REPERES - IREM. N° 27 - avril 1997

DROITES SAGES ET DROITES FOLLES EN PREMIÈRE SCIENTIFIQUE (1)

Gérard KUNTZ
IREM de Strasbourg

Introduction

L'introduction de la dérivée constitue un temps fort de l'apprentissage des mathématiques en Première scientifique. Cette notion très délicate a besoin, pour être vraiment comprise, d'un long temps de maturation qui s'étende au moins sur les deux dernières années du lycée. Avant de la préciser sur le plan théorique, il est indispensable de faire naître dans l'esprit des élèves des représentations mentales sans lesquelles la définition rigoureuse demeure hermétique. Elles peuvent s'élaborer à travers des activités de nature géométrique ou cinématique, pourvu qu'on leur accorde un minimum de durée. En effet, la notion de tangente à une courbe n'est pas plus simple que celle de dérivée : elle en recèle toutes les subtilités. Mais elle parle à l'imagination et elle propose à l'élève un cadre géométrique où il peut exercer son intuition. De plus, l'informatique lui permet d'expérimenter personnellement là où, il y a peu, il devait se contenter de quelques exemples traités par l'enseignant. Et surtout, elle rend possible la réflexion sur des images variées et complexes dont l'élaboration (confiée à un logiciel) dépasse ses capacités théoriques du moment. En particulier, il rend accessibles des exemples de courbes n'ayant pas de tangente en certains points. Dans l'esprit des élèves, de tels contre-exemples consolident, après une période inévitable de flottement et de désarroi, le concept de tangente, donc de dérivée. Ils en montrent la profondeur et la non-évidence.

(1) Le titre est un double clin d'œil aux vierges de l'Evangile et aux vaches (surtout anglaises) qui défraient la chronique depuis quelque temps. Les unes rappellent la nécessité de la vigilance et de l'éveil, les autres témoignent des catastrophes qui guettent les sociétés où tout est subordonné au profit immédiat ! (Toute ressemblance avec le système éducatif français serait évidemment purement fortuite.)

Cet article décrit succinctement les activités d'approche et d'élaboration de la notion de tangente proposées à une classe de Première S du lycée Couffignal à Strasbourg, dans un environnement informatique. Il s'attarde sur l'utile déstabilisation provoquée par la rencontre d'une courbe sans tangente en un point. Il souligne le prix à payer pour une meilleure compréhension des mathématiques : la motivation et la durée.

La motivation et la durée

Une partie des activités qui suivent serait déraisonnable si la classe concernée n'avait manifesté, dès le début de l'année, une exceptionnelle motivation. Le niveau était bon (sans plus). Les élèves étaient tous volontaires pour suivre une option d'informatique appliquée aux mathématiques. Un luxe rare leur était offert : un espace de liberté de deux heures par quinzaine, tout au long de l'année, pour réfléchir, approfondir des notions, les explorer sous divers aspects, jusque sur leurs frontières. Point de programme imposé : s'il fallait une séance de plus pour comprendre, rien ne s'y opposait ! Pas d'angoisse de notation pour les élèves : le compte rendu écrit, clé de voûte de l'activité, était réalisé sur place, en binôme, avec une large concertation entre les élèves et avec leur professeur. La rencontre d'une forte motivation et d'une importante durée de maturation a permis d'aborder avec un réel succès la difficile notion de tangente.

1. UNE MARCHE D'APPROCHE EN DEUX ÉTAPES

L'indispensable changement de regard

Pour donner un sens à la notion de tangente, il faut modifier profondément la manière de regarder les courbes. Le regard global doit céder le pas à un regard local, qui s'intéresse à ce qui se passe à proximité immédiate d'un point de la courbe. Pour les élèves en début de Première, cette façon de regarder n'a rien de naturel. On leur propose une totale rupture de leurs habitudes mentales, qui ne va pas sans surprise et sans résistance : ils éprouvent un sentiment de perte, de régression par rapport à leurs approches antérieures, qui embrassaient une courbe dans sa totalité. Ils expriment leurs craintes face à une tâche qu'il pressentent complexe et écrasante : "Il faudra faire ça pour *tous les points* de la courbe ?"

A. UNE COURBE MÉTAMORPHOSÉE EN SEGMENT

Au cours d'une activité concernant les "détails" de certaines courbes, les élèves ont été amenés à représenter à l'écran des fonctions dans des intervalles très petits (bibliographie n° 5). Grande fut leur surprise de voir dans cette situation les courbes représentatives prendre l'allure d'un "segment".

Une première approche de la notion de tangente part de cette remarque. Elle utilise la possibilité qu'offrent la plupart des grapheurs actuels (*Graph'x* ou DERIVE par exemple) de "zoomer" sur une partie de l'écran. Voici le texte remis aux élèves.

Une courbe à la loupe (1)

Soit (p) la parabole d'équation $y = x(x-1)$. Représentez (p) dans [–1,2] (courbe 1). Soit A(1.5 ; 0.75) un point de P.

1) En zoomant répétitivement sur A, que devient la courbe P ?

2) quelle est l'équation de la courbe ainsi obtenue ? (On choisira deux points éloignés dont on lira les coordonnées grâce au curseur.)

3) Définissez une droite (T) (courbe 2), en introduisant l'équation précédente en machine. Représentez (p) et (T). Commentez.

4) Trouvez *par le calcul* les points communs à (p) et (T). Comment pourrait-on appeler (T) ? Justifiez par analogie avec une courbe connue.

5) Refaites l'ensemble de la démarche qui précède pour le point B(1 ; 0) de la courbe P.

6) Soit Q la courbe d'équation $y = x^3$. Représentez Q dans [–2 ; 2]. Refaites la démarche précédente pour C(1 ; 1). Qu'y a-t-il de différent par rapport à la courbe P ?

7) Soit R la courbe d'équation $y = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$ et D(1 ; 0) un point de R. Peut-on refaire la démarche précédente pour R et D ? Pourquoi ?

Résumons le scénario. Sur une courbe (p) du second degré, on choisit un point fixe A. On "zoome" répétitivement sur (p) autour de A jusqu'à l'apparition à l'écran d'un segment (dont A est approximativement le milieu).

On lit au curseur les coordonnées de deux points aussi éloignés que possible (sur l'écran) de ce "segment" pour établir l'équation de la droite (T) qui le porte. A et (p) sont choisis pour que les coefficients trouvés soient entiers : les valeurs approchées obtenues sont alors arrondies (si on trouve par exemple 2.0001 pour le coefficient directeur, on l'arrondit à 2).

On introduit l'équation arrondie en machine et on représente simultanément (p) et (T) (avec les unités initiales, avant le zoom). On note que (T) "épouse bien" (p) autour de A.

Une nouvelle série de zooms montre qu'à une échelle suffisamment réduite, (p) et (T) sont confondues au voisinage immédiat de A. Les élèves ne sont pas dupes : l'apparente confusion résulte de l'imprécision de l'écran graphique. Mais cette curieuse image contient une idée importante : (T) est "remarquablement proche" de (p) au voisinage de A. La démarche théorique qui suit permet d'aller au-delà de l'imprécision technique de l'écran graphique.

On montre *par le calcul* que (p) et (T) ont un seul point commun A (l'équation a une racine double). Ce résultat confirme le caractère illusoire de l'image des deux segments, confondus à l'écran. Il rappelle une situation connue de longue date par les élèves : il existe une droite (la tangente en A au cercle) dont l'intersection avec un cercle se limite à un unique point A. Par analogie, on peut appeler (T) la tangente en A à (p) (Cette analogie est confirmée par une série de zooms sur un cercle et sa tangente en un point : on trouve la même image, deux segments confondus).

Une autre analogie, de nature géographique (et en trois dimensions), n'échappe pas à un des élèves : " Là où on est, on croit que la Terre est plate." L'humanité a en effet longtemps confondu la planète avec ses plans tangents. Faute de pouvoir zoomer sur les observateurs, pour ajuster leur taille à ses dimensions, il a fallu de patientes observations et de subtils raisonnements pour distinguer la sphère de ses plans tangents.

La démarche décrite est ensuite appliquée à un point A d'une courbe (C) du troisième degré et conduit aux mêmes observations, au voisinage de A. Mais la droite (T) mise en évidence coupe à nouveau (C) en un second point B, loin de A [(2)]. Une série de zooms sur B transforme (C) et (T) en deux segments *qui ne se confondent pas à l'écran*. B est un point d'intersection alors que A est un point de contact de (C) et (T). L'équation obtenue dans l'étude des points communs aux deux courbes distingue elle aussi A et B : l'abscisse de A est racine double, celle de B est racine simple. Cette remarque importante trouve son explication dans la deuxième étape de ce travail.

Enfin la même démarche est appliquée à une courbe présentant un point anguleux A. Les zooms répétés la transforment en une ligne brisée (deux segments distincts ayant A en commun). Cette situation a le mérite de montrer aux élèves qu'une courbe "vue à la loupe" ne se présente pas toujours comme un segment, au voisinage d'un point. Mais si on considère séparément la partie droite et la partie gauche de la courbe (du point de vue de A), on retrouve la situation précédente. La notion de demi-tangente à droite et à gauche en A ne présente pas de grandes difficultés pour les élèves.

L'intérêt de cette première étape est manifeste. Elle permet, *sans faire appel explicitement à la notion de limite*, une première approche de la tangente . Elle met en évidence le fait qu'il existe, dans les exemples étudiés, une droite qui, *mieux que toute autre*, approche une courbe au voisinage d'un point. L'analogie avec la tangente au cercle permet de raccrocher la démarche nouvelle à des connaissances antérieures et familières. Mais l'important travail théorique qui précise la nature des points communs à la courbe et à la droite obtenue, n'est possible, en Première, que dans des cas simples (des fonctions polynômes de faible degré). Une démarche plus générale est nécessaire. Elle est proposée aux élèves parallèlement à l'introduction théorique de la notion de limite.

B. DES DROITES SAGES

Cette seconde démarche a été décrite par le menu dans un précédent article (bibliographie 4). En voici le texte, appliqué *aux exemples de la première étape ci-dessus*. Les élèves peuvent ainsi vérifier

(2) En réalité, il suffit que A et B soient distincts. Le zoom autour de A engendre la distance. Deux points distincts peuvent être considérés comme "éloignés".

que deux démarches profondément différentes conduisent à la même "tangente" (3).

Parcourons ce second scénario. On part de la courbe (C) et d'un point fixe (A) sur (C). On choisit un point variable Mk, d'abscisse k sur (C). On étudie l'évolution de la sécante (AMk) quand Mk s'approche

Une courbe à la loupe (2)

Soit (p) la parabole d'équation y = f(x) = x(x–1). Représenter (p) dans I = [–1,2]. Soit A(1.5 ; 0.75) un point *FIXE* de P. Soit Mk(k,f(k)) un autre point de (p) (k est un paramètre *réel distinct de 1.5*).

1) Calculez le coefficient directeur mk de la droite (OMk), sécante à P. Ecrivez l'équation de la droite (AMk).

2) Représentez (AMk) dans I. On donnera à k les valeurs suivantes : 2 ; 1.3 ; 1.501 ; 1.49999 ; $1.5 + 10^{-7}$; $1.5 - 10^{-8}$ (courbe 2).

3) *On va étudier l'évolution de la droite (AMk) lorsque k prend des valeurs de plus en plus voisines de 1.5.* (Expliquez pourquoi k ne peut prendre cette valeur 1.5). Combien de droites distinctes devrait-on observer ? Combien en distingue-t-on effectivement *? Expliquez ce phénomène.* Donnez l'équation de la droite limite mise ainsi en évidence. Comparez ce résultat à celui obtenu au TP d'informatique précédent (une courbe à la loupe (1)).

4) Refaites l'ensemble de la démarche qui précède pour le point B(1,0) de la courbe P.

(3) Dans la critique de cet article, Henri Lombardi écrit : "Je ne pense pas que les deux notions "zoom" et "position limite de sécante" soient fondamentalement différentes. En effet, si après un zoom, la courbe ressemble à une droite, toute sécante passant par deux points voisins de A (l'un pouvant être confondu avec A) est confondue, à la précision des pixels près, avec la droite qu'on voit à l'écran. Je pense qu'il est utile d'essayer de faire sentir aux élèves que ces deux notions sont voisines, même si elles ne conduisent pas à la même démarche expérimentale. Si le cercle est un cas paradigmatique, sans doute est-il utile de faire les expériences "zoom" et "limite" sur ce cas-là." Ces remarques permettent d'améliorer l'activité (au prix d'une durée supérieure). On peut proposer le plan suivant : 1) Etude locale du cercle (selon les deux points de vue). 2) Mise en œuvre des deux généralisations de la notion de tangente sur les diverses courbes de l'article. 3) Etude des liens entre les deux situations. L'équivalence théorique entre les deux situations ne doit cependent pas faire illusion : pour les élèves, la notion de "position limite" d'une droite présente des difficultés considérables (bibliographie n°4), très supérieures à celles rencontrées dans la situation de "zoom". De plus, le passage de la "position limite" au "zoom" n'a rien d'évident. Henri Lombardi poursuit : "En prenant un peu de recul, on peut dire qu'il y a trois notions, dont les deux premières sont pratiquement équivalentes même si cela ne saute pas à l'œil. La première est la notion différentielle. La courbe ressemble localement à une droite : rien de tel qu'un zoom pour le montrer. La deuxième est la position limite. Mais là il y a des variantes : fait-on bouger un ou deux points ? (En physique, on prend deux points "symétriques par rapport à A"). La troisième est algébrique. L'équation de la courbe f(x,y) = 0 donne, lorsqu'on fait la substitution x=at + x(A), y = bt + y(A), une équation admettant 0 comme racine multiple."

de A, c'est à dire quand k "tend vers" l'abscisse de A. Dans les cas étudiés, les droites (AMk) finissent par se superposer sagement à l'écran : une position limite apparaît. Les élèves constatent qu'elle coïncide avec la droite de la partie précédente (il suffit de la tracer : on connaît son équation).

On peut donc proposer une nouvelle définition de la tangente en A : c'est la position limite (si elle existe) de la sécante (AMk) quand Mk s'approche "indéfiniment" de A.

Les élèves ne sont pas dupes : dans les comptes-rendus, ils soulignent que les droites superposées à l'écran sont en réalité distinctes. Mais l'écran graphique, dont le grain est gros, ne sait pas distinguer des droites trop voisines. La superposition observée traduit une "extrême proximité" des droites représentées. Cette faiblesse de l'écran graphique est une alliée de l'enseignant : elle impose à l'oeil une position limite des droites (AMk), que la théorie confirme.

Malheureusement, à l'écran, cette position limite est confondue avec un certain nombre de droites (AMk) superposées à l'écran. Il est bien difficile, pour les élèves, de comprendre qu'aucune des droites (AMk) ne coïncide, en réalité, avec cette position limite... Elles en sont suffisamment proches pour que l'écran les confonde. En Terminale, ces distinctions devront être faites. En Première, on peut se contenter de rendre sensible l'existence d'une position limite pour (Amk).

Les élèves qui ont compris la nouvelle notion de tangente qui en résulte, n'ont aucune peine à aborder et à saisir la définition de la dérivée, que l'approche géométrique a chargée de sens.

2. DES DROITES FOLLES OU LA REMISE EN CAUSE DES CERTITUDES

Vers la fin de l'année scolaire, quand la notion de dérivée et ses applications sont devenues familières, le temps est venu de montrer aux élèves des situations qu'on avait, à juste titre, occultées en raison de leurs difficultés. La rencontre avec des courbes sur lesquelles les deux démarches décrites plus haut échouent, doit être soigneusement préparée. En effet, cette activité est fortement déstabilisatrice pour les élèves. Elle ne peut être abordée avec profit que lorsqu'on est sûr des acquis. Elle utilise des courbes "monstrueuses" que la classe avait découvertes en début d'année, dans un autre contexte.

A. UNE COURBE SUR LAQUELLE LE ZOOM EST INOPÉRANT.

Cette activité cherche à faire comprendre aux élèves, en début d'année, les limites de l'écran graphique. Elle leur propose de représenter la fonction définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ sur $]0,1]$. Voici (page suivante) le document de travail qui leur a été remis.

Malgré leur acharnement, ils échouent dans la tentative de dissiper le nuage de points qui ne cesse de s'étendre et de s'épaissir, à chaque zoom, au voisinage de 0

Dissiper le flou

1) Utilisez Graph'x pour représenter $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ dans]0,1]. Précisez la courbe près de 0 (On peut utiliser le zoom).

2) Résolvez $\sin(\frac{1}{x}) = 0$. Représentez f sur des intervalles de type $[\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi}]$, n entier. Translatez les axes en $0'(\frac{1}{(n+1)\pi},0)$. Montrez que la nouvelle équation est : $Y = \sin\left(\frac{1}{X+\frac{1}{(n+1)\pi}}\right)$ et que l'intervalle de départ devient l'intervalle $[0, \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n+1)\pi}]$.

On prend n = 100, puis n = 1001. Jusqu'à quelle valeur de n la représentation graphique est-elle possible ? Représentez la fonction dans les intervalles ainsi définis. Conclusion ?

(les figures 1 et 2 (page suivante) en donnent une bonne idée, bien que les fonctions soient différentes). Cet échec suscite beaucoup d'étonnement. La réflexion théorique qui prend le relais, fait émerger des intervalles du type

$$I_n = [\frac{1}{(n+2)\pi}, \frac{1}{n\pi}] \text{ (n entier positif).}$$

La représentation graphique de f sur ces intervalles permet de retrouver une courbe cohérente à l'écran. Mais pour l'obtenir, une difficile réflexion sur les ordres de grandeur de nombres voisins de 0 est indispensable, ainsi qu'une translation des axes. Cette très intéressante activité est décrite et analysée dans un article récent (bibliographie 5).

La mise bout à bout des intervalles In donne une idée des variations de f sur]0,1]. Elle permet d'expliquer l'échec des zooms à l'aveuglette.

Cette étude prépare remarquablement l'activité de fin d'année dont nous allons parler maintenant.

B. DES DROITES EN FOLIE

En voici le texte (*cf.* page suivante).

a) Analyse *a priori* de l'activité

La partie théorique recèle d'importantes difficultés. f et g sont définies par une formule et par leur valeur en 0. Il faut s'attendre à de belles empoignades sur la validité de ce procédé totalement original pour les élèves (le parallèle avec une fonction définie par intervalles n'est sans doute pas évident).

L'interprétation géométrique des encadrements obtenus est une activité mathématique essentielle (passage du cadre algébrique au cadre géométrique). Elle permet de vérifier si certains aspects théoriques sont maîtrisés. Elle explique en partie les images informatiques à venir.

1) On définit la fonction f par : f(x) = x*sin(1/x) si x est différent de 0 et f(0) = 0

a) Précisez l'ensemble de définition de f.

b) Montrez que pour tout x positif : $-x \leq f(x) \leq x$.

Montrez que pour tout x négatif : $x \leq f(x) \leq -x$.

Donnez une interprétation géométrique de ces inégalités.

c) Déduisez-en que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, donc que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

d) Résolvez l'équation f(x) = 0. Combien y a-t-il de solutions dans un intervalle [0,a[, a étant un réel positif ? Peut-on représenter la courbe de f, Cf, sur ordinateur dans [0,a[? Quels sont les intervalles sur lesquels on retrouve un tracé cohérent pour Cf au voisinage de 0 ?

e) Tracez Cf dans des intervalles $[\frac{1}{(n+2)\pi}, \frac{1}{n\pi}]$ sous *Graph'x* (on donnera à n des valeurs entières positives de plus en plus grandes.

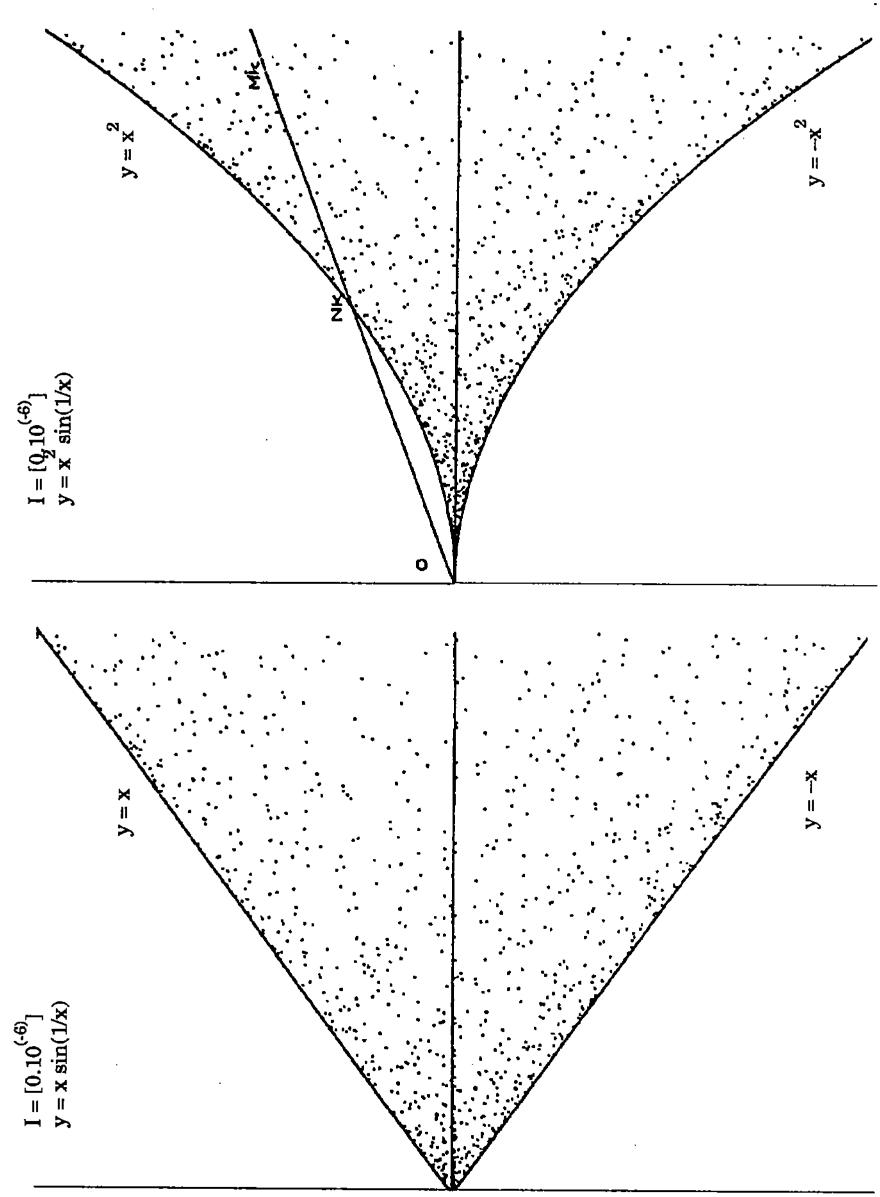
2) Travail sous DERIVE. Soit O(0,0) un point fixe de Cf, et Mk(k,f(k)) (k non nul) un point variable de Cf. Calculez le coefficient directeur de la sécante (OMk) à Cf et l'équation de (OMk). Donnez à k 20 valeurs de plus en plus voisines de 0. Représentez les 20 droites correspondantes. Qu'observez-vous ? Quelle conjecture en tirez-vous ?

3) Reprenez l'ensemble du travail précédent pour la fonction g définie par $g(x) = x^*\sin(\frac{1}{x})$ (pour x différent de 0) et g(0) = 0.

Le "théorème des gendarmes" n'est pas au programme de Première. Il a cependant été énoncé et utilisé en fin d'année dans certains exercices. Il est accueilli sans difficulté et mis en oeuvre avec aisance. Il permet ici de donner de précieux renseignements sur Cf et Cg au voisinage de 0. Il faudra rappeler les interprétations géométriques des limites obtenues.

Les élèves savent résoudre théoriquement l'équation $\sin(\frac{1}{x}) = 0$ en fin d'année (les solutions étaient admises en début d'année). Il sera intéressant de voir s'ils en tirent les conséquences géométriques qu'ils avaient déjà observées au premier trimestre (l'impossibilité de représenter Cf et Cg sur un écran au voisinage de 0).

La représentation de Cf et Cg dans des intervalles du type $[\frac{1}{(n+2)\pi}, \frac{1}{n\pi}]$ est capitale pour comprendre la disposition étonnante des droites (OMk) de la question 2. Une difficulté nouvelle surgit, par rapport au tracé de $h(x) = \sin(\frac{1}{x})$: le choix des unités en (Oy) demande un raisonnement sur l'ordre de grandeur de f(x) et g(x) : il faut s'attendre, dans un premier temps, à de nombreux écrans vides de tout tracé !



Figures 1 et 2

Le but final de l'activité est complexe : si l'absence de position limite pour les droites (OMk) relatives à Cf est facile à déceler, son interprétation géométrique et analytique présente de sérieuses difficultés : de longs tâtonnements sont prévisibles. (DERIVE permet d'approcher 0 de beaucoup plus près que *Graph'x*, dont la précision de calcul laisse ici à désirer).

Enfin, le cas de Cg est paradoxal : cette courbe, aussi "folle" que Cf, donne naissance à de très "sages" droites (OMk), dont (Ox) est la position limite (figure 6). Il est possible d'en esquisser une démonstration, à partir des deux paraboles entre lesquelles Cg évolue.

b) L'ACTIVITÉ A L'ÉPREUVE DES FAITS

D'emblée, il faut dire que l'ensemble du travail a pris beaucoup plus de temps que les deux séances prévues : quatre périodes de deux heures furent indispensables en raison des longues errances et des nombreux retours sur des aspects théoriques. Mais la qualité des comptes-rendus remis à l'issue des travaux, souligne l'utilité du temps consacré à cette synthèse.

1) Une partie théorique bien traitée

La définition des fonctions f et de g pose un vrai problème : pour les élèves, une fonction ne peut être définie que par une formule. f(0) et g(0) s'obtiennent donc, dans leur esprit, en remplaçant x par 0 dans $x\sin(\frac{1}{x})$ et dans $x\sin(\frac{1}{x})$, ce qui est absurde. Donc, ils concluent majoritairement que f et g sont définies sur les réels privés de 0 ! C'est le moment de revenir sur les multiples manières de définir une fonction et de vérifier que tout réel possède par f (et g) une image et une seule.

La position de Cf, entre les droites d(y = x) et d'(y = –x) est traitée avec sûreté (ainsi que la situation de Cg entre deux paraboles). La vérification informatique est rapide et laisse apparaître le problème attendu au voisinage de 0 (tracé illisible et zooms inopérants) : les élèves n'insistent que mollement pour dissiper le nuage de points et se tournent vers la théorie pour y parvenir. L'expérience de début d'année a porté ses fruits. Aucune difficulté pour résoudre $\sin(\frac{1}{x}) = 0$ et pour noter l'infinité de solutions dans tout intervalle]0,a]. Les élèves reconnaissent la situation rencontrée en début d'année. Ils confirment l'impossibilité de tracer Cf et Cg sur l'écran au voisinage de O (et donc de transformer la courbe en un "segment" au voisinage de O). L'argument est solide : l'écran ne comporte qu'un nombre fini (et d'ailleurs petit) de pixels pour représenter une infinité d'intersections avec (Ox) (figures 1 et 2).

En revanche, la résolution de f(x) = 0 (et g(x) = 0) est incomplète : la racine 0 est oubliée, rappel de la difficulté soulignée au début de ce paragraphe.

2) Des difficultés pour tracer des courbes cohérentes

Le tracé de Cf et Cg dans les intervalles de type $[\frac{1}{(n+2)\pi}, \frac{1}{n\pi}]$ a pris un temps considérable. Il est vrai que la démarche est très complexe. Le travail fait avec succès en début d'année sur $h(x) = \sin(\frac{1}{x})$ a dû être repris en totalité, étape par étape. L'estimation d'une valeur de f(x), indispensable pour choisir les unités sur (Oy), est difficile : f(x) est très voisin de 0 sur tout l'intervalle !

A ces difficultés intéressantes (car chargées de sens), s'ajoutent les faiblesses propres aux logiciels : il est impossible d'introduire un domaine de définition sous la forme $[\frac{1}{(n+2)\pi}, \frac{1}{n\pi}]$, et de préciser les valeurs numériques successives de n... Il faut donc refaire, pour chaque n, des calculs qui deviennent rapidement fastidieux. Il serait intéressant, par simple changement de la valeur de n, de constater que la forme de la courbe est conservée : les élèves se contentent de le vérifier pour 2 ou 3 valeurs de n (1000, 10^5, 10^7 par exemple). Mais nul ne doute que ce résultat est général.

Les deux droites (ou les 2 paraboles) mises en évidence plus haut, apparaissent sur l'écran sous la forme de 2 segments parallèles à (Ox). Les erreurs d'interprétation sont fréquentes : “Les segments sont parallèles à (Ox) parce que l'intervalle est très petit”. On retrouve un écho, mal assimilé, des constats faits sur certaines courbes, qui prennent localement l'allure de segment. Ce raisonnement ne rend pas compte du caractère horizontal de ces segments. Le corrigé des comptes-rendus remet les choses en place et donne la clé des images : la forte différence d'ordre de grandeur entre les unités sur (Ox) et (Oy) explique le phénomène dans le premier cas (figure 3). Dans le second cas, les deux unités ont même ordre de grandeur, mais à proximité immédiate de son sommet, la parabole est pratiquement “constante” (Figure 4 page suivante).

Certains élèves expriment leur surprise devant l'apparente identité des deux images informatiques, issues d'équations très différentes. L'un d'eux parle de vertige face à ces courbes qui oscillent indéfiniment, sur des intervalles de plus en plus petits, avec une amplitude de plus en plus faible. Le mot “analyse” commence à prendre sens ! Ces courbes ne laissent personne indifférent.

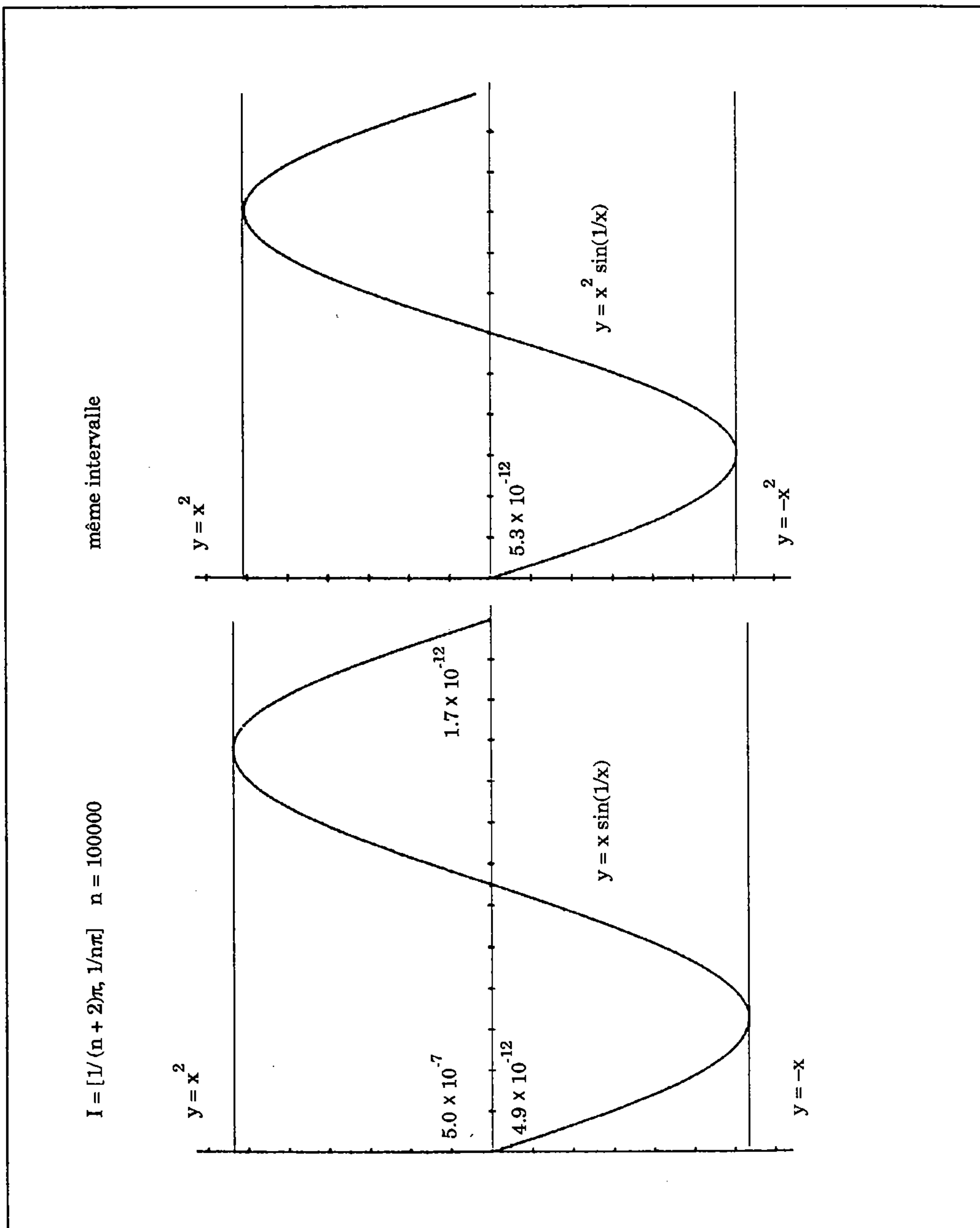
3) Un phénomène stupéfiant

Le travail sous DERIVE permet de calculer avec des approximations très fines. Une option du logiciel donne à l'utilisateur la possibilité de choisir la précision qu'il souhaite. Ce choix est déterminant pour la validité des résultats observés à l'écran.

Les élèves établissent sans difficulté l'équation de (OMk) relative à f, en fonction de k. Pour chaque valeur de k, une droite apparaît à l'écran. Un élève s'étonne finement : “On arrive à tracer des sécantes (OMk) à une courbe qu'on ne sait pas tracer !”. Il est vrai qu'il suffit de deux points pour tracer une droite. C'est un peu plus compliqué pour Cf et Cg...

L'image des sécantes successives rompt avec une tradition qui semblait bien établie : contrairement à l'habitude, aucune position limite n'apparaît. Les élèves insistent : malgré des valeurs de k de l'ordre de $10^{(-200)}$, les droites successives s'obstinent à prendre des positions qui semblent aléatoires entre (d) et (d'). (“Elles prennent une multitude de positions désordonnées” peut-on lire dans un compte-rendu). Deux droites consécutives ne sont qu'exceptionnellement proches. Et surtout, *le phénomène de SUPERPOSITION de droites que les élèves attendent ne se produit pas, aussi près de 0 que l'on soit* (figure 5).

Un élève propose : “Si on augmente le nombre de droites, elles vont remplir tout l'espace entre les deux droites (d) et (d').” Cette intuition sera examinée plus loin.


I = [1/(n + 2)π, 1/nπ]   n = 100000
même intervalle
y = x^2
y = x sin(1/x)
5.0 x 10^-7
4.9 x 10^-12
1.7 x 10^-12
y = −x
y = x^2
y = x^2 sin(1/x)
5.3 x 10^-12
y = −x^2

4) Interpréter et formuler

Voici différentes formulations trouvées dans les rapports d'activité (la forme n'a pas été corrigée, même si elle est maladroite ou incorrecte).

"On remarque que les droites n'ont pas de position limite car elles prennent une multitude de positions désordonnées. On le voit bien en comparant les positions des sécantes pour $k = 10^{(-60)}$ et $k = 10^{(-65)}$: elles se trouvent totalement éloignées dans deux sens de variations différents. Comme il n'y a pas de superposition, il n'y a pas de tangente en O, c'est à dire que la fonction n'est pas dérivable en 0."

"En voyant les droites à l'écran, on peut conjecturer qu'il n'y a pas de position limite, en effet les droites ont des positions aléatoires. Ces droites sont comprises entre les droites $y = x$ et $y = -x$. Elles prennent *toutes* les positions entre ces deux droites. Donc, f n'a pas de tangente, donc pas de dérivée en O."

"On peut alors conjecturer que la droite n'a pas de position limite, donc Cf n'a pas de tangente en O."

"En faisant tendre k vers 0, les droites représentatives des sécantes (OMk) s'orientent de façon totalement aléatoire. S'il existait une position limite en faisant tendre k vers 0 les droites (OMk) tendraient à se confondre. Or, ce n'est pas le cas donc (OMk) n'admet pas de position limite et donc f n'est pas dérivable en 0."

"En traçant une vingtième droite, on observe qu'il n'y a pas de droite limite. Il n'y a donc pas de tangente et f(x) n'est donc pas dérivable sur l'ensemble des réels."

Mis à part la dernière formulation ambiguë (le binôme n'a probablement pas vu le caractère local de l'étude) et des expressions incorrectes (confusion entre les cadres géométriques et analytiques), ces textes montrent une bonne interprétation des images et une incontestable compréhension du délicat phénomène observé. Huit heures de travail pour en arriver là, est-ce trop cher payé ?

5) Imaginer et comprendre

Avec les binômes les plus curieux, l'échange oral a permis d'esquisser une explication théorique du désordre observé. Il faut pour cela imaginer la succession infinie d'oscillations de Cf (figures 3 et 4). Chaque choix de k nous amène dans l'une d'elle. En faisant varier k dans le très petit intervalle obtenu, on peut amener Mk en un point quelconque de l'arc de courbe sélectionné : (OMk) peut donc prendre toute position entre (d) et (d'), et cela aussi près de 0 que l'on soit ! On voit l'importance des tracés réalisés (avec difficulté) en début d'activité. Ils sont la clé de la compréhension des images et surtout de la propriété mathématique qu'elles traduisent.

Ce raisonnement fait passer de la conjecture à la certitude : DERIVE, malgré sa précision, est incapable de simuler une LIMITE quand k tend vers 0. Une tache aveugle subsiste irrémédiablement sur un intervalle de centre 0. Cet intervalle, inaccessible au logiciel, est investi sans difficulté majeure par l'imaginaire humain (pourvu qu'on admette que Cf continue à osciller au-delà de ce que le logiciel peut montrer : aucun élève n'en doute vraiment).

15 DROITES FOLLES d'équation $y = x \sin(1/k)$ par ordre d'entrée en scène quand k tend vers 0 en décroissant

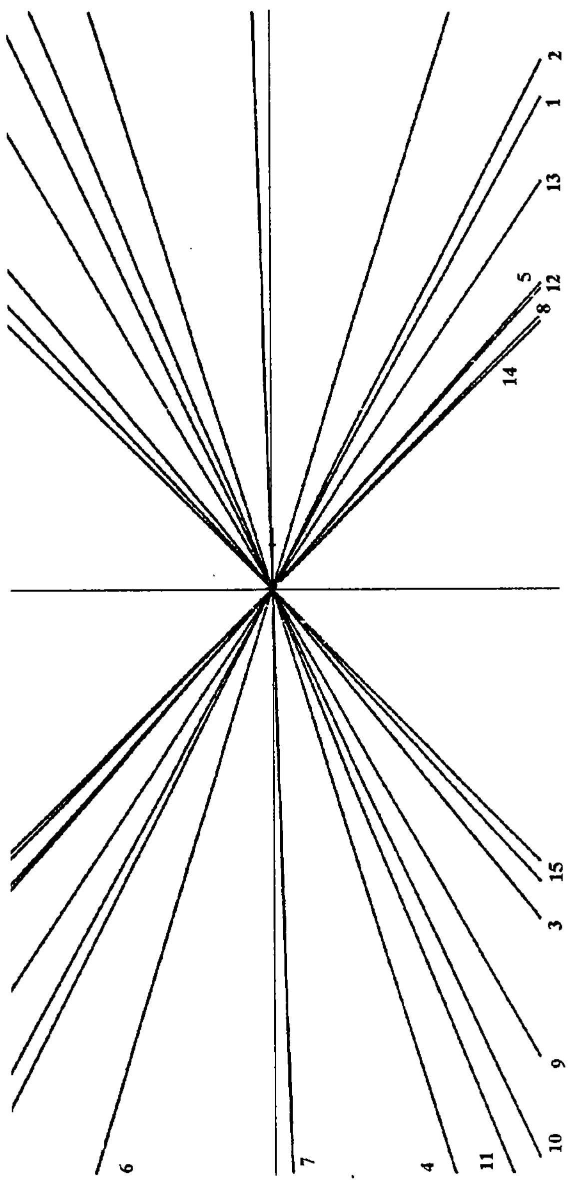


Figure 5

15 DROITES SAGES d'équation $y = xk \sin(1/k)$: k tend vers 0 (k a les mêmes valeurs que plus haut)

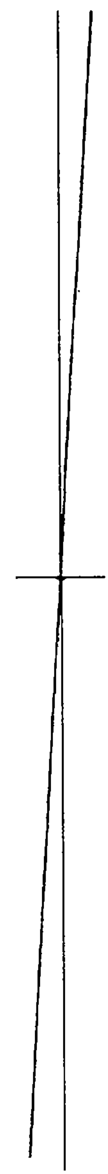


Figure 6

6) Retour à la sagesse

Il restait à vérifier que le contact avec des droites en folie n'avait pas trop déstabilisé les élèves, dont le quotidien sera, longtemps encore (Dieu merci), plus raisonnable. Il n'était pas non plus inutile de leur montrer que la seule présence dans une fonction, d'un $\sin(\frac{1}{x})$ ne suffit pas à libérer des forces obscures et déclencher des phénomènes incontrôlables. Les comptes-rendus concernant Cg sont rassurants !

"Au fur et à mesure que k tend vers 0, donc $k\sin(\frac{1}{k})$ aussi, car on observe que les sécantes tendent vers une position limite qui est la droite superposée à l'axe (Ox). On peut donc en déduire que Cg admet une tangente horizontale en O(0,0) et on peut en déduire que g est dérivable en 0 et g'(0) = 0." (derrière une forme désastreuse, transparaît une bonne compréhension). Et le même binôme de conclure : "Les deux courbes semblaient relativement identiques au voisinage de 0 mais elles sont différentes car f n'admet pas de tangente en O et g admet une tangente horizontale en O."

Autre formulation : "A l'écran on observe une série de droites très proches de l'horizontale. Lorsque $k < 10^{(-3)}$ les droites se superposent à (Ox). Il y a donc une position limite, qui est la tangente horizontale en O. Il existe une dérivée nulle. Pour résumer : f(x) n'est pas dérivable en 0, g(x) est dérivable en 0 et g'(0) = 0 (tangente horizontale)." (Les figures 5 et 6 illustrent le propos).

Si certaines formulations doivent être améliorées (elles soulignent la faible maîtrise de la langue, même pour de bons élèves), on ne peut qu'être ravi de tout ce que ces élèves ont compris d'essentiel (4).

7) La preuve par les paraboles

Un raisonnement géométrique simple permet d'expliquer les observations qui précèdent (*cf.* figure 2).

En s'approchant de O, Mk reste dans la partie du plan comprise entre les paraboles (P) et (P') d'équation $y = x^2$ et $y = -x^2$. La droite (OMk) recoupe (P) ou (P') en un unique point Nk (autre que O si Mk n'est pas sur (Ox)). Si k tend vers 0, Mk tend vers O, donc Nk aussi (ONk < OMk). Mais si Nk tend vers O sur (P) ou (P'), (ONk) a une position limite, la tangente en O à (P) ou (P') : ces droites existent et sont confondues avec (Ox), car les fonctions qu'elles représentent ont en 0 une dérivée nulle. Comme (OMk) et (ONk) sont confondues, (OMk) a la même position limite que (ONk) : (Ox) est donc tangente à Cg en O et g'(0) = 0.

Il n'est pas sûr que ce raisonnement subtil, proposé au tableau à quelques binômes curieux, ait été compris en détail. Qu'importe, c'était la cerise sur un gâteau déjà consistant !

(4) Remarque amusée (et amusante) d'Henri Lombardi à propos de la dérivabilité de g en 0 : "Quand on dérive $x^2\sin(\frac{1}{x})$, on trouve

$$2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}).$$

On voit que la tangente à Cg au point d'abscisse x n'a pas de position limite quand x tend vers 0 : les voyageurs embarqués à bord seraient durement secoués et n'auraient sûrement pas l'impression que la vitesse est nulle à l'origine !"

CONCLUSION : LA FUITE UTILE DU TEMPS

Les diverses activités décrites dans cet article se sont déroulées tout au long de l'année scolaire. Elles ont permis de préparer l'introduction de la dérivée à partir de la notion de tangente à une courbe. Cinq séances de deux heures furent nécessaires pour généraliser le concept de tangente au cercle à une courbe quelconque, puis pour imaginer la tangente comme position limite d'une famille de sécantes. Les images mentales créées au cours de ces travaux ont considérablement facilité la compréhension des notions théoriques du cours. Les quatre séances de fin d'année, que relate la seconde partie de l'article, ont provoqué une utile déstabilisation, suivie par un rassurant retour au calme et à des situations habituelles.

Tout ceci a été possible grâce à l'espace de liberté de deux heures par quinzaine, dont cette classe a bénéficié tout au long de l'année (financées sur les moyens du lycée). On se prend à rêver à toutes les possibilités qu'ouvrirait la généralisation, dans le système scolaire, de plages de temps sans programme à réaliser impérativement (les modules en sont un heureux exemple). Pour comprendre des notions difficiles, l'élève a besoin de temps, de beaucoup de temps. Une partie de l'échec actuel de l'enseignement s'explique par le refus de laisser à ceux qui apprennent le temps de la maturation et de la synthèse. Une notion chasse l'autre avant qu'elle soit comprise. Les connaissances trop vite acquises sont fragiles et volatiles.

L'outil informatique, souvent controversé, parfois même vilipendé, est, si l'enseignant le maîtrise bien, un allié précieux. Il est essentiel d'éduquer le regard des élèves pour qu'ils tirent profit des images que le logiciel construit et propose. Il ranime leur intérêt, donc leur motivation, en leur permettant de travailler sur des situations qui, en environnement papier-crayon, dépasseraient leurs capacités théoriques (le logiciel se charge d'élaborer des images complexes à partir desquelles les élèves raisonnent).

Un outil bien utilisé, une forte motivation, et la durée (qui permet de tâtonner, de rectifier les nécessaires erreurs en cours d'apprentissage et d'aller, de rature en rature, vers une pensée claire), il n'en faut pas plus pour que des élèves se dépassent et obtiennent des résultats surprenants.

BIBLIOGRAPHIE

1) *L'oeil naïf* : Régis Debray, Seuil 1994.

2) *Fenêtre sur courbes. Une approche graphique de l'analyse mathématique* : Raymond Chuseville et Sylviane Gasquet, CRDP de Grenoble.

3) "Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente" : Magguy Schneider-Gilot, *Repères-Irem* n 5.

4) "Saut d'obstacle" : Gérard Kuntz, *Repères-Irem* n 22.

5) "Des courbes à la loupe. Image calculée et ordre de grandeur" : Gérard Kuntz, *Bulletin de l'APMEP*, à paraître (Avril 97).