle L, et $\mathcal{A}$ son aire exprimées dans une unité définie. Il existe donc des rationnels $a_1, a_2, a_n, b_1, b_2, b_n$ tels que :

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n < L < b_n < b_{n-1} < \ldots < b_2 < b_1$$

et $L - a_n$ et $L - b_n$ soient tous deux aussi petits que l'on veut.

Je dis que $\mathcal{A} = h \times L$.
En effet, si ce n'était pas le cas, nous aurions $\mathcal{A} < h \times L$ ou $\mathcal{A} > h \times L$
Supposons par exemple que $\mathcal{A} < h \times L$
Donc $\mathcal{A} = h \times x$ avec $x < L$

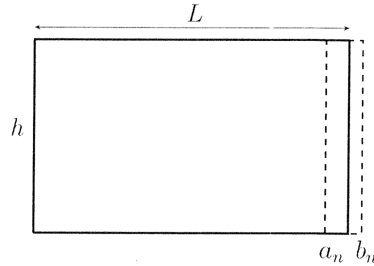


figure 23

Il y a un nombre a_n tel que $x < a_n < L$ puisque la différence $L - a_n$ peut être rendue aussi petite que l'on voudra, en particulier, plus petite que $L - x$.
Le rectangle de côtés h et a_n a ses côtés rationnels, donc son aire mesure $h \times a_n$.
Donc $h \times x = \mathcal{A} < h \times a_n$. Mais $a_n < L$ donc $h \times a_n < \mathcal{A}$

Cela est contradictoire et l'hypothèse $A < h \times L$ ne tient pas. On démontrerait de même l'absurdité de l'hypothèse inverse. Il est bien clair qu'un tel raisonnement reste inaccessible à l'élève moyen de collège, en l'état actuel. Mais rien n'interdit d'y préparer en travaillant sur un rectangle particulier, par exemple de dimensions 1 et $\sqrt{2}$ et en prenant les suites de nombres a_n et b_n du tableau de l'exemple 2 page 16.

Si le rectangle $ABCD$ a maintenant ses deux dimensions irrationnelles, l et L, il suffit de reprendre la démonstration précédente avec des rectangles tous de Longueur L, et des largeurs rationnelles $a_1, a_2, a_n, b_1, b_2, b_n$ telles que

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n < L < b_n < b_{n-1} < \ldots < b_2 < b_1$$

Le nombre π

Les élèves connaissent deux formules faisant intervenir le nombre π :

- celle de la longueur d'un cercle de rayon R : $L = 2\pi R$
- celle de l'aire d'un disque de rayon R : $A = \pi R^2$

Il est surprenant et très regrettable que l'existence de ces deux formules ne suscite (plus?) aucune interrogation chez les élèves qui sortent du collège. Une sensibilisation aux questions et au raisonnement mathématiques voudrait que l'on en soulève pourtant au moins deux :

- que prend-t-on comme définition de π?
- quelle relation y-a-t il entre les deux formules?

Historiquement, la définition correspond à la première formule : π est le nombre qui mesure la circonférence (perimetroz = périmètre) d'un cercle de diamètre l'unité de longueur.

Si l'on accepte cette définition de π il faut alors, au minimum, poser la question :

Pourquoi ce nombre π mesure-t-il aussi l'aire du disque de rayon l'unité de la longueur ?

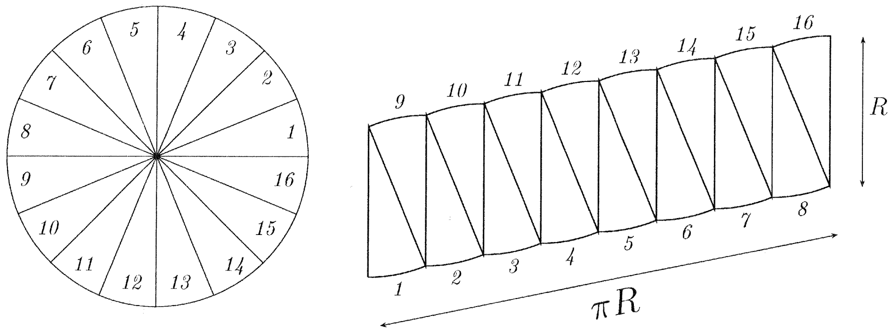


figure 24

Une démonstration simple, accessible aux élèves de collège peut être celle-ci, bien connue :

On partage le cercle en secteurs égaux de plus en plus nombreux, que l'on déroule selon la figure.En augmentant indéfiniment le nombre de secteurs on obtient à la limite un rectangle de côtés R et πR, d'où le résultat.

Le volume d'une sphère

On peut encadrer ce volume par les volumes du cylindre circonscrit et du cône inscrit.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \times r < V < \pi r^2 \times r$$

En faisant la moyenne entre les deux encadrements on trouve un volume de $\frac{1}{3}\pi r^3$, c'est-à-dire le volume de la différence entre le cylindre et le cône.

On peut montrer qu'effectivement le volume de la demi-sphère est égal à cette différence, en comparant l'aire (a_2) d'une section horizontale de la sphère et l'aire (a_1) d'une section du volume compris entre le cône et le cylindre.

$$a_1 = \pi r_2 - \pi x_2 \quad ; \quad a_2 = \pi {r_2}^2 = \pi(r_2 - x_2)$$

En appliquant le principe dû à Cavalieri on peut affirmer l'égalité des volumes correspondants. Donc le volume de la sphère est égal à $\frac{4}{3}\pi r^3$

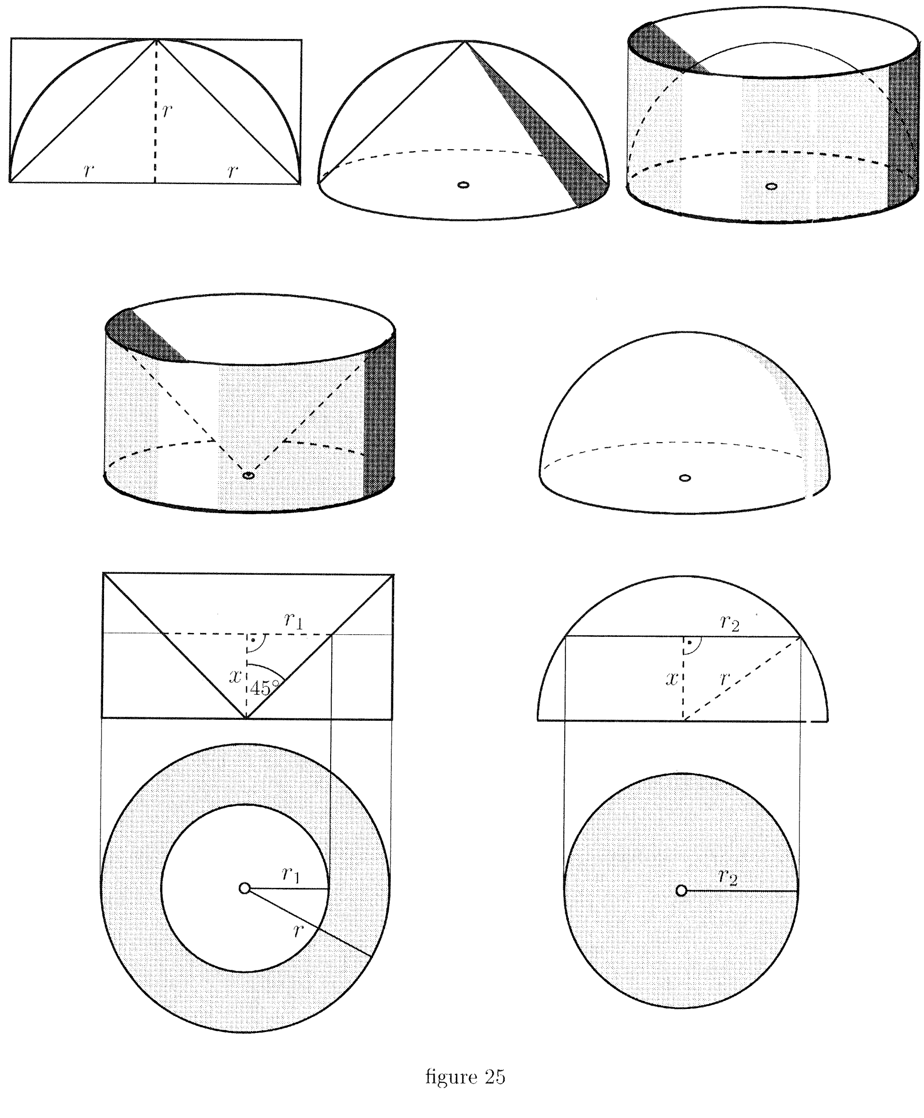


figure 25

Conclusion

La grande difficulté de l'enseignement de l'analyse réside dans l'obstacle incontournable de l'infini. La mesure des grandeurs bute constamment sur des processus infinitaires, se soldant par l'impossibilité d'exprimer certaines mesures à l'aide de nombres. On connaît le choc provoqué chez les Pythagoriciens par la première confrontation de l' intelligence humaine avec ce problème. Le vocabulaire mathématique en a gardé la trace jusqu'à aujourd'hui, comme une empreinte fossile : le mot d irrationnel. Mais c'est en même temps ce choc qui a obligé le mathématicien philosophe à quitter le monde de la perception sensible pour un monde intelligible d'objets mathématiques abstraits et idéaux, soumis à des calculs.

> *Avant la découverte de l'incommensurabilité, la droite reste un objet confondu avec ses modèles physiques : trait graphique, faîte d'un toit, etc. Si c'est là ce qu'on entend par objet de l'intuition, c'est retomber dans l'empirique et il n'y a là rien qui soit de l'ordre d'une notion mathématique. C'est dans l'opération de mesure que s'est dévoilée la vraie nature de l'objet "droite" , son essence idéale, plus précisément dans le processus de mesure d'un segment incommensurable à l'unité de mesure : le caractère illimité du processus, dont il a été question ci-dessus à propos de l'usage de l'algorithme d'Euclide, révèle, au sein même de la finitude du segment, une infinité qui, même conçue comme potentielle, ne peut appartenir qu'à un objet idéal, qui se trouve défini en tant que tel par ce processus même (Pour un objet empirique, on atteint le seuil de la perception en un nombre fini d'étapes). Mais il n'y à là aucune intuition rationnelle qui livrerait d'avance, dans une évidence originaire, les propriétés d'un tel objet : celles-ci sont à découvrir pas à pas, ce qui n'exclut pas que certaines d'entres elles aient pu être dégagées dès la période historique antérieure, où la droite était confondue indûment avec ses modèles empiriques, c'est-à-dire avec sa représentation. Dans tous les cas, ce sont les actes opératoires qui dévoilent les propriétés objectives en parcourant l'enchaînement des médiations nécessaires : il n'y a pas de vision immédiate qui les ferait d'un seul coup apparaître (...)*

Il me semble que c'est dans cette articulation qu'il faudrait penser la question de la mesure des grandeurs, en vue d'une préparation à l' apprentissage de l'analyse : en maintenant constamment la tension existant entre l'intuition des grandeurs qui les relie à une réalité physique sensible et observable, et un raisonnement qui dépasse ce caractère sensible, par la nécessité de prouver. Autrement dit : maintenir toujours l'objet grandeur à côté de sa mesure. Si nous passons trop vite au seul numérique, nous habituons l'élève à réduire sa réflexion mathématique à la seule application de formules, au détriment du raisonnement. Sa capacité de penser rationnellement, scientifiquement se perdra, tant pour les mathématiques que pour la physique.

Beaucoup de formules sont déjà données à l'école primaire, qui sont reprises au collège. De sorte qu'on a l'impression qu'elles sont reprises simplement comme une sorte de maintenance, pour ne pas les oublier, mais sans qu'elles soient l'objet de questionnement. Or pour préparer à l'apprentissage de l'analyse, d'une façon qui ne soit pas abstraite, les grandeurs et leur mesure sont l'occasion de mettre en place des premiers éléments de méthode, des premiers exemples de raisonnement, et une première intuition de la richesse de l'ensemble des nombres réels.

Bibliographie

[1] CAVEING M.,1982. *Quelques remarques sur le traitement du continu dans les Éléments d'Euclide et la Physique d'Aristote*; dans Penser les mathématiques, Point Sciences, Seuil.

[2] COURNOT A.A., 1847. *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*; Hachette.

[3] DELEDICQ CASIRO, 1998. *Pythagore et Thalès*; ACL, les Éditions du Kangourou.

[4] FRIEDELMEYER J.P., octobre 1993. *Éclairages historiques pour l'enseignement de l'analyse ; REPÈRES-IREM* n°13.

[5] FRIEDELMEYER J.P., avril 1998. *Les aires : outil heuristique, outil démonstratif; REPÈRES-IREM* n°31.

[6] GALILÉE. *Discours concernant deux sciences nouvelles*; traduction Clavelin 1970 ; Armand Colin.

[7] HOFFMAN Jos., 1965 *Aus des Frühzeit der Infinitesimalmethoden*, Archiv. Hist. Exact Sciences ; Vol.2.

[8] IREM de Strasbourg -1996 - Groupe d'Histoire des Mathématiques de l'IREM de Strasbourg : *Activités géométriques pour le collège et le lycée* ; Brochure IREM ISBN 2-911446-003 (2 volumes).

[9] LEBESGUE H. *La mesure des grandeurs*; réédition 1975 ; Librairie Scientifique et Technique ; A. Blanchard.

[10] STOLL A., avril 1998. *Les lunules d'Hippocrate de Chio ; REPÈRES-IREM* n°31.