REPERES - IREM . N° 33 - octobre 1998

APPLICATIONS DU PLAN DANS LE PLAN EN CLASSE DE SECONDE

G. ANSELME, M. MAGNENET
IREM de Besançon

Les applications du plan dans lui-même dont l'étude figure au programme de la classe de seconde (rotations, homothéties, translations...) sont toutes des applications affines.

A ce niveau, il est certes indispensable de se limiter à ce cas, à la fois simple et fondamental. Il faut cependant être conscient, nous semble-t-il, du danger d'extrapolation de la part des élèves qui, par exemple, pourraient croire que, par toute application du plan dans lui-même, "l'image d'une droite est une droite".

C'est pourquoi il nous paraît intéressant d'étudier quelques exemples simples d'applications qui ne conservent pas l'alignement. C'est dans cet esprit que sont conçues les deux fiches-élèves proposées ci-après.

La première est consacrée à une application dont les restrictions à certaines parties du plan sont des symétries. Très accessible géométriquement, elle présente également l'intérêt de relever d'une définition analytique très simple qui peut être l'occasion de quelques exercices sur l'emploi de coordonnées, les équations de droites, etc.

Dans la deuxième fiche, plus descriptive, on propose une construction de quelques points d'une conchoïde, de droite notamment. Un traitement analytique est évidemment exclu en classe de seconde, mais l'application considérée est définie de manière suffisamment simple pour permettre quelques constructions mettant en évidence la non-conservation de l'alignement.

Eu égard à l'objectif poursuivi ici, nous avons bien entendu songé à l'inversion. Malheureusement c'est une transformation qui se prête assez mal à des constructions géométriques simples et c'est pourquoi nous ne lui avons pas consacré de fiche.

On trouvera également à la fin de cet article quelques remarques et suggestions concernant un éventuel emploi de l'outil informatique dans certaines des activités proposées dans ces deux fiches.

FICHE-ÉLÈVE 1

On considère un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On désigne par f l'application qui, à tout point M de coordonnées (x, y) de ce plan, fait correspondre le point M' de coordonnées $(|x|, |y|)$.

1. Chercher les images par f des points A(1 ; 3) ; B(– 1 ; 1) ; C(– 3 ; -1) ; D(4 ; – 3) ; E(0 ; – 3) ; F(1 ; 0) ; G(0 ; 3) ; H(– 1 ; 0) ; O(0 ; 0).
   Vérifier que A, B et C sont alignés. Leurs images le sont-elles ?

2. Quelle est l'image par l'application f d'un point M(x, y) appartenant

   a) au premier quart de plan $(x \geq 0, y \geq 0)$?
   b) au deuxième quart de plan $(x \leq 0, y \geq 0)$?
   c) au troisième quart de plan $(x \geq 0, y \leq 0)$?
   d) au quatrième quart de plan $(x \leq 0, y \leq 0)$?

   En déduire une description simple de f.

3. En utilisant la question précédente, donner l'image par f de la droite passant par A, B et C, puis les images des droites (AG), (AF), (BH), (BF), (ED), (OD), (OA).
   Dans quels cas l'image d'une droite est-elle une demi-droite ?
   Trois points alignés appartenant à des quarts de plan différents peuvent-ils avoirs des images alignées ?

4. Chercher l'image par f des triangles BHF, EFH, GHE et ACE.
   Existe-t-il des cas où l'image d'un triangle est un triangle ?
   Chercher un triangle dont l'image soit la réunion de deux triangles sans côté commun.

5. Chercher l'image par f des losanges EFGH et PQRS avec P(4 ; – 4), Q(2 ; 2), R(– 4 ; 4) et S(– 2 ; 2).
   Chercher l'image par f d'un carré de centre O dont les sommets sont sur les axes puis celle d'un carré de centre O dont les côtés sont parallèles aux axes.
   Chercher l'image par f du carré de centre B et de sommets A et C.
   Chercher l'image par f d'un carré de côté [PR] puis celle d'un carré de côté [QS].
   Décrire le mouvement de l'image M' de M par f lorsque M décrit ces carrés.

6. Chercher l'image par f du cercle de centre O et de rayon 2, celle du cercle de centre F et de rayon 4, celle du cercle de centre H et de rayon 1 et celle du cercle de centre G et de rayon 4.
   Chercher l'image d'un cercle entourant O dont le centre appartient à la première

bissectrice et décrire le mouvement de M' lorsque M décrit ce cercle.
Donner l'image du cercle passant par F de centre T(– 1, – 2).

7. Chercher les antécédents de A, de H, de O, de F.
Combien un point M(x, y) a-t-il d'antécédents ?
Chercher l'ensemble des antécédents des points d'un segment horizontal, d'un segment vertical, d'un segment oblique dont les sommets sont sur les axes, d'un segment oblique dont les sommets ne sont pas sur les axes.
Chercher l'ensemble des antécédents des points du triangle AOF.
Chercher un triangle tel que l'ensemble des antécédents des points de ce triangle soit constitué de deux carrés.

COMMENTAIRES ET INDICATIONS SUR LA FICHE-ÉLÈVE 1

Commentaires

Ces exercices permettent de revoir les notions de symétrie axiale, symétrie centrale, losange, carré, triangle, cercle..., images et antécédents.

On peut remarquer par ailleurs que f est la composée de :

$f_1 : M(x, y) \mapsto M'(|x|, y)$
et $f_2 : M(x, y) \mapsto M'(x, |y|)$.

L'image d'une figure par f s'obtient donc par "rabattements" successifs, autour de l'axe $(O, \vec{j})$ puis de l'axe $(O, \vec{i})$ ou inversement. On pourra montrer que f ne conserve ni les distances ni l'alignement.

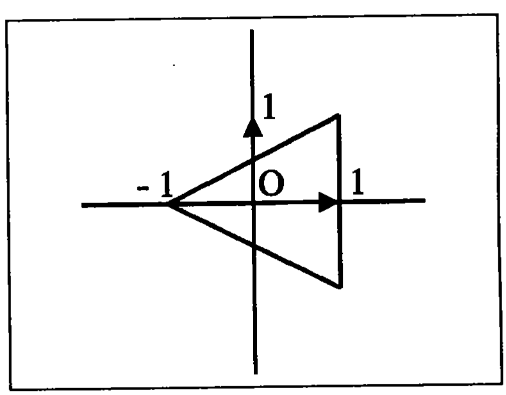
Indications

Exercice 3

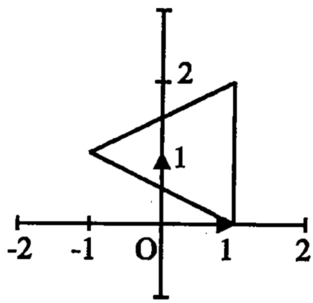
Trois points n'ont des images alignées que si la droite qu'ils définissent a pour image une demi-droite ou s'ils sont tous les trois dans le même quart de plan.

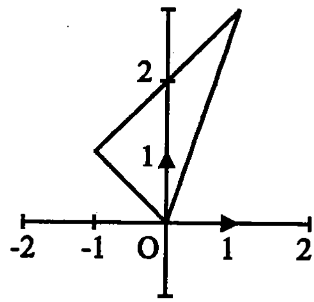
Exercice 4

Le triangle ci-dessous a pour image un triangle et ceux qui sont dans un seul quart de plan aussi.



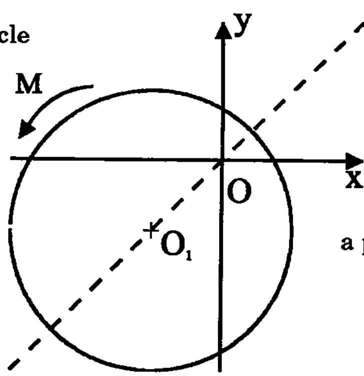
Les triangles ci-dessous ont pour images deux triangles n'ayant qu'un point commun.



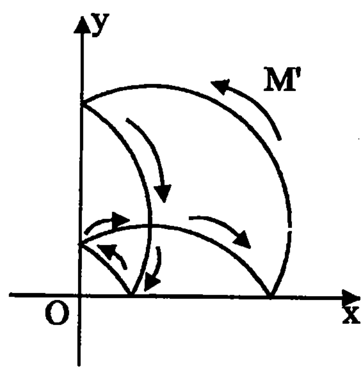


Exercice 6

Le cercle

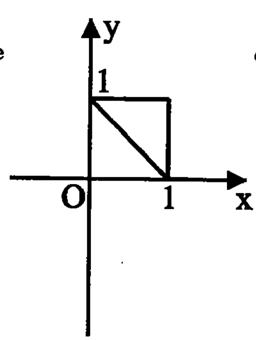


a pour image

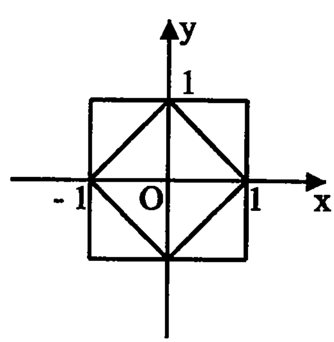


Exercice 7

L'image réciproque de



est



FICHE-ÉLÈVE 2

Exercice 1

Soit O un point du plan et ℓ un réel positif.
A tout point M du plan on associe le point M' défini par :

– Si M = O alors M' = O.

– Si M ≠ O alors M' est le point de la droite (OM) n'appartenant pas à la demi-droite [MO) tel que la distance MM' soit égale à ℓ .

On définit ainsi une application f du plan dans lui-même.
Tracer quelques points puis leurs images par f.
Tracer quelques points puis leurs antécédents par f.

Exercice 2

Soit O un point du plan et ℓ un réel positif.
A tout point M du plan on associe le point M' défini par :

Si M = O alors M' = O.

Si M ≠ O alors M' est le point de la droite (OM) appartenant à la demi-droite [MO) tel que la distance MM' soit égale à ℓ .

On définit ainsi une application g du plan dans lui-même.
Tracer quelques points puis leurs images par g.
Tracer quelques points puis leurs antécédents par g.

Exercice 3

Tracer une droite Δ du plan et un point O n'appartenant pas à Δ.
Tracer des points de Δ puis leurs images par l'application f définie dans l'exercice 1.
Dessiner l'ensemble image de la droite Δ par f.
Ecrire toutes les remarques que ce dessin vous suggère.

Exercice 4

Reprendre l'exercice 3 et remplacer l'application f par l'application g définie dans l'exercice 2 ou remplacer la droite Δ par un cercle C.

COMMENTAIRES SUR LA FICHE-ÉLÈVE 2

Deux objectifs peuvent être envisagés dans l'étude de cette deuxième fiche.

Le premier est de mettre en évidence des images d'ensembles de points, puis des ensembles de points dont les images sont des ensembles donnés. On pourra choisir des droites ou des cercles contenant O ou non, des cercles de centre O...

Le deuxième objectif est de faire constater la non conservation de l'alignement et de la distance. Cela peut être également l'occasion, au niveau première S, de montrer l'intérêt et d'utiliser une nouvelle notion, celle de coordonnées polaires, puis le lien avec les coordonnées cartésiennes.

L'utilisation des logiciels classiques ou d'une table traçante nous permet de construire des conchoïdes de droites ou de cercles.

Qu'est-ce qu'une conchoïde ?

Etant donné un point O et une courbe C si à tout point M de C on fait correspondre les points M' et M'' de la droite (OP) situés à une distance donnée ℓ de M, le lieu géométrique de ces points M' et M'' est ce qu'on appelle une conchoïde de C.

Observons que si Γ est une conchoïde de C, la courbe C est incluse dans une conchoïde de Γ.

REMARQUES ET SUGGESTIONS CONCERNANT L'USAGE DE L'OUTIL INFORMATIQUE POUR CE TYPE D'ACTIVITÉS

– Il nous semble tout d'abord fondamental d'insister sur le point suivant : il est indispensable que l'élève commence ces activités par un travail individuel à la main, point par point. Ce n'est que de cette manière qu'il pourra s'approprier totalement les différentes définitions, comprendre en quoi les applications auxquelles il est confronté ici créent une rupture par rapport à ses connaissances antérieures et élaborer une stratégie pour construire les différents ensembles images. Recourir trop rapidement à l'outil informatique au cours de ces activités risquerait d'introduire “un filtre” préjudiciable à une totale compréhension des problèmes posés.

– Il est en revanche évident que les différents logiciels dont nous pouvons disposer peuvent fournir ensuite une aide intéressante dans la gestion de telles séquences. Outre le confort certain, grâce à la qualité et la vitesse de l'exécution, qu'ils apportent dans la correction des activités à l'enseignant qui dispose d'une tablette à rétroprojeter reliée à un ordinateur, ces logiciels peuvent prendre efficacement le relais des élèves après que ceux-ci ont bien compris les procédés de construction mis en uvre. Ils fournissent en effet une vision très efficace, parce que dynamique (outil trace de Cabri-Géométre ou de Géoplanw) et débarrassée des multiples traits de construction, des lieux de points obtenus. Ils permettent d'autre part d'agir rapidement sur les différents paramètres (valeur de ℓ, positions relatives du point O et de la droite Δ, du point O et du cercle C ...). On

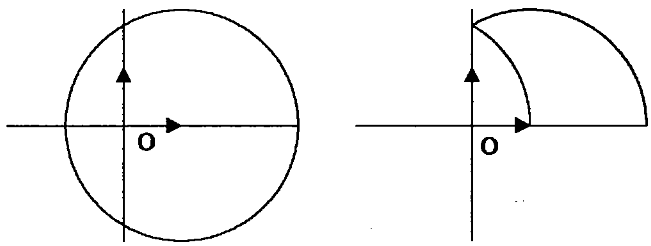


Fig. 1

peut ainsi visualiser différents types d'ensembles images, ce qui ne serait pas possible si les élèves ne travaillaient qu'à la main car la séquence risquerait de devenir longue et monotone.

– Voici quelques suggestions :

1. On peut envisager l'emploi d'un simple traceur de courbe comme par exemple Graph'x.

Pour l'application de la fiche 1, il suffit de tracer la courbe de départ (numéro 1) en mode paramétrique. La courbe image s'obtiendra simplement en définissant ses fonctions coordonnées par $x(t) = |x_1|$ et $y(t) = |y_1|$.

Voici par exemple *(figure 1 ci-dessus)* l'image du cercle de centre G et de rayon 4 par l'application considérée dans la fiche 1.

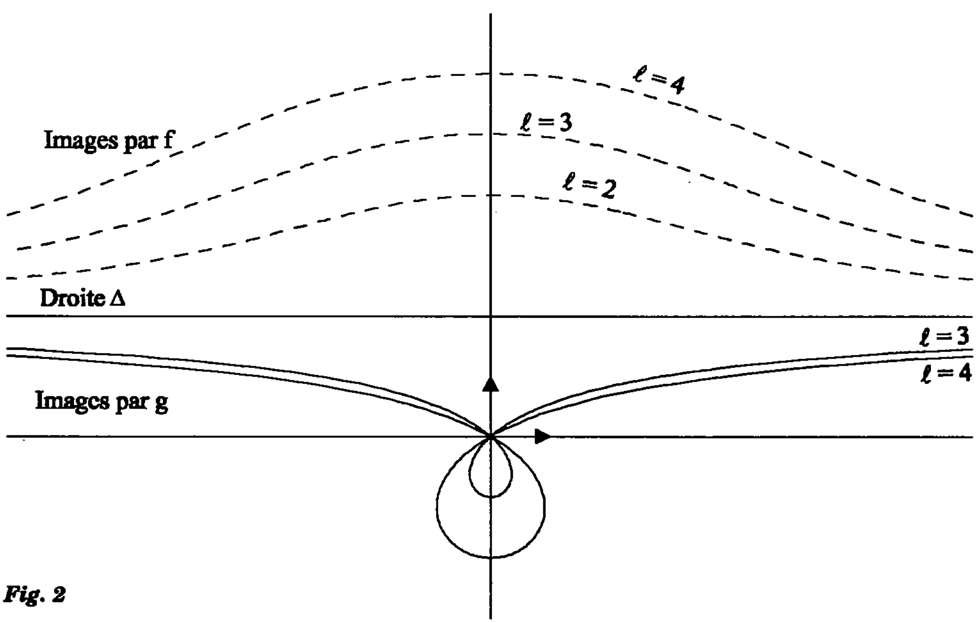


Fig. 2

Pour les applications de la fiche 2, on pourra obtenir les images d'une droite par f ou par g en utilisant Graph'x en coordonnées polaires *(cf. figure 2 page précéente)* : une équation cartésienne de Δ étant y = a, une équation polaire de Δ est $\rho = \frac{a}{\sin\theta}$, une équation de son image par f est $\rho = \frac{a}{\sin\theta} + \ell$ et une équation de son image par g est $\rho = \frac{a}{\sin\theta} - \ell$.

Graph'x permet également de construire facilement une conchoïde d'un cercle de rayon r par rapport à *l'un de ses points* O (ou limaçon de Pascal) *(figure 3)*. En effet, dans un repère orthonormal convenable d'origine O, le cercle considéré a pour équation polaire $\rho = r\cos\theta$ et ses conchoïdes par rapport à O auront pour équation polaire $\rho = r\cos\theta + \ell$.

2. Les logiciels les plus intéressants sont à notre avis ceux disposant d'un outil trace et de possibilités d'animation comme par exemple Cabri-Géomètre ou Géoplanw.

En ce qui concerne la fiche 1, Géoplanw est bien adapté lorsque l'on souhaite

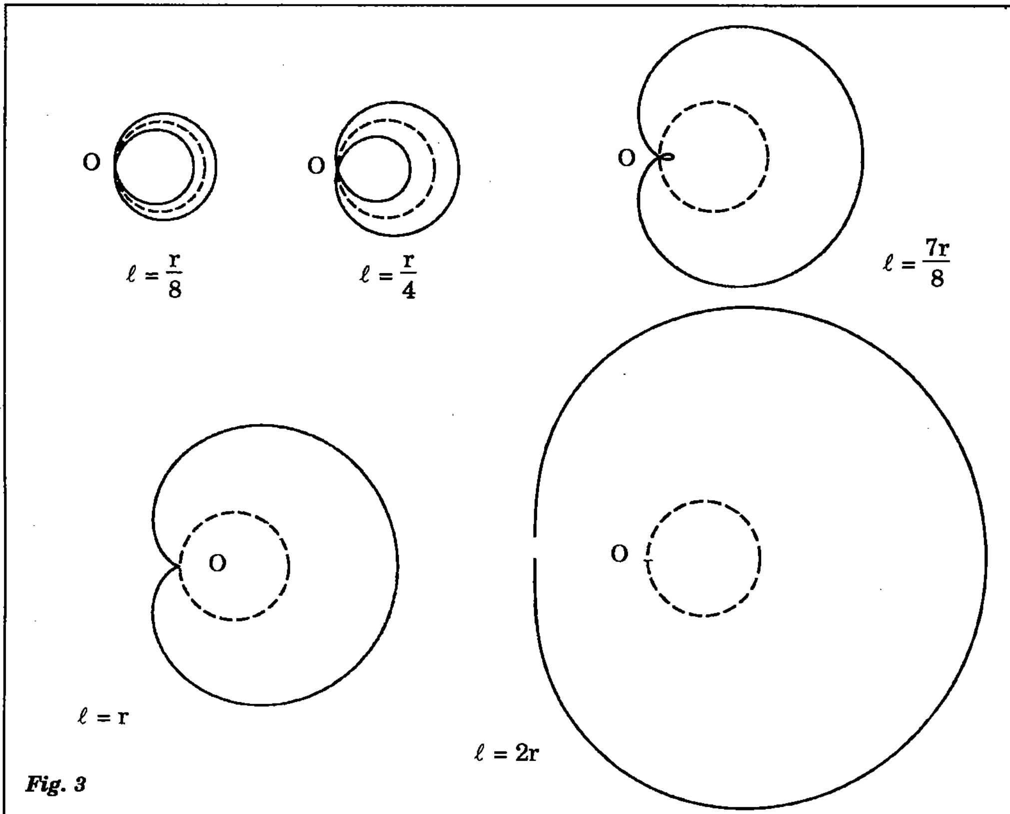
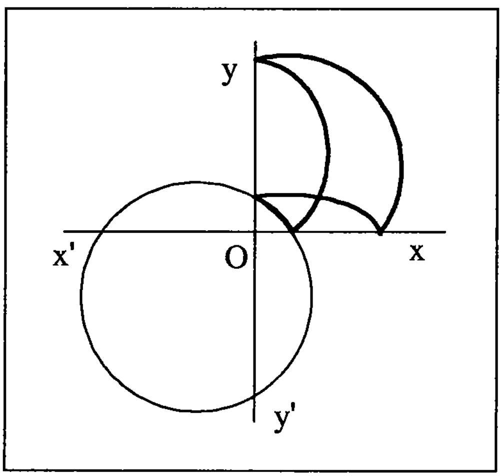


Fig. 3

obtenir l'image d'un cercle (ou d'une droite). Il permet en effet de définir rapidement le point M comme point libre du cercle puis les coordonnées x et y du point M. Il suffit alors de définir M' comme étant le point de coordonnées |x| et |y|. On peut alors demander la trace de M' lorsque M parcourt le cercle et piloter M soit avec la souris soit depuis le clavier.

On peut aussi créer la courbe correspondant au lieu du point M'.



Cabri-géomètre nécessite davantage de manipulations pour définir le point M' : il faudra faire afficher les coordonnées de M, utiliser ensuite l'outil calculatrice pour obtenir les valeurs absolues de ces coordonnées puis l'outil report de mesure pour reporter ces valeurs sur les axes, construire alors les parallèles aux axes passant par les points ainsi obtenus et enfin définir M' comme point d'intersection de ces parallèles. En revanche, Cabri-Géomètre permet de définir le point M comme appartenant à un polygone donné, ce qui n'est pas possible avec géoplan, et son outil animation est très efficace et spectaculaire.

Les deux logiciels sont très bien adaptés aux activités de la fiche 2. Ils permettent à l'élève de comprendre parfaitement comment M' (ou M") parcourt l'ensemble image lorsque M décrit la droite ou le cercle de départ.

Voici un exemple d'images d'un cercle par les applications f et g obtenues avec Géoplanw. Dans cet exemple, r désignant le rayon du cercle et I son centre, on a IO = 2r et ℓ = 1,5 r.