QUELQUES SEMAINES DU COURS D'ANALYSE DE 1^{re} S AVEC *DERIVE*, LOGICIEL DE CALCUL SYMBOLIQUE

Denis TASSO
Nicole VOGEL
Irem de Strasbourg

1. Introduction

En moins d'une génération, les lycéens sont passés de la table de logarithmes et de la règle à calculs à la calculatrice programmable et le plus souvent graphique. Nous sommes persuadés que cela a modifié, non seulement leur façon de calculer, mais aussi leur conception de quelques objets mathématiques comme les nombres et leur façon d'aborder certains problèmes d'analyse.

Pour l'apprentissage des mathématiques, ce n'est probablement ni mieux ni moins bien ainsi, mais il est important pour un enseignant de connaître les conséquences réelles de ce changement pour tenir compte des avantages et des nouvelles difficultés qu'il a créés.

Actuellement, nous sommes au début d'une nouvelle étape dans l'évolution des outils courants du lycéen. Le calcul formel devient assez facilement accessible avec certaines calculatrices HP, avec la nouvelle TI 92 et sûrement d'autres prochainement.

Nous pensons que cela apportera de nouveaux changements dans la pratique mathématique des élèves. Nous souhaitons y réfléchir dès maintenant, c'est pourquoi nous participons à un groupe de travail sur l'utilisation pédagogique du calcul symbolique, créé à l'IREM de Strasbourg à la rentrée 1994.

Nous avons enseigné une partie du cours d'analyse de première avec un outil de plus, le logiciel DERIVE [1] sur ordinateur, défini par ses auteurs comme "assistant en

(1) Le lecteur qui ne connaît pas ce logiciel trouvera quelques explications succinctes au début de l'annexe 1, mais elles ne sont pas nécessaires pour lire l'article.

mathématiques", avant que, très prochainement, chacun n'en dispose sur sa calculatrice. Nous avons essayé de voir ce que cela modifie, les avantages et les écueils et les réactions des élèves.

2. L'organisation du cours

a) Le contexte

Nous avions tous les deux une classe de première S de niveau moyen, dans deux lycées différents de Haguenau, disposant chacun d'une salle équipée d'une dizaine d'ordinateurs en réseau.

Denis Tasso enseigne au LEGTI et avait la classe de 1re S2 comptant 20 élèves, 2 filles et 18 garçons suivant l'option industrielle et déjà familiarisés à l'emploi des ordinateurs en dehors du cours de mathématiques, dont quelques passionnés d'informatique.

Nicole Vogel est au LEGT. Sa classe de 1re S3 se composait de 31 élèves, 16 filles et 15 garçons ayant choisi l'option sciences expérimentales, dont certains relativement réticents a priori à l'utilisation des ordinateurs. En effet, beaucoup d'entre eux avaient eu auparavant des difficultés à programmer leur calculatrice pour l'étude des suites, malgré un temps assez long consacré à cet apprentissage. Ceux là pensaient être confrontés aux mêmes problèmes face à un logiciel de mathématiques. D'autres craignaient de perdre leur autonomie et de ne pas savoir faire à la main ce qu'ils auraient appris ainsi. D'autres enfin se disaient dès le départ que les problèmes qu'il faudrait résoudre avec l'ordinateur exigeraient d'eux plus de réflexion et qu'ils ne pourraient plus se contenter de faire des calculs élémentaires.

En 1re S2, ce travail s'est déroulé de début janvier à fin mars 1995, en parallèle avec un enseignement classique du chapitre des angles orientés et du produit scalaire.

En 1re S3, les élèves disposaient en plus d'un ordinateur portable pour deux, dans le cadre d'une expérimentation nationale. Comme ces portables ont également été prêtés à d'autres classes, cette étude a été concentrée de début janvier à mi-février, sans autre chapitre en parallèle. Il faut cependant savoir que ces machines ne sont plus vraiment autonomes (à cause de problèmes de batteries), elles ont donc surtout permis aux élèves de faire un travail complémentaire à la maison.

Nous avons choisi DERIVE car il nous semble d'accès facile, son apprentissage élémentaire est rapide et les activités sur ordinateur sont assez faciles à gérer pour le professeur.

Nous ne sommes pas des passionnés d'informatique ni des spécialistes de DERIVE.

D'ailleurs, nous avions le souci de l'utiliser comme outil dans une progression pédagogique et non d'en faire un objet d'étude. C'est aussi la première fois que nous avons utilisé un logiciel de calcul formel de façon non ponctuelle dans notre enseignement.

Le "cours" que nous allons présenter ici représente environ 36 heures de travail en classe, dont environ 15 heures avec les ordinateurs, incluses dans les horaires normaux de la classe. Pour avoir des groupes plus petits, nous avons placé la plus grande partie de ces heures pendant les séances de modules.

La 1re S2 a utilisé les ordinateurs en demi-classe pendant deux heures tous les quinze jours, la 1re S3 en demi-classe une heure par semaine plus quelquefois deux heures en classe entière : à cette occasion, quelques portables permettaient de compléter l'équipement de la salle informatique, mais ces séances à 31 étaient évidemment plus difficiles à mener.

b) La progression

Nous ne sommes pas satisfaits par la présentation habituelle du chapitre "dérivées" en classe de première. En général, on commence, après une introduction sur la notion de vitesse et de tangente, par la définition du nombre dérivé d'une fonction en un point à partir de la limite du taux d'accroissement ou à partir du développement limité. Malheureusement, cela déroute totalement la plupart des élèves parce que les limites sont traitées de façon expéditive par le programme. On n'en donne aucune définition, tous les résultats sont donc admis, "toute règle relative à des cas d'indétermination est hors programme, ainsi que la limite d'une fonction composée" (mais $\lim_{h \to 0} f(a+h)$ est au programme !) et, " en dehors du contexte de la dérivation, toute recherche de limite en un point a de I est hors programme ". De plus, la longueur du programme permet difficilement de prendre le temps de mieux préciser ces notions avant de continuer.

La conséquence est que les élèves attendent le plus souvent que ce "mauvais moment" soit passé et le professeur s'empresse de faire admettre tous les résultats dans le malaise général.

C'est pourquoi nous avons essayé de procéder un peu différemment : nous avons proposé à nos élèves d'apprendre d'abord les aspects formels de la dérivation des fonctions polynômes et rationnelles en les admettant, d'observer l'intérêt de la fonction dérivée, pour introduire et peut-être même motiver, in fine, les définitions locales et les utiliser pour démontrer sereinement quelques-uns des résultats provisoirement admis auparavant. On prend donc le temps d'aborder à la fin les questions d'analyse les plus fines associées à la notion de dérivée.

D'autres avant nous ont appliqué une démarche comparable. Nous avons en particulier été intéressés par l'article de Pascal Chantriaux, "Introduction progressive en Première de la dérivation et de ses applications avec l'aide du logiciel GRAPHE" [1].

Comme tout autre choix, cette présentation a des avantages et des inconvénients dont nous sommes conscients. Nous estimons cependant qu'elle est cohérente et qu'elle aborde les difficultés du chapitre de manière plus progressive.

Il reste la question de l'appropriation du sens de ce qu'on étudie. La notion locale ne peut être comprise qu'associée à sa définition. Mais la notion de fonction dérivée ne prend son sens que lorsqu'on a relié sa définition, ses propriétés analytiques et les propriétés algébriques de l'opération de dérivation. L'ordre dans lequel on les aborde ne nous semble pas essentiel, surtout lorsque leur étude complète se fait dans un temps relativement court. C'est pourquoi nous pensons que nos élèves ont trouvé au moins autant de questions et de réponses à ce problème que d'ordinaire.

Nous ne cherchons bien sûr pas à convaincre que cette démarche est meilleure qu'une autre. Nous pourrions d'ailleurs passer à une présentation classique en changeant un peu la rédaction de nos fiches et en commençant par l'activité 4.

Un de nos buts a été d'explorer les avantages et les inconvénients de l'utilisation de DERIVE dans l'enseignement de ce chapitre. Nous avons simplement changé notre façon habituelle de le faire, en essayant d'atteindre un peu autrement les objectifs du programme.

Nous avons fait intervenir le logiciel DERIVE avec divers objectifs :

– Premières questions sur ce qu'on peut attendre ou non du logiciel	*Fiches DERIVE I et II*
– Reconnaître des formes, des notations – Mémoriser des formules de dérivation	*Activités 1, 3*
– Observer des graphiques et conjecturer un aspect global	*Activité 2*
– Partir d'un graphique pour aborder l'aspect local – Utiliser la définition locale de la dérivée	*Activités 4, 5*
– Raisonner en utilisant DERIVE comme assistant	*TP 1, 2*

Bien que DERIVE se trompe moins (en général beaucoup moins) qu'un élève et même qu'un enseignant dans les calculs, il ne s'agit pas d'en accepter les résultats avec une confiance absolue et en aucun cas d'utiliser les fonctions du logiciel sans chercher à les comprendre. C'est pourquoi le rôle du professeur est fondamental pour rappeler ce but et donc entretenir le regard critique, faire formuler des questions et préciser très clairement dans le cours de synthèse les définitions et théorèmes, soit en les démontrant, soit en précisant qu'ils sont admis conformément au programme ou en indiquant qu'ils seront démontrés un peu plus loin dans le cours. Mais il s'agit aussi de se demander quels résultats de DERIVE peuvent être raisonnablement admis comme on admet qu'une calculatrice donne par exemple des résultats exacts pour certaines opérations sur les "petits" entiers.

Le plan de travail suivant propose l'étude et l'évaluation de toute la partie "*III.2. Dérivation*" du programme des premières S. Certains des exercices abordés durant cette période ont comme objectif la consolidation et le prolongement d'apprentissages antérieurs tels que les suites et les polynômes.

Pour toutes les activités utilisant l'ordinateur, nous avons distribué aux élèves des fiches photocopiées leur permettant de travailler à leur rythme, de façon autonome.

Jusqu'à l'activité 3, les nouvelles commandes de DERIVE sont indiquées dans la question où elles sont nécessaires. A partir de l'activité 4, elles figurent plutôt en bas de page pour que les énoncés apparaissent proches des énoncés classiques de mathématiques.

Toutes les fiches distribuées aux élèves figurent en annexe de cet article, ainsi que des éléments du cours de synthèse qui a suivi.

INITIATION AU LOGICIEL DERIVE (2 heures)

1re S2

Distribution d'un mode d'emploi du logiciel :
exploration libre pendant 1 heure ;
Exercices graphiques : 1 heure ;

1re S3

DERIVE I (polynômes) : 1 heure avec ordinateur ;
DERIVE II (suites) : 1 heure avec ordinateur ;
Ces deux fiches partent de la résolution à l'aide de DERIVE d'exercices qui figuraient dans le précédent devoir surveillé ; elles devaient être terminées et le travail rédigé sur copie (une copie par binôme) à la maison.

Activité	Thème	Temps total en classe	Approche et cours		Exercices en classe
			Avec DERIVE	Sans DERIVE	
1 et 2	fonction dérivée d'une fonction polynôme ; lien entre le signe de f' et le sens de variation de f	3 h	1 h 30	30 min	1 h
3	dérivée du produit, de l'inverse, du quotient	6 h	1 h	1h : synthèse, théorème de la bijection, représentations graphiques avec la calculatrice	4 h, en partie avec DERIVE
4	dérivée en un point, lien entre dérivée et tangente, mise au point théorique	7 h 30	2 h 30	1h 30 : synthèse, quelques démonstrations, lien entre *extremum* et dérivée	3 h 30
5	dérivée des fonctions sin, cos et racine, dérivée de $x \mapsto u(ax+b)$	7 h	1 h 30	1h : synthèse, étude des fonctions circulaires, équations sin x = a et cos x = a	4 h 30, en partie avec DERIVE

TP1 : courbes des fonctions polynômes de degré 4 (2 heures avec ordinateur)
Ce TP peut se situer au plus tôt après l'activité 3. C'est là qu'il a été placé en 1re S3. En 1re S2, il a été fait un peu plus tard.

En 1re S3, le TP est ensuite complété à la maison et rédigé sur copie par binôme.

TP2 : une équation de degré 5, trois polynômes de degré 4 (2 heures avec ordinateur)
Ce TP se situe à la fin. La partie A n'a été faite qu'en 1re S3. C'est un retour à une situation étudiée lors de l'initiation au logiciel DERIVE. La partie B prolonge le TP1. En 1re S3, fin du TP et rédaction sur copie à la maison.

Devoirs surveillés, corrigés des devoirs sur copies... (environ 6 h)
Les connaissances testées en devoir surveillé sont classiques : étude et représentation graphique de fonctions, lien avec d'autres problèmes.
Il n'y a pas eu de devoir surveillé permettant l'utilisation du logiciel DERIVE, d'une part car il n'y avait pas suffisamment d'ordinateurs pour que chacun ait le sien,

3. Quelques observations que nous avons faites

Notre premier objectif était évidemment qu'après ce travail, les élèves connaissent les notions du programme étudiées au moins aussi bien qu'après un enseignement classique et qu'ils aient au minimum acquis les mêmes savoir-faire.

De plus, nous espérions qu'en expérimentant, en observant, en passant facilement du cadre numérique au calcul algébrique ou au graphique et de l'aspect local à l'aspect global et réciproquement, ils auraient une meilleure représentation des concepts abordés.

Nous souhaitions également exploiter la capacité de calcul d'un logiciel pour traiter des problèmes de mathématiques un peu moins élémentaires que les exercices habituels des manuels de première.

Tout au long de ces séances, nous avons observé nos élèves et nous avons étudié des extraits des copies de 1re S3 que nous avions ramassées. (Il était plus facile de donner des devoirs à la maison nécessitant DERIVE aux S3, puisque ces élèves avaient des portables). Nous allons aborder un certain nombre de points généralement retenus dans l'analyse des séquences d'enseignement utilisant les logiciels de calcul formel. (Voir par exemple Michèle Artigue [2])

a) Avantages et difficultés de l'expérimentation et du calcul assisté

Le logiciel DERIVE peut réaliser rapidement un grand nombre de tâches.

Comme il permet de faire de nombreux essais, il peut faciliter une démarche expérimentale à condition de se rappeler que le principal problème n'est pas de réaliser des essais mais de savoir lesquels et dans quel but.

On peut aussi l'utiliser comme assistant de calcul. La question essentielle est alors de savoir jusqu'où on peut lui faire confiance.

Nous avons constaté que l'observation est efficace lorsqu'elle est guidée. Par exemple, dans l'activité 1, les élèves conjecturent (2) très rapidement l'expression de la dérivée P' d'un polynôme P et utilisent très bien le logiciel pour la tester (on ne peut bien sûr pas la *prouver* ainsi).

Cependant, elle pose également de sérieux problèmes. Dans l'activité 2, la plupart des élèves ont eu des difficultés : dans une première rédaction, nous avions demandé de conjecturer un lien entre f et f' à partir de leurs courbes. Nous n'avons obtenu aucune réponse satisfaisante car les obstacles étaient trop importants : la lecture globale d'un graphique n'était pas acquise et de plus il s'agissait de mettre en relation une propriété de f et une propriété de f' très différentes.

Nous avons ensuite demandé un lien entre le signe de f' et le sens de variation de f. La question est devenue beaucoup plus facile, mais même ainsi, la réponse n'a pas été immédiate. D'autre part, lorsque les élèves ont essayé de vérifier ce lien, ils ont choisi des polynômes de degrés trop élevés et les ont représentés dans des fenêtres trop petites, dans lesquelles les courbes se limitaient à quelques segments quasiment verticaux. Il est évident qu'on ne peut rien lire d'intéressant sur une telle figure.

Un autre exemple de ce type est la résolution de
$12x^5 - 45x^4 - 40x^3 + 60x^2 + 60x + 12 = 0$
à l'aide de graphiques dans la fiche DERIVE I. Là aussi, on observe la difficulté de choisir une fenêtre adéquate. Par conséquent, très peu d'élèves trouvent cinq solutions, alors que l'équation n'avait pas été choisie pour les piéger, les solutions étant raisonnablement comprises entre -1 et 5. On peut sans doute expliquer cela en partie par le manque de convivialité des commandes de zoom de DERIVE, mais aussi par la difficulté à décider ce qu'on veut voir. Une retombée inattendue de ce genre de déboires a été dès le départ une méfiance de "ce qui se voit". Nous y reviendrons.

La démarche expérimentale doit être apprise. Pour cela, il faut développer à la fois la capacité à conjecturer des propriétés non élémentaires, quitte à les infirmer par la suite, et l'aptitude à faire des essais pertinents. Il faut surtout apprendre à décider où regarder et quoi regarder. Il reste alors à démontrer les résultats. Un logiciel de calcul ne peut pas le faire, mais il peut nous aider à éliminer les fausses pistes et à retenir les meilleures.

L'activité 5 nous a donné un exemple de comparaison de travail assisté par DERIVE ou par le manuel. La 1ère S3 est en classe entière et nous manquons de machines. Deux élèves, les plus réticents à l'utilisation des ordinateurs, se proposent pour essayer de faire cette activité "à la main". Il s'agit de calculer les dérivées de certaines fonctions à partir de la définition locale, et de conjecturer les formules de dérivation de quelques fonctions $x \mapsto f(ax + b)$. Alors que les élèves qui utilisent l'ordinateur ne rencontrent aucune difficulté sérieuse, les deux autres, malgré les indications du professeur, n'arrivent pas à calculer

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \text{ ni } \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^4}{x - a} \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x - a},$$

trouvent les dérivées des fonctions racine, sinus, cosinus et tangente avec le manuel,

(2) Nous utiliserons le mot "conjecture" dans le sens défini par François Le Lionnais dans son *Dictionnaire des Mathématiques* : "Hypothèse émise, *a priori*, sur l'exactitude ou l'inexactitude d'un énoncé dont on ignore la démonstration".

mais ne trouvent pas de conjecture pour les dérivées de $x \mapsto \sqrt{\alpha x + \beta}$, $x \mapsto \cos(\alpha x + \beta)$,... malgré le manuel.

Pourtant, ils étaient très motivés car il y avait au départ dans leur choix un défi à la machine, mais ils se sont heurtés à deux obstacles : ils ont manqué d'idées pour lever des formes indéterminées (ce qui s'explique par le peu d'ambition du programme de première dans ce domaine) et ils n'ont pas compris la formule du manuel concernant la dérivée de $x \mapsto u(ax + b)$, ce qui était justement un des buts de la fin de l'activité.

D'autre part, lorsque la démarche n'est pas imposée, beaucoup d'élèves ont aussi du mal à utiliser judicieusement DERIVE comme assistant. Par exemple, ils développent et factorisent les polynômes à la main. Ainsi, dans le TP2-B, lorsqu'il s'agit d'étudier la fonction f_2 avec

$$f_2(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x + 10,$$

une copie donne le calcul $f'_2(\frac{1}{2}) = 0$, en déduit $f'_2(x - \frac{1}{2}) \times P(x)$, puis le calcul et la factorisation de $P(x)$ à la main. Alors qu'il est évident que la racine $\frac{1}{2}$ a été trouvée avec DERIVE, l'élève fait comme s'il l'avait trouvée lui même et ne prend pas la forme factorisée fournie par DERIVE bien que l'énoncé y invite. Il pense probablement qu'un résultat ne peut se prouver qu'en appliquant les techniques du calcul manuel et oublie qu'il lui aurait suffi de développer le résultat fourni par le logiciel s'il ne lui faisait pas totalement confiance.

Pour la même question, un autre donne $f_2(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{10}}{2} - 1$ ou $x = \frac{\sqrt{10}}{2} - 1$, résultat visiblement obtenu avec DERIVE, bien qu'il ne le dise pas.

Ensuite, DERIVE ne lui fournissant pas directement de tableau de signes, tout se passe comme s'il n'arrivait pas à raccrocher ces résultats aux méthodes classiques ou à une autre observation, puisqu'il donne le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{10}}{2} - 1$		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{10}}{2} - 1$		$+\infty$
$f'2(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$		$+$	

Nous voyons ici que la coexistence intelligente du logiciel et du raisonnement n'est pas facile car il s'agit de concilier des résultats n'ayant pas le même statut.

Il est difficile de savoir si une démonstration est rigoureuse lorsqu'on a confié une partie des calculs à une machine. Il faut donc apprendre quelles tâches on peut confier à un logiciel de calcul formel, quand et comment être sûr des résultats qu'il fournit et savoir les insérer judicieusement dans une démarche de résolution de problèmes.

b) Faut-il croire ce que l'on voit ?

Comme nous l'avons déjà évoqué, la façon de prendre en compte "ce qui se voit" a été différente dans nos classes de ce que nous attendions.

Il est devenu courant de remarquer, par

exemple à propos de l'étude des fonctions, que les élèves commencent par observer les résultats fournis par leur calculatrice et qu'ensuite ils en déduisent une étude théorique qui doit à tout prix justifier ce qu'ils voient. Mais ce n'est pas vraiment ainsi que nos élèves se sont comportés avec DERIVE, peut-être parce qu'ils faisaient moins confiance à cet outil moins familier. Leur méfiance a même quelquefois été tellement grande qu'ils pensaient que rien de ce qu'ils voyaient ne pouvait être juste. En cas de contradiction, ils se fiaient en général plus à leur raisonnement qu'au logiciel.

En voici quelques exemples :

Dans la question 1)a) du TP1, il s'agissait de tracer avec DERIVE des courbes de fonctions $f_a(x) = x^4 + ax^3 - 5x^2 + 3x + 10$ et de donner les tableaux de variation observés. Dans la question 1)b), on demandait de trouver encore deux autres types de tableaux de variation de polynômes de degré quatre. Or, surtout en 1re S3, de nombreux élèves font les études complètes des fonctions choisies à la main, en utilisant souvent DERIVE pour trouver les racines de la dérivée, avant de donner leurs tableaux de variation, puis rédigent ces études, alors qu'elles ne sont pas du tout demandées ici.

Un groupe d'élèves appelle même le professeur pour dire qu'ils ne trouvent pas la même chose que DERIVE. Le professeur commence par vérifier... les calculs, pour découvrir qu'ils sont justes et que la courbe observée est tout simplement incomplète à cause d'un mauvais cadrage.

On retrouve cette erreur dans une autre copie, qui donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_1(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

en précisant "par ordinateur" (ce tableau est lu à partir d'une fenêtre dans laquelle les ordonnées ne dépassent pas 10), puis qui continue par le calcul et une factorisation correcte de $f'_1(x)$ et un tableau de variation tout à fait exact, qui n'est pas le précédent.

Ce travail a donné lieu à de nombreuses remarques comme "je calcule pour vérifier", "je ne trouve pas pareil", "la courbe devrait être autrement"... et à beaucoup plus d'exercices d'études de fonctions que prévu.

Dans le TP2-B non plus, les élèves ne se sont pas contentés de lire les tableaux de variation directement sur les courbes, puisque la courbe C_2 a un maximum local en $A(\frac{1}{2}, 10{,}5625)$ et un minimum local en $B(\approx 0{,}58 ; \approx 10{,}5614)$ et que toutes les copies notent les deux points dans le tableau de variation. Certains relèvent d'ailleurs que ces deux points ne se distinguent pas sur les courbes et pendant l'activité en classe, un groupe a cherché à faire un zoom pour mettre en évidence la décroissance de la courbe entre ces deux points.

On trouve un exemple de scepticisme excessif dans la question 5 de la fiche DERIVE II, renforcé par le fait que c'est le professeur, à travers une erreur d'énoncé, qui donne un résultat faux. Il s'agissait de prouver que la suite, décroissante, définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{10} {u_n}^2 + 1$ était strictement croissante après avoir calculé des valeurs approchées de ses 12 premiers termes. Or on lit dans plusieurs copies des variantes de : “on trouve [2 ; 1,4 ; 1,196 ;...] ; mon calcul à l'ordinateur doit être faux car la suite doit être croissante ; prouvons-le...” et la question se termine par une “preuve” de la croissance de la suite basée sur des inégalités fausses.

Ceci montre que, comme avec les calculatrices, il est difficile de faire le lien entre la théorie et les résultats observés.

Mais nous avons vu que les élèves se fient peu aux résultats donnés par le logiciel et qu'ils sont plus critiques vis à vis de lui que de leur calculatrice, au point de chercher à prouver le contraire de ce qu'ils voient.

Si on se réfère à la classification des sources de renseignements de l'élève (le maître, la calculatrice, ses résultats personnels) donnée par Luc Trouche dans [3], DERIVE aurait donc à ce stade un coefficient de confiance plus faible que les trois sources précédentes, ce qui ne lui donne pas le même statut que la calculatrice. Cette impression est renforcée par le fait que les élèves n'ont cherché à valider un résultat faux que lorsqu'il a été proposé – par erreur – par le professeur et jamais lorsqu'il a été donné par DERIVE.

Bien que paradoxalement la plupart d'entre eux préfèrent DERIVE à la calculatrice pour étudier une fonction (voir 4), le logiciel leur semble souvent moins rassurant parce qu'ils le connaissent moins.

Mais qu'en sera-t-il lorsque DERIVE sera simplement une fonction de la calculatrice ?

c) La redécouverte des nombres

DERIVE a aussi été le révélateur de la conception de nombre et de valeur approchée que se font beaucoup d'élèves. Ceci nous a peut-être permis de mieux leur faire comprendre ces notions fondamentales dans l'apprentissage de l'analyse.

Dans la fiche DERIVE I, Question 2, on demande de résoudre des équations de degré 3. Le premier polynôme a trois racines réelles et elles sont rationnelles. Le deuxième a une seule racine réelle et elle est rationnelle. Ces deux cas sont très facilement traités. Les résultats sont faciles à vérifier à la main *a posteriori*, même si aucune racine évidente n'aurait permis de résoudre ces deux problèmes sans aide.

Mais la troisième équation, en résolution exacte, trouble beaucoup les élèves : DERIVE donne trois solutions réelles, en donnant leurs valeurs exactes, mais les expressions sont tellement compliquées qu'ils ne comprennent pas la situation. Pourtant, à part ATAN – qu'il est facile de leur expliquer sommairement puisqu'ils connaissent “TAN–1” sur leurs calculatrices –, ils connaissent toutes les notations utilisées. Un élève demande s'il n'y aurait pas d'écriture “plus simple” et cela leur semble inconcevable qu'il n'y en ait pas.

Comme on le constate souvent, par exemple dans la volonté des collégiens et même de leurs aînés de réduire l'écriture de nombres comme $3 + 5\sqrt{2}$, il est difficile d'admettre qu'un nombre réel n'a pas de “format” élémentaire, contrairement à un entier, un rationnel (de “format” $\frac{n}{d}$, $n \in Z$, $d \in \mathbb{N}^*$) ou un décimal.

Pour les élèves de première, une valeur réelle exacte a une expression numérique relativement simple, qui peut se lire facilement. Ceci est renforcé par les types de nombres qu'ils rencontrent habituellement.

Il est plus rassurant de chercher des valeurs approchées des solutions...

La situation empire pour les équations de degré quatre, qui prennent du temps... même à DERIVE et qui donnent des valeurs exactes encore plus compliquées.

Seul un outil comme DERIVE permet à ce niveau une incursion rapide dans les résolutions exactes des équations du troisième et du quatrième degré, et donne peut-être une image plus juste de la complexité du problème et de la notion de nombre réel que lorqu'on se restreint à des cas de racines "évidentes".

Nous trouvons d'autres conceptions de la notion de valeur approchée dans la résolution de la question 3 de la fiche DERIVE I. Il s'agissait d'étudier l'équation $f(x) = 0$, où $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 + 4x - 1$, qui a une solution unique. L'énoncé propose de construire la courbe de f, de conjecturer le nombre de solutions, de noter α la solution donnée par DERIVE en résolution approchée, de calculer $f(\alpha)$ et d'en tirer une conclusion, et enfin de dire si on a une certitude sur le nombre de solutions de l'équation. On observe alors que les formes décimales telles que $\alpha = 0{,}325933$ sont toujours perçues comme des valeurs approchées, alors que les fractions telles que $\alpha = \dfrac{20379}{62525}$ sont considérées comme des valeurs exactes, même lorsque le calcul donne $f(\alpha) \neq 0$. Voici un extrait de copie : "on trouve $\alpha = 0{,}325933$; α est une valeur approchée de la solution de $f(x) = 0$ car $f(\alpha) \approx 0$. La valeur exacte est $\dfrac{20379}{62525}$". Par ailleurs, contrairement à cet exemple, très peu voient ce que signifie le résultat $f(\alpha) \neq 0$.

Mais nous avons été bien plus surpris par les conséquences que certains tirent de cette connaissance approchée des solutions et par les liens inattendus qu'ils établissent entre le calcul numérique et l'analyse.

d) Le difficile passage des aspects numériques et graphiques à l'analyse

Après avoir tracé la courbe de f et essayé la résolution approchée de $f(x) = 0$, des élèves écrivent par exemple : "on ne peut pas avoir de certitude quant au nombre de solutions réelles de $f(x) = 0$ à cause des nombres approximatifs..." ou même "je constate que cette équation ne se résout pas, car lorsqu'il y a une puissance 5, l'ordinateur ne peut pas la résoudre ; ma conjecture sur le nombre de solutions réelles pour $f(x) = 0$ est qu'*il y en a une infinité* ; DERIVE me donne une solution, $\alpha = \dfrac{1571}{4820}$; j'obtiens $f(\alpha) \approx -3{,}6 \times 10^{-8}$; j'en conclus qu'*il n'y a pas de solution* pour $f(x) = 0$; il n'y a pas de certitude quant au nombre de solutions réelles de $f(x) = 0$; *il y en a une infinité*". Pour eux, le mot solution semble représenter tour à tour toute réponse approchée donnée par DERIVE et un objet abstrait dont ils ont une représentation très floue mais qui n'existe pas si on ne peut pas le calculer. Ils ont du mal à comprendre qu'on peut avoir des certitudes sur quelque chose qu'on ne connaît pas explicitement, ce qui sera pourtant le but de nombreux problèmes d'analyse.

D'autres écrivent “après plusieurs zooms, ma conjecture sur le nombre de solutions réelles de $f(x) = 0$ est qu'*il n'y a qu'une solution*, S ≈ {0,326} ; avec *Précision Approximation*, j'obtiens $\alpha = \dfrac{1571}{4820}$; $f(\alpha) \approx -3{,}6 \times 10^{-8}$; $f(\alpha)$ n'est pas égal à 0 bien que très proche ; ainsi, je n'ai pas de certitude quant au nombre de solutions réelles de $f(x) = 0$ car *je pense qu'il y en a une infinité*”. Eux aussi semblent penser que la valeur approchée a *est* une solution et par conséquent toutes les autres valeurs approchées aussi, ce qui en donne une infinité. Pourtant, cette copie partait d'une bonne interprétation graphique, mais on constate qu'elle n'a pas résisté à d'autres représentations. Nous touchons là au difficile concept de nombre réel, d'autant plus compliqué que les nombres les plus familiers aux élèves sont ceux de la calculatrice. Peut-on y voir aussi une intuition sur la représentation d'un nombre réel à partir d'une suite de Cauchy ?

Pour beaucoup, d'autres aspects de la lecture graphique ne sont pas encore acquis. Un élève écrit par exemple : “$f(x) = 0$ a deux solutions car dans la représentation graphique, la courbe coupe l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses”.

Certains ont d'emblée une représentation plus juste de la situation. Par exemple : “on ne peut pas avoir de certitude quant au nombre des solutions à cause des limites prises (inf –10 et sup 10)” ou “il n'y a pourtant pas de certitude à ce propos parce qu'aucun procédé n'a permis de le prouver” ou “en fait, nous ne savons pas si cette solution est unique ; la courbe peut, à un moment “très lointain”, être décroissante et donc éventuellement repasser par la droite des abscisse”. Ou encore dans la question suivante où on résout $g(x) = 0$ avec $g(x) = 12x^5 - 45x^4 - 40x^3 + 60x^2 + 60x + 12$: “ le nombre de solutions réelles de $g(x) = 0$ est de 5 (conjecture) ; en effet, une équation du 5^{e} degré admet 5 solutions au maximum ; $x_1 \approx -0{,}86$; $x_2 \approx -0{,}66$; $x_3 \approx -0{,}30$; $x_4 \approx 1{,}38$; $x_5 \approx 4{,}19$”.

Les interprétations fausses des premières copies nous ont montré que la conclusion d'unicité du théorème “si f est dérivable sur [a, b] et si f ' est strictement positive sur]a, b[, alors f est strictement croissante sur [a, b] et pour tout λ de [f (a), f (b)], l'équation f (x) = λ admet une solution et une seule dans [a, b]” est plus difficile à comprendre que nous ne le pensions et surtout qu'un dessin ne suffit pas à convaincre. D'ailleurs, lorsqu'on représente la fonction f où $f(x) = x^{99}$ par exemple et que l'on fait des zooms autour de l'origine, on trouve beaucoup moins ridicule de penser que $f(x) = 0$ a une infinité de solutions et on comprend bien la nécessité d'un raisonnement s'appuyant sur la stricte croissance de f pour se convaincre de l'unicité de la solution.

Le même problème se pose probablement dans la situation plus habituelle d'un arc de courbe et de sa tangente. Certains ont sans doute du mal à concevoir un seul point de contact et en imaginent une infinité. A ce propos, Luc Trouche signale la “définition” suivante donnée par un élève de 1re S lors d'un travail avec des calculatrices graphiques : “une droite est d'autant plus tangente à une courbe qu'elle a plus de points de contact avec elle” [3] et [4]. Une des raisons données par L. Trouche est la représentation discrète des pixels de l'écran [4].

Ce n'est pas la seule. La représentation mentale correcte exige une bonne maîtrise de l'analyse. Nous avons vu plus haut que certains concluent à un "contact infini" avec une conjecture graphique d'unicité. Ceci montre que l'interprétation graphique n'est pas acquise puisqu'elle ne conduit à aucune conviction durable et que les conclusions données sont incompatibles avec une idée correcte de la situation. D'autre part, les dessins au crayon non taillé que certains font à la main ne donnent pas une meilleure image d'un contact réduit à un point. Cependant en analyse, le dessin à la main est rarement un support expérimental. Il ne précède pas l'étude comme les graphiques faits par la calculatrice ou l'ordinateur et il est difficile d'y trouver autre chose que ce qu'on a choisi d'y mettre. Ces différences entre l'image papier-crayon et l'image clavier-écran sont développées par L. Trouche dans [3]. Les erreurs d'interprétation risquent donc beaucoup moins d'apparaître dans l'univers papier-crayon, mais cela ne prouve pas une meilleure compréhension de la situation. En effet, ces erreurs mettent en évidence des problèmes plus profonds comme celui de la distinction de l'infiniment petit et du zéro qui n'est pas intuitive et qui ne pourra jamais se faire visuellement, d'où l'importance de l'enseignement théorique de l'analyse.

Cela doit être un de ses objectifs d'apprendre à décoder ce que l'on voit. On ne peut lire correctement une figure que si on a les outils pour l'interpréter et une notion ne pourra pas être acquise tant qu'il n'y aura pas de cohérence entre ses différentes représentations.

La notion de dérivabilité par exemple ne peut coexister avec l'image mentale de courbes constituées d'une infinité de segments que les écrans peuvent faire apparaître.

Nous avons observé des progrès après l'étude théorique des équations $f(x) = \lambda$. Nous n'avons plus trouvé ensuite de contradictions sur le nombre de solutions. Les copies citent alors comme preuve le théorème évoqué plus haut. Cela ne suffit pas à prouver que certaines représentations fausses ne subsistent pas, mais l'évolution semble quand même positive.

Le travail d'accompagnement fait avec DERIVE conduit peut-être ici à une connaissance plus solide. Les réponses des élèves au questionnaire auquel nous reviendrons plus loin indiquent d'ailleurs que certains au moins ont retenu des images fortes de l'utilisation de cet outil.

D'autres disent avoir mieux compris la signification de certaines notions, ce qui est sans doute favorisé par la possibilité d'explorer simultanément et rapidement des aspects plus variés des mathématiques.

Il reste à savoir si les images et les représentations construites ainsi sont les bonnes. L'activité 4 – très visuelle – sur les tangentes semble avoir marqué certains puiqu'ils en reparlent, mais nous ne sommes pas sûrs de ne pas avoir renforcé certaines représentations fausses évoquées plus haut. Cependant, il est plus facile pour le professeur d'éviter l'ancrage d'une conception fausse lorsqu'il l'a repérée. Il est donc essentiel qu'il soit d'autant plus vigilant que le domaine exploré est plus vaste et comporte des pièges. Mais si nous ne sommes pas trop pessimistes, c'est que le logiciel peut aussi multiplier les occasions de faire émerger les erreurs.

e) Un autre regard sur les notations

Les exigences de DERIVE obligent les élèves à accorder beaucoup plus d'importance à la signification des notations et des symboles qu'ils manipulent.

Le manque de souplesse du logiciel dans ce domaine les a quelquefois surpris, par exemple l'impossibilité de noter une fonction f', bien que ce soit son nom dans l'énoncé mathématique.

Ils n'ont par contre jamais eu de difficulté à passer des notations du logiciel aux notations mathématiques. Ils ont toujours reconnu $f'(x)$ dans les $\frac{d}{dx}f(x)$ et même dans les $\frac{d}{dx}(f(x)\text{: =...})$ de l'ordinateur.

D'ailleurs, il semble que l'obligation d'être attentif aux écritures et à la syntaxe du logiciel mène à une réflexion bénéfique sur les objets et le langage mathématique.

Nous pouvons illustrer cela par le déroulement de l'activité 3. Son premier objectif est de montrer que la règle $(u \times v)' = u' \times v'$ ne serait pas compatible avec les règles de dérivation des polynômes. Mais la différence entre les *notations* $(u \times v)'$ et $u' \times v'$, $\left(\frac{1}{v}\right)'$ et $\frac{1}{v'}$, $\left(\frac{u}{v}\right)'$ et $\frac{u'}{v'}$ a posé des problèmes et a provoqué de nombreuses questions de la part d'élèves pour qui la notation « ' » devait, par analogie de position, avoir les propriétés de la notation exponentielle.

Par contre, lorsque les notations ont été comprises, il n'y a pas eu de difficulté pour apprendre les formules de dérivation d'un produit ou d'un quotient.

Nous n'avons pratiquement pas vu d'erreurs du type " $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$) " dans les exercices.

Tout s'est passé comme si la difficulté était simplement de comprendre que des écritures comme $(u \times v)'$ et $u' \times v'$ par exemple correspondent à des graphes d'opérations différents et non pas de retenir que pour dériver un produit, il faut faire autre chose que le produit des dérivées ; c'est à dire que l'apprentissage opérationnel semble être moins difficile que la signification des notations. Dans notre exemple, la démonstration complète des résultats n'est pas au programme. On en fera comprendre l'origine à partir des développements limités, mais cela ne suffit sans doute pas à règler le problème des formules, tout comme la démonstration de $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ ne suffit pas à éliminer l'attraction de la linéarité. On peut se demander si, même dans un apprentissage plus classique, il ne faudrait pas diversifier davantage le travail de compréhension des écritures pour qu'il y ait moins de confusions entre les propriétés mathématiques et les simples jeux d'analogies syntaxiques. (Nous connaissons tous les "simplifications" du type : $\frac{\cos x}{\cos(3x)} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$...)

Nous avons constaté aussi que DERIVE, en donnant souvent une forme du résultat différente de la forme attendue par les élèves, conduit quelquefois à un travail intéressant de transformation d'écritures. Par exemple, la dérivée d'un quotient est donnée par le logiciel sous la forme $\frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2}$, alors que les élèves la mettent en général sous la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$, dans laquelle ils développent trop souvent $u'v - uv'$. Ils sont alors obligés de mettre les deux expressions sous forme factorisée pour les comparer.

Cette situation est encore plus fréquente en trigonométrie. Par exemple, la dérivée de $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ est $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ pour DERIVE et $\cos(x - \frac{\pi}{4})$ pour les élèves qui se posent alors des questions.

Par contre, la transposition d'un problème en langage DERIVE, bien que très proche du langage mathématique, crée de nouvelles difficultés. Ainsi, la distinction entre l'affectation (: =) et l'égalité (=) a été une source d'erreur fréquente. Pourtant, là aussi les contraintes du logiciel apportent souvent un nouvel éclairage à l'activité mathématique. Par exemple, dans l'activité 5 où il s'agit de calculer des dérivées à l'aide de la définition locale, certains utilisent les commandes *resoL* ou *Derive* pour évaluer $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Il ne s'agit sans doute pas de simples difficultés techniques, mais plutôt de problèmes de sens qui sont révélés ainsi.

Enfin, comme le logiciel ne s'arrête pas au programme de première, sa manipulation a souvent permis de découvrir des notions qu'on n'aborde pas en général à ce niveau.

f) Une ouverture vers de nouveaux problèmes mathématiques

Dans le TP1, lorsqu'on demande de tracer les courbes de plusieurs fonctions f_a avec $f_a(x) = x^4 + ax^3 - 5x^2 + 3x + 10$, plusieurs élèves font des représentations graphiques avant de donner une valeur à a et obtiennent des surfaces. Ils trouvent cela très joli et sont intéressés par les explications que leur donnent bien sûr les professeurs. En 1re S2 (TI), cette découverte conduira même certains à faire de nombreuses explorations sur leur ordinateur personnel.

Une autre découverte, provoquée cette fois ci, est celle des nombres complexes. Il était indispensable d'en connaître l'existence pour exploiter au mieux les résultats obtenus dans la recherche des racines de polynômes. Ces nombres ne troublent pas les élèves. Ils les manipulent très naturellement, même s'ils oublient quelquefois leur nom et les nomment "irréels".

Nous leur avons appris que tout polynôme se factorise en un produit de polynômes de degrés 1 ou 2 dans , et de degrés 1 uniquement dans l'ensemble des complexes. Cet aspect du TP2 est difficile. La propriété : "un polynôme a une racine réelle si et seulement si sa factorisation maximale dans contient un polynôme de degré 1" n'est pas appliquée, bien que celle-ci soit du programme de première. D'autre part, les élèves ont du mal à concevoir qu'un polynôme de degré quatre sans racine réelle se factorise en produit de deux trinômes et encore plus de mal à étudier son signe sans connaître l'expression explicite des deux trinômes. Par contre, on trouve plus facilement, même chez des élèves moyens, des raisonnements comme : "$f'_3(x) = 4x^3 + 9x^2 - 10x + 3$; en faisant résoudre à DERIVE l'équation $f'_3(x) = 0$, nous obtenons trois solutions, une réelle et deux irréelles. Nous pouvons donc en déduire que $f'_3(x)$ se factorise sous la forme

$$f'_3(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c) ;$$

$x_0 = -(\frac{\sqrt{5982}}{144} + \frac{111}{64})^{\frac{1}{3}} - (\frac{111}{64} - \frac{\sqrt{5982}}{144})^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4}$;

$x_0 \approx -3{,}12637$;

il reste deux solutions irréelles donc le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine réelle. Son Δ est négatif, il aura alors le signe de a. De plus, par identification on a $a = 4$ donc a est positif. D'où le tableau de signes de $f'_3(x)$...". Ce genre de raisonnement, favorisé par DERIVE, va un peu plus loin que les exercices classiques de polynômes étudiés en première.

Nous avons aussi constaté que les notations *ATAN* ou $a^{\frac{1}{3}}$ ont été facilement acceptées après quelques rapides explications.

Nos élèves ont donc été confrontés à des problèmes de mathématiques difficiles, mais nous n'avons pas eu l'impression qu'ils les ont abandonnés plus rapidement que d'autres exercices plus élémentaires, peut-être parce que DERIVE permet d'essayer plus de choses lorsqu'on "sèche".

4. Quelques réactions d'élèves

Pour avoir leur avis, nous leur avons proposé un questionnaire début juin. Nous avons volontairement laissé passer deux à trois mois entre la fin de l'expérimentation et cette enquête car nous préférions savoir ce qu'ils en disaient avec un peu de recul. Les réponses sont anonymes. Nous donnons toutes les questions et des statistiques en annexe. Presque toute la page 2 est empruntée à un questionnaire de l'équipe DIDIREM, dont nous n'avions malheureusement que des extraits à travers les Actes de l'université d'été de Caen ([5] et [6]).

a) Attitude des deux classes face aux calculatrices et à DERIVE

Au départ, il y a des différences importantes entre les images que se font les deux classes des outils de calcul, sans doute à cause de la familiarité des S2, d'option industrielle, avec l'utilisation de machines.

Les réponses au questionnaire montrent que seulement 8% des S3 contre 59% des S2 possèdent un ordinateur performant à la maison. De plus, à peine 12% des S2 mais 69% des S3 trouvent difficile de programmer leur calculatrice.

Cependant, ces différences ont peu de conséquences sur leur perception de DERIVE.

Les deux classes se retrouvent par exemple pour dire massivement qu'il n'est pas difficile d'apprendre à s'en servir.

Quel statut donnent-ils à ce logiciel ?

65% des élèves de S2 et 73% des S3 trouvent qu'on peut faire des mathématiques avec DERIVE même si on a des difficultés en algèbre.

Mais nous ne devons pas en déduire trop vite qu'une spécificité de cet environnement est de permettre la construction du deuxième niveau d'un échafaudage de connaissances même si le premier n'est pas sûr, comme le propose B. Kutzler [7]. En effet, en 1^re S3 (seule classe à qui la question a été posée), il y a 50% d'élèves qui disent que même sans DERIVE, on peut faire des mathématiques si on a des difficultés en algèbre. La moitié de la classe donne exactement la même réponse aux deux questions, et 15% pensent même que faire des maths si on a des difficultés en algèbre est plus facile sans logiciel.

Peu d'élèves (6% de S2 et 15% de S3) pensent que si DERIVE ne donne pas de réponse, le problème n'a pas de solution.

Les S3 sont par contre 85% à faire entièrement confiance au résultat donné par DERIVE alors qu'ils sont moins nombreux, 47%, en S2. Cependant, les S2 qui n'ont pas confiance semblent plus douter du processeur de l'ordinateur – leurs connaissances techniques leur font citer anecdotiquement les problèmes du pentium – que du logiciel.

b) Voir plus loin ?

Dans les questions ouvertes, de très nombreux élèves disent que ce travail leur a permis de donner plus de sens ou de mieux comprendre certaines notions et démarches. Voici quelques citations relevées dans plusieurs questions différentes qui n'appelaient pas particulièrement ce type de réponse :

DERIVE m'a permis de...

"voir en profondeur les démarches et l'analyse des résultats" ;
"découvrir des règles de calcul en comprenant le pourquoi de la chose" ;
"mieux saisir les choses à voir (ex : zoom pour les tangentes)".

Avec DERIVE, j'ai découvert...

"différentes méthodes de travail sur les fonctions" ;
"une rapidité pour réfléchir, voir plus loin que les 'à-côtés', approfondir mon raisonnement" ;
"une meilleure assimilation de certains éléments mathématiques".

J'aimerais avoir DERIVE sur ma calculatrice...

"pour avoir une certaine notion d'une méthode de travail ;
"car ça ouvre plus d'horizons" ;
"car on a une meilleure approche des maths" ;
"car on peut mieux comprendre et progresser".

Autres remarques...

"DERIVE est un bon logiciel pour une bonne adaptation et initiation aux mathématiques".

On peut noter pourtant que les S3 sont plus nombreux à donner des impressions de ce genre que les S2, qui eux, semblent s'être intéressés davantage à l'exploration et aux aspects techniques du logiciel.

Mais c'est aussi chez les S3 que l'on rencontre le plus d'avis contraires et de craintes...

"DERIVE aide à résoudre mais pas à comprendre, il déprime plus qu'autre chose puisque lorsque les élèves n'arrivent pas à s'en sortir, lui le fait sans problème" ;
"l'utilisation des ordinateurs en cours est plus qu'inutile car cela ne contribue pas à la connaissance en math et aux différents modes de calcul" ;
"avec DERIVE, on ne se donne plus la peine d'apprendre les formules, on prend les maths à la rigolade. On ne peut pas avoir un ordinateur toute sa vie et si on a besoin d'une réponse, on n'aura plus les bonnes bases en math" ;
"DERIVE, c'est bien quand on maîtrise les règles de calcul, sinon, cela risque d'encourager les fainéants à en faire encore moins".

Les élèves formulent donc eux mêmes

toutes les réserves et tous les reproches que l'on peut faire à l'utilisation des logiciels de calcul formel, mais malheureusement, leurs critiques ne semblent pas s'étendre aux calculatrices dont leur évidente dépendance ne les gêne plus.

Il apparaît aussi que l'ordinateur modifie leur rapport au savoir et aux autres.

c) Le statut de l'erreur

Comme le rappelle M. Artigue [2], on suppose souvent que l'environnement informatique est plus convivial que l'enseignement classique car dans le premier, l'erreur serait moins pénalisante pour l'élève et le professeur davantage perçu comme une personne ressource.

Nous avons donc posé la question suivante, volontairement floue :

"Est-ce que ça te gêne plus ou moins de faire des erreurs en cours de math avec DERIVE ou sans ; pourquoi ?"

Nous donnons ici l'ensemble des réponses (un peu résumées et regroupées par thème) pour mieux analyser les différentes perceptions du logiciel et mettre en évidence quelques différences entre les deux classes. Certains élèves n'ont pas répondu à la question.

1re S2 (TI)	1re S3 (Sc. Ex.)
– c'est pareil	*– c'est pareil*
L'apprentissage des mathématiques se fait aussi avec des erreurs ; Faire des erreurs peut arriver à tout le monde ; C'est pareil, une erreur est une erreur ! L'ambiance dans la classe étant plutôt excellente, je n'ai pas *peur* de me tromper et donc avec DERIVE encore moins ; Faire une erreur, même si on est seul à le savoir, est toujours *rabaissant*.	C'est tout à fait normal de se tromper lorsqu'on n'a pas l'habitude de travailler avec DERIVE, ça ne m'a gêné dans aucun cas ; Le mieux est de ne pas en faire, n'est-ce pas ?
– c'est moins gênant avec DERIVE car	*– c'est moins gênant avec DERIVE car*
C'est vite corrigé (2 fois) ; Ce sont de petites erreurs de calcul ou de signe, vite retrouvées ; On se rend assez rapidement compte des erreurs, qu'il suffit alors de rectifier ; On peut effacer et recommencer plusieurs fois ; Sans DERIVE, cela prouve que je n'ai pas bien compris et je me pose des questions ;	Ces erreurs sont des erreurs de manipulation, faciles à corriger (2 fois) ; Sans DERIVE, il faut tout recommencer, alors qu'avec DERIVE, une frappe suffit pour tout corriger ; C'est souvent une faute de frappe et non personnelle de réflexion ; Car elles viennent d'une mauvaise utilisation de l'appareil, alors que sans DERIVE, je m'en prends à moi-même et

Cela montre qu'on n'a pas tout compris ;
On recommence, on sait déjà que c'est un problème de raisonnement et non de calcul, c'est plus agréable.
A l'oral, *on nous permet* rarement de se rectifier, *les autres* étant plus rapides ;
Devant l'écran, il est moins gênant de faire des erreurs que devant *toute une classe qui a les yeux rivés sur vous* (2 fois) ;
On est *seul ou en petits groupes* ;
L'ordinateur est *une machine et non un humain*, ce qui ne lui donne pas la possibilité de vous juger et de vous apprécier, tandis qu'*une classe qui vous regarde*, lorsque vous vous trompez, émet des jugements souvent dépréciatifs ;
En classe, *tout le monde le voit* tandis que l'ordinateur ne peut pas *parler et le dire à quelqu'un* ;
En cours, face à la copie, on n'arrive plus à se *libérer l'esprit* pour trouver la source de l'erreur ;
Economie de papier.
c'est plus grave ;
Il vaut mieux savoir calculer par ses propres moyens ;
On peut accuser l'ordinateur de faire des fautes ;
On ne gaspille pas de feuilles et on ne les salit pas ;

– c'est plus gênant avec DERIVE car

L'utilisation du logiciel élimine la totale compréhension de la résolution du problème ;
Moins de plaisir à retoucher les erreurs ;

– c'est plus gênant avec DERIVE car

Il suffit de faire une faute de frappe pour que tout soit faux ;
C'est plus simple, donc je ne devrais pas me tromper ;
Avec DERIVE, ce sont le plus souvent des erreurs de raisonnement ;
DERIVE donne des réponses et on ne sait pas toujours si c'est juste ;
C'est que l'on ne sait pas se servir d'un ordinateur

Nous avons été amusés de trouver dans chacune des classes un élève qui apprécie l'économie de papier qu'il pense faire avec DERIVE !

Nous constatons avec plus d'intérêt que les S2 trouvent souvent humiliant de se tromper, qu'ils craignent le regard des autres et qu'ils ressentent moins cela face à l'ordinateur car la classe ne voit pas leurs erreurs.

Mais aucun élève de S3 n'exprime cela ainsi, bien que les deux classes aient fait le même travail. Il semble donc trop simple d'attribuer ces sentiments au simple fait d'utiliser ou non un logiciel.

Il nous semble également curieux de dire que le professeur est autrement perçu dans un environnement informatique. Aucun élève n'a évoqué cela. De plus, ceux qui parlent de leur crainte des erreurs parlent du regard de leurs camarades et non du professeur. Nous plaçons nos élèves en permanence en situation de résolution de problèmes et dans tous les cas, nous intervenons comme aide et personne ressource.

Par contre, les élèves observent que les erreurs avec DERIVE ne sont pas de même nature que dans l'environnement papier-crayon. L'activité de recherche d'erreur change donc également de nature – deux réponses disent même qu'elle est plus agréable dans l'un des deux cas – et beaucoup se sentent moins responsables du résultat lorsqu'ils utilisent l'ordinateur.

A notre avis, c'est sûrement un des écueils essentiels auquel nous devons être attentifs lorsque nous faisons travailler nos élèves avec une machine. Lorsqu'un intermédiaire, le logiciel, intervient entre l'élève et le problème posé, l'élève risque de se désengager de son travail et de ne plus se l'approprier et dans ce cas il n'a sûrement plus de vraie activité mathématique bien qu'il puisse nous sembler très occupé. (Mais cela arrive aussi très souvent dans un environnement classique.) Une manière d'éviter cela est de demander une production écrite et de veiller à ce que toute activité comporte une part suffisante de réflexion et d'interprétation de résultats et ne puisse pas se résumer à des calculs faits par DERIVE.

5. Conclusion

Un des buts essentiels de l'enseignement des mathématiques est d'apprendre à résoudre des problèmes. C'est sans doute l'un de nos principaux apports à la formation de tous les élèves. Bien sûr, il s'agit d'adapter la nature des problèmes et leur niveau de difficulté aux objectifs des différentes sections et aux outils dont les élèves disposent.

Mais nous constatons, avec B. Kutzler [7], qu'actuellement nous ne consacrons pas le même temps aux différentes composantes de la résolution de problèmes, car l'étape de calcul est souvent notre principal souci. Or l'utilisation régulière des logiciels de calcul formel peut nous permettre d'enseigner le calcul autrement. Lorsque chacun disposera de DERIVE sur sa calculatrice, il ne sera plus nécessaire de s'entraîner intensivement à faire des calculs compliqués. A l'opposé, il ne sera pas question non plus de ne pas apprendre de technique du tout sous prétexte que le logiciel fait tout. Pour le calcul numérique, cette position est assez bien passée dans les faits : nous ne nous entraînons plus au calcul avec les tables de logarithmes et plus personne n'effectue à la main la division ni même la multiplication de 1995,67 par 789,9. Par contre, il est très important de savoir faire du calcul mental dans des situations simples, par exemple pour savoir estimer des ordres de grandeur, et il reste intéressant de connaître des algorithmes pour leur aspect formateur ou historique.

Le problème est de définir ce qui jouera le rôle du calcul mental et des algorithmes de base dans le domaine formel. Ceci doit se faire dans les commissions de réflexion sur les programmes. Cependant, même en restant dans le cadre des programmes actuels comme nous l'avons fait, nous avons vu que l'utilisation de DERIVE modifie l'environnement de calcul avec des avantages qui compensent probablement les inconvénients.

Dans ce contexte, on doit apprendre à calculer pour comprendre et contrôler des résultats, et rester autonome dans des situations simples. Mais on gagnerait à développer les activités de modélisation et l'apprentissage de démarches expérimentales, pour lesquelles DERIVE peut être un outil. Les logiciels de calcul formel permettent aussi d'aborder des problèmes où les calculs ne sont pas artificiellement élémentaires et courts.

Cet environnement peut donner une nouvelle motivation à l'enseignement des concepts abstraits, indispensables pour comprendre et interpréter les résultats numériques, formels et graphiques observés.

Pour ne pas se contenter d'être un spectateur de ces images, il faut les maîtriser en s'interrogeant sur leur sens et leur pertinence.

Les lycéens vont bientôt disposer de possibilités de calcul symbolique sur leurs calculatrices. Si nous oublions d'en encadrer l'utilisation, nous risquons de voir apparaître rapidement un décalage catastrophique entre les signes manipulés par les élèves et les mathématiques, comme il y a par exemple confusion pour eux entre le sous-ensemble de décimaux des calculatrices et l'ensemble des nombres réels.

Il faut leur apprendre à trouver les convergences et les divergences entre les mathématiques et le modèle proposé par l'outil.

Nous avons vu qu'au départ ils ont beaucoup de distance vis à vis du logiciel, mais nous sommes persuadés aussi que cette période n'est pas durable, c'est pourquoi il faut la mettre à profit.

Nous avons vu aussi que l'outil peut induire des représentations fausses, sur lesquelles il est indispensable de travailler avant qu'elles ne soient ancrées.

Interdire les outils de calcul formel nous semble aussi absurde qu'interdire par exemple les traitements de textes dans l'enseignement du secrétariat, mais il est urgent de décider comment nous allons essayer de résoudre les problèmes que posera leur généralisation.

Quels changements cela suppose-t-il pour les programmes ? Quels sont les exercices qui restent intéressants, et par quoi remplacerons-nous les autres ?

Quels seront les exercices faciles, difficiles des contrôles ? Pour les devoirs et les examens, faudra-t-il une partie avec calculatrice et une partie sans ? Comment faire tant que certains lycéens disposeront d'outils de calcul formel et d'autres pas ?

Quel apprentissage faut-il pour ces outils ?

Une démonstration peut-elle être validée lorsqu'on a utilisé un logiciel pour une partie des calculs ? Si oui, à quelles conditions ?

Comment éviter l'attrait de la facilité et convaincre les élèves qu'il faut connaître les techniques de calcul pour maîtriser l'utilisation de l'outil ?

Voici quelques-unes des questions qui se posent à nous.

En y répondant, nous aurons sûrement l'occasion de rappeler que même lorsqu'on dispose de puissants logiciels, l'activité mathématique ne change pas fondamentalement.

Cela nous permettra aussi de redéfinir le rôle irremplaçable des mathématiques dans la formation de tous, à l'époque où cela semble une mode de le contester.

RÉFÉRENCES

[1] Pascal CHANTRIAUX : "Introduction progressive en Première de la dérivation et de ses applications avec l'aide du logiciel GRAPHE", *Bulletin APMEP*, nº 391.

[2] Michèle ARTIGUE : "Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques", *Repères IREM* nº 19 et *Actes de l'université d'été* "Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques", Caen 1994.

[3] Luc TROUCHE : "Analyse et outil graphique au lycée", *Actes de l'université d'été*, Caen 1994.

[4] Luc TROUCHE : "Eppur, si muove...", *Repères IREM* nº 20.

[5] Jean François CANET : "Un exemple d'utilisation d'un système de mathématiques symboliques", *Actes de l'université d'été*, Caen 1994.

[6] Gilles ALDON : "DERIVE à disposition", *Actes de l'université d'été*, Caen 1994.

[7] B. KUTZLER : "DERIV(E)-ons vers le futur de l'enseignement des mathématiques", *Actes de l'université d'été*, Caen 1994.

ANNEXE 1

Fiches d'activité

Quelques explications pour le lecteur qui n'a pas encore utilisé le logiciel DERIVE :

Ce logiciel est conçu comme "assistant en mathématiques". Il peut faire du calcul numérique exact ou approché, du calcul formel et des représentations graphiques. Il réalise rapidement beaucoup de calculs qui seraient fastidieux à la main. Son apprentissage est facile et assez naturel. Il suffit d'essayer.

Lorsqu'on lance DERIVE, on obtient un écran dont la partie inférieure comporte les deux lignes :

COMMANDE :
Auteur Bâtis Calcul Déclare dévEloppe Factor. aIde saUte résoL cHoix
Options graPh Quitte suppRime Simplifie Transfert mouV feNêtre approX

Chacune de ces commandes s'exécute en tapant celle de ses lettres qui est donnée en majuscule.

Certaines sont alors suivies de questions permettant de préciser vos choix.

Exemples :

A pour *Auteur* permet d'introduire une expression.

Par exemple, la frappe de 1/3 + 2/5 (suivi de la touche ENTREE) affiche dans la partie supérieure de l'écran "1 : $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$" ;

f(x) : = (x^2 + 3x – 5)(x – 2) donne "2 : $f(x) := (x^2 + 3x - 5)(x - 2)$" et permet de définir la fonction f.

S pour *Simplifie expression* : #... (numéro à indiquer) donne "3 : $\frac{11}{5}$" si on choisit le numéro 1.

E pour *dévEloppe expression* : #2 donne "4 : "

F pour *Factor. expression* : #2 – Niveau : **D** pour *raDical* donne

" 5 : $(x-2)\left(x-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{3}{2}\right)$ "

C pour *Calcul*, suivi de **D** pour *Dérive expression* : #2 – variable : x – ordre : 1

donne " 6 : $\frac{d}{dx}\left(F(x) := (x^2 + 3x - 5)(x - 2)\right)$"

et **S** pour *Simplifie expression* : #6 donne "7 : $3x^2 + 2x - 11$"

Voici donc les fiches proposées aux élèves :

DERIVE I - Polynômes

DERIVE I Polynomes

Vous vous rappelez l'exercice :

a) Résoudre l'équation $x^5 + x^3 - 2x = 0$.
b) Factoriser le polynôme $x^5 + x^3 - 2x$.
c) Résoudre l'inéquation $\dfrac{x^5 + x^3 - 2x}{x^2 + 3x - 10} \geq 0$.

Question 1

Avec DERIVE entrer l'expression **Auteur** : $x^5 + x^3 - 2x$ (#1).
Appliquer **Factor** #1 **Trivial** puis recommencer avec **Rationnel** et avec **raDical.**
(Pour comprendre la différence entre *Rationnel* et *raDical*, tester x2 – 2)
Appliquer **resoL** #1. Pourquoi DERIVE donne-t-il 5 solutions ?
Entrer l'expression **Auteur** : $x^2 + 3x - 10$ (#n).
Entrer #1/#n >= 0.
Appliquer **resoL**. La réponse est-elle tout à fait exacte ?

Question 2

Avec DERIVE résoudre les équations $12x^3 + 28x^2 + 7x - 12 = 0$ et $3x^3 + 14x^2 + 30x + 25 = 0$ dans l'ensemble des nombres *réels*.
Factoriser $12x^3 + 28x^2 + 7x - 12$ et $3x^3 + 14x^2 + 30x + 25$ dans l'ensemble des *réels*.
Résoudre $4x^3 + 7x^2 - 9x - 10 = 0$.
Résoudre $x^4 - 10x^3 + 5x^2 - 10x - 6 = 0$ (Patience !)

Question 3

a) Essayer de faire résoudre à DERIVE : $x^5 + x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$. Que pensez-vous de cette réponse ?
Faire la représentation graphique de $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 + 4x - 1$ avec **graPh.**
Essayer différents **Zooms**... ou différentes **Echelles.**
Quelle est votre conjecture sur le nombre de solutions réelles de $f(x) = 0$?
Prendre **Option Précision Approximation** et reprendre la résolution de $f(x) = 0$.
DERIVE vous propose une solution. Notons la α. Calculer $f(\alpha)$. Que peut-on en conclure ?
Avez-vous une certitude quant au nombre de solutions réelles de $f(x) = 0$? (Pour la fin du suspense, rendez-vous au chapître "étude de fonctions"...)
b) Revenir à **Option Précision Exact.**
Essayer de faire résoudre à DERIVE : $12x^5 - 45x^4 - 40x^3 + 60x^2 + 60x + 12 = 0$.
Faire la représentation graphique de $g(x) = 12x^5 - 45x^4 - 40x^3 + 60x^2 + 60x + 12$.
Essayer différentes échelles...
Quelle est votre conjecture sur le nombre de solutions réelles de $g(x) = 0$? Avez-vous une certitude ?
Donner des valeurs approchées de *toutes* les solutions de cette équation.

DERIVE II - Suites

Vous vous rappelez les deux exercices :

Suite "$u_n = f(n)$"

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = 6 + \dfrac{1}{n+1}$.

1) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.
2) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3) Cette suite est-elle majorée ? Minorée ? Bornée ? (Justifier...)
4) Est-ce que $6 + 10^{-6}$ est un minorant de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Suite "$u_{n+1} = f(u_n)$"

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$ pour tout n = $\in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer la valeur exacte de u_2 et de u_3.
2) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3) Cette suite est-elle majorée ? Minorée ? Bornée ? (Justifier...)
4) On définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $t_n = \dfrac{1}{u_n}$.
 a) Prouver que $t_{n+1} = t_n + 1$.
 b) En déduire la valeur de t_{1000} et celle de u_{1000}.

Question 1

Avec DERIVE, entrer l'expression **Auteur :**
v : = VECTEUR (6 + 1/(n + 1), n, 0, 10) (qui signifie liste des valeurs de 6 + 1/(n + 1) pour n allant de 0 à 10)
Choisir **Simplifie.** Choisir **approX**.
Entrer u(n) : = 6 + 1/(n + 1) puis u(n + 1) – u(n).
Choisir **Simplifie**. Que peut-on en conclure ?
Entrer u(n) >= 6 + 10^(–6) puis choisir **resoL**. Que peut-on en conclure ?
Résoudre avec DERIVE les inéquations u(n) >= 6 et u(n) <= 7. Conclure

Question 2 (voir note (1))

Entrer l'expression **Auteur** :
ITERATION (u/(u + 1), u, 1, 10) (qui signifie : en partant de u = 1, remplacer 10 fois u par u/(u + 1) et donner la liste des valeurs successives de u)
Choisir **Simplifie.**
Essayer ITERE(u/(u + 1), u, 1, 10) puis **Simplifie.**
Comment peut-on, avec DERIVE, calculer u_{1000} de l'exercice rappelé plus haut ?
Entrer u(n) := ITERE (v/(v + 1),v,1,n-1) (dans le deuxième membre on ne peut pas utiliser ici le même nom de variable que pour la fonction du 1^er membre) Entrer t(n) := 1/u(n) puis t(1000) et **Simplifie**...
Essayer u(n) < 1 puis **resoL**

(1) Après chaque question, exécuter la commande : **Transfert, Effface**

DERIVE I Suites

Question 3

Avec DERIVE, calculer les 10 premiers termes de la suite $u_n = 3 - \frac{1}{n^2}$ définie pour $n \geq 1$, en valeurs exactes, puis en valeurs approchées.
Etudier le sens de variation de la suite.
$3 - 10^{-6}$ est-il un majorant de la suite ?
Trouver un majorant et un minorant de la suite.

Question 4

Avec DERIVE, calculer des valeurs exactes et approchées des 12 premiers termes de la suite définie par $u_0 = 2$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est-elle monotone ?
Calculer u_{100} sans DERIVE puis vérifier avec le logiciel.

Question 5

Avec DERIVE, calculer des valeurs exactes et approchées des 12 premiers termes de la suite définie par $u_0 = 2$ et par la relation de récurrence :

$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sans DERIVE, prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

ACTIVITE 1

ACTIVITÉ 1

1) Avec DERIVE, définir l'expression Auteur : $5x^3 + 4x^2 - 3x + 5$.
Ensuite, choisir successivement :
Calcul, **Derive,** expression : #... , variable : x, ordre : 1.
Le logiciel affiche $\frac{d}{dx}(5x^3 + 4x^2 - 3x + 5)$.
Choisir maintenant **Simplifie.**
Nous venons de voir comment DERIVE associe, à une fonction f (dans notre exemple $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 5$), une nouvelle fonction, appelée fonction dérivée de f, et notée f ' (dans notre exemple f '(x) = ?).

2) A l'aide de DERIVE, remplir quelques lignes du tableau suivant, en choisissant quelques fonctions polynômes f :

f(x)	f'(x)

ACTIVITE 1

3) Faire une conjecture quant à la façon de calculer la fonction dérivée d'une fonction polynôme.

Vérifier cette conjecture avec quelques exemples.

COURS

Nous admettons pour le moment (et nous verrons une façon de le prouver plus tard) qu'à toute fonction polynôme f, on peut associer une nouvelle fonction, appelée fonction dérivée de f et notée f ', de la manière suivante :

Si $f(x) = x^n$, *alors* $f'(x) = nx^{n-1}$;

Si f est une fonction polynôme et k une constante réelle, alors $(k\,f)' = k\,f\,'$;

Si f et g sont deux fonctions polynômes, alors $(f + g)' = f\,' + g'$.

EXERCICES

Sans DERIVE, calcul de dérivées de fonctions polynômes.

ACTIVITÉ 2

ACTIVITE 2

1) On donne $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$.
Calculer $f\,'(x)$.

2) A l'aide de DERIVE, représenter les fonctions *f* et *f '*.

Comparer le sens de variation de *f* et le signe de *f '*. Enoncer une conjecture.

3) Vérifier la conjecture précédente avec quelques autres fonctions polynômes *f*.

COURS

Soit f une fonction admettant une fonction dérivée f '.

Nous admettrons que sur tout intervalle où f ' est positive (respectivement strictement positive, négative, strictement négative, nulle) la fonction f est croissante (respectivement strictement croissante, décroissante, strictement décroissante, constante).

EXERCICES

Sans DERIVE, étude des variations de quelques fonctions polynômes de degrés deux ou trois.

ACTIVITÉ 3

1) Compléter les tableaux suivants (on pourra éventuellement utiliser DERIVE pour faire certains calculs) :

P	u	v	$10u$	$u+v$	$u \times v$
Forme développée de P(x)	x^3+4x^2-5x+3	x^2+4x-1			
$P'(x)$					

P	u'	v'	$10u'$	$u'+v'$	$u' \times v'$
Forme développée de Q(x)					

Que peut-on en conclure pour la dérivée d'un produit ?

2) Avec DERIVE , choisir **Déclare Fonction** : nom : u ; valeur : ne rien mettre ; variable : x.

On obtient u(x) : = .

Déclarer de même une fonction v .
Donner l'expression **Auteur :** u(x) · v(x), puis **Calcul, Derive :** expression : # précédent,
variable : x, ordre : 1. Puis choisir **Simplifie.**
Noter la formule fournie par le logiciel pour : (u × v)' =...
Tester cette formule avec les fonctions u et v de la question 1) et avec quelques autres fonctions polynômes.

3) En procédant comme au 2), écrire les formules données par le logiciel pour : $\left(\frac{1}{v}\right)'$ =... et : $\left(\frac{u}{v}\right)'$ =... (Nous admettrons que, si deux fonctions u et v ont des dérivées sur un intervalle où v ne s'annule pas, on peut aussi dériver le quotient $\left(\frac{u}{v}\right)$)

Compléter le tableau suivant, où la première ligne donne une fonction *f* et la deuxième l'image *f(x)* :

u	v	$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)'$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u'}{v'}$
$x^3+x^2-7x-15$	x^2+4x+5	(simplifier)	(simplifier)		

ACTIVITE 3

COURS

– On admet que la somme et le produit de deux fonctions dérivables u et v sont dérivables et que l'inverse d'une fonction v dérivable sur un intervalle où elle ne s'annule pas est dérivable ;
par conséquent le quotient de deux fonctions dérivables u et v - sur un intervalle où v ne s'annule pas - est dérivable.
– Tableau (résultats admis pour le moment, nous en justifierons quelques-uns plus tard) donnant les formules de dérivation des sommes, des produits, des inverses, des quotients...
– Théorème de la bijection (admis).

EXERCICES

– Calcul, sans DERIVE, de dérivées de fonctions rationnelles diverses.
– Etudes de fonctions rationnelles simples.
(On pourra se servir de DERIVE *pour vérifier, mais toutes les étapes des calculs et des raisonnements devront être indiquées par écrit.)*
– Représentations graphiques de fonctions ; apprentissage de la programmation de la calculatrice.
– Problèmes modélisés à l'aide de fonctions rationnelles et équations f(x) = m.

ACTIVITE 4

ACTIVITÉ 4

1) **On donne** $f(x) = x_3 + 2x_2 - x - 2$ **.**
Déclarer cette fonction et la représenter graphiquement avec DERIVE.
On appelle sa courbe *C*.

2) **a) Etant donnés deux réels distincts *a* et *b*, on appelle A et B les points de *C* d'abscisses respectives *a* et *b*. Quelles sont les coordonnées de A et de B ?**
b) Expliquer pourquoi $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ est l'équation d'une droite. Prouver que cette droite passe par les points A et B.
Déclarer la fonction g de valeur : (f(b) – f(a))/(b – a) (x – a) + f(a).
Quelle est la courbe d'équation *y = g(x, a, b)* lorsque *a* et *b* sont fixés ?
c) Placer sur le graphique les points A_0 et B_0 de *C* d'abscisses respectives –1,3 et +0,9 puis la droite (A_0 B_0).
d) Conclure : à quoi sert la fonction g ?

3) Calculer *f '(x)* et *f '(a)*.
Déclarer la fonction h de valeur : "expression de *f '(a)*" (x – a) + f(a).
Placer sur le graphique la droite d'équation *y = h (x, –1.3)*. Faire une conjecture : que représente cette droite pour *C* ?

ACTIVITE 4

4) a) *Pour un point A de C fixé, on veut construire une droite (AB) avec un point B de la courbe très proche de A et calculer une valeur approchée du coefficient directeur de cette droite.*
Pour cela on fixe un nombre *a* dans l'intervalle [−2,2 ; +1,2].
Placer sur le graphique le point A*(a, f(a))*. Choisir une valeur b telle que le point B*(b, f(b))* soit très proche de A. Placer le point B et la droite (AB) sur la figure.
Le segment [AB] doit être quasiment confondu avec la portion de *C* située entre A et B.
Vérifier en faisant un zoom vous permettant de distinguer le segment [AB].
Si [AB] et *C* ne sont pas assez proches, recommencer avec un point B plus rapproché de A.

b)Pour le point B retenu au a), calculer une équation de (AB) (commande **dévEloppe**...) et une valeur approchée de son coefficient directeur (commande **approX**...).

c) Placer sur le graphique la droite T d'équation *y = h(x, a)*. Revenir à l'échelle de départ.
Calculer une valeur approchée du coefficient directeur de T. Que remarque-t-on ?

5) **Rédiger une conclusion en formulant une conjecture.**

6) a) Avec la valeur de *a* choisie au 4)a), on veut déterminer en fonction de *b* les abscisses des points d'intersection de la droite (AB) et de la courbe *C*.
Quelles sont les solutions évidentes ? Résoudre le problème avec DERIVE. Ecrire les solutions le plus simplement possible.
Dans la question 4)a), combien y a-t-il de points communs entre la droite (AB) tracée et *C* ?

b) Déterminer les valeurs de *b* pour lesquelles (AB) et *C* ont un point d'intersection double.
Refaire un graphique avec la courbe *C* et la droite T, chacune des droites précédentes et ses points d'intersection avec *C*. Que représentent ces droites pour *C* ?

Quelques commandes de DERIVE qui pourront vous servir :

Dans la fenêtre graPhique :

– On peut **déplacer la croix du graphique** à gauche ou à droite avec → ou ←, éventuellement associées à la touche CTRL pour aller plus vite, ou en hauteur avec ↑ ou ↓.
– On peut **centrer le graphique sur la croix** avec la commande **Centre.**
– Lorsqu'on a donné l'expression **Auteur** : [x,y], **graPh** place le **point de coordonnées (x,y).**

Dans la fenêtre Algèbre :

– **Déclare Fonction** nom :... ; valeur :... permet de définir une fonction.

– **cHoix Substitue** expression : #... ; valeur :... permet de remplacer dans l'expression choisie une lettre par une autre ou par un nombre (en effectuant le remplacement dans la ligne d'édition).

RÉSUMÉ DES OBSERVATIONS

Dans l'exemple étudié, nous avons conjecturé que la sécante (AB) de la courbe de f admet une position limite lorsque B "tend vers" A, que f '(a) est le coefficient directeur de cette droite "limite" qui a donc pour équation y = f '(a) (x – a) + f(a).
Il semble aussi que cette droite est en quelque sorte "la plus proche" de la courbe de f autour du point A. Elle correspond à notre notion intuitive de tangente.

(AB) ayant comme coefficient directeur $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, *la notion de position limite de la sécante se traduit intuitivement par* $f'(a)=\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

COURS

– Définition : f est une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I.

Nous dirons que ***f est dérivable en a*** *lorsque* $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *a une limite réelle lorsque x tend vers a. La limite précédente est alors appelée* ***nombre dérivé de f en a*** *et notée f '(a).*

On a donc $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

- Théorème et définition :

Si f est dérivable en a, alors $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ *où* $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.

Réciproquement, si $f(x) = f(a) + k(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ *où k est une constante réelle et* $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$, *alors f est dérivable en a et f '(a) = k.*

L'écriture $f(x) = f(a) + k(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ *est appelée* ***développement limité à l'ordre 1*** *de f en a.*

– Définition : f est une fonction définie sur un intervalle I, a un élément de I et C a courbe représentant f dans un repère.

Si f est dérivable en a, on appelle ***tangente*** *à C en A(a, f(a)), la droite passant par A et de coefficient directeur f '(a).*

– Equation de la tangente ; lecture à partir du développement limité.

– Définition : Lorsque f est dérivable en tout point d'un intervalle I, on dit que ***f est***

__dérivable sur I__ et la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé f '(x) est appelée __fonction dérivée de f__ (et notée f ').

Nous admettrons que ces définitions permettent de prouver toutes les formules de dérivation que nous avons admises jusqu'ici.

– Pour vérifier, calcul de quelques nombres dérivés (fonction carré, inverse...) à partir de la définition précédente et comparaison avec les formules admises auparavant.

– Justification de la formule de dérivation d'un produit de fonctions dérivables à partir des développements limités.

– Lien entre extremum et dérivée.

ACTIVITE 4

EXERCICES SANS DERIVE

– Etudes et représentations graphiques de fonctions rationnelles ; construction de tangentes.

– Recherche de tangentes ayant certaines propriétés.

– Recherche de fonctions avec contraintes sur f et sur f '.

– "Lecture" de certains nombres dérivés et équations de tangentes à partir de développements limités.

ACTIVITÉ 5

ACTIVITE 5

On rappelle que si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *a une limite réelle lorsque* x tend vers a, alors f est dérivable en a et $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

1) On choisit $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Avec le logiciel DERIVE :

– Définir l'expression $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

– Simplifier cette expression .

– Calculer $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

b) Conclure :

– Pour quelles valeurs de a l'expression $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a-t-elle une limite réelle ?

ACTIVITE 5

– Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est-elle dérivable ?

– Quelle est l'expression de $f'(x)$?

c) Vérifier que le logiciel donne la même fonction dérivée pour f.

2) Prouver les formules de dérivation des fonctions $g(x) = x^3$ et $h(x) = x^4$ en utilisant la définition du nombre dérivé.

3) En utilisant la définition du nombre dérivé et le logiciel, faire une conjecture sur la fonction dérivée de $f(x) = \sin(x)$.

4) Même question avec $f(x) = \cos(x)$.

5) Même question avec $f(x) = \tan(x)$.

Comparer avec le résultat obtenu à partir de la dérivée du quotient $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et des conjectures des questions 3) et 4).

6) a) Chercher les dérivées données par le logiciel pour les fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt{5x-3}$; $g(x) = \cos(4x + \frac{\pi}{3})$: $h(x) = (-3x + 7)^5$.

b) Faire une conjecture sur les dérivées des fonctions :
$f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$; $g(x) = \cos(\alpha x + \beta)$: $h(x) = (\alpha x + \beta)^n$;
$v : x \mapsto u(\alpha x + \beta)$ où u est une fonction dérivable, α et β des constantes réelles et n un entier.

Quelques fonctions de DERIVE qui pourront vous servir :

– $\lim\limits_{x \to a} u(x)$ s'écrit LIM(u, x, a).

– $u'(x)$ s'écrit DIF(u, x).

COURS

– *Compléments sur les calculs de dérivées : tableau des dérivées de* $\sin(x)$, $\cos(x)$ *(admises),* $\tan(x)$, $\sqrt{x}$.

– *Dérivée de* $x \mapsto u(\alpha x + \beta)$.

– *Etude des fonctions circulaires ; équations* $\sin x = a$ *et* $\cos x = a$.

EXERCICES

– *Etudes de fonctions non rationnelles, en particulier trigonométriques.*

– *Problèmes conduisant à l'étude de fonctions trigonométriques.*

APPLICATIONS DES DÉRIVÉES - TP1

TP 1

1) a) On donne $f_a(x) = x^4 + ax^3 - 5x^2 + 3x + 10$.
A l'aide des options **cHoix Substitue** expression : #1, valeur x, valeur (...) du logiciel DERIVE, donner différentes valeurs à a et tracer les représentations graphiques des fonctions f correspondantes. (Choisir une Echelle graphique convenable)
Donner deux types de tableaux de variations observés. Donner les tableaux de signes des fonctions dérivées associées.

b) Toujours à l'aide de DERIVE, trouver deux fonctions polynômes de degré 4 ayant un autre type de tableau de variation que ceux observés au a).

Le but de la suite du TP est de trouver tous les types de tableaux de variations possibles pour les fonctions polynômes de degré 4.

2) On donne $f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 7x - 11$. Peut-on déterminer $f(x)$?

3) a) Voici le tableau de **signes** d'une fonction polynôme de degré 3 :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
P(x)		+	0	−	0	+	0	−	

Donner un exemple de fonction P – avec x_1, x_2, x_3 entiers – correspondant à ce tableau de signes.

b) Donner toutes les autres formes de tableaux de signes possibles pour les fonctions polynômes de degré 3 et donner un exemple de fonction correspondant à chaque tableau.

4) En déduire toutes les formes de tableaux de **variation** possibles pour les fonctions polynômes de degré 4.
Pour chaque type de tableau de variation, donner un exemple de fonction correspondante et l'allure de la courbe représentative de la fonction.

APPLICATIONS DES DÉRIVÉES - TP2

TP 2

A - Compléments de la fiche "DERIVE 1"

On donne $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 + 4x - 1$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) *On rappelle que tout polynôme non constant se factorise dans l'ensemble ℝ des nombres réels en un produit de polynômes de degrés 1 ou 2.*

a) A l'aide du logiciel DERIVE, résoudre l'équation $f'(x) = 0$ (... patience !) puis chercher des valeurs approchées des solutions obtenues.

TP 2

b) Expliquer pourquoi une factorisation de $f'(x)$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$? ne peut pas contenir de polynôme de degré 1.
c) En déduire la nature de la factorisation maximale de $f'(x)$ dans $\mathbb{R}$.
d) Expliquer pourquoi $f'(x)$ a un signe constant pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$. Quel est ce signe ?

3) Donner le tableau de variations de *f*.
Prouver que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée de cette solution à l'aide de DERIVE.

(On peut éventuellement compléter avec :

4) Une autre façon d'étudier les vatiations de *f*

a) On note f'' la fonction dérivée de f' et $f^{(3)}$ la fonction dérivée de f''. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$.
b) Etudier les variations et le signe de f'', puis de f'.
c) Conclure en donnant les variations de *f*.)

B - Compléments du TP1

1) On donne $f_{-3}(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 10$.
Etudier la fonction f_{-3} et établir son tableau de variations.
Construire soigneusement, sur papier, sa courbe C_{-3} (voir note (1)), ainsi que ses tangentes horizontales, dans un repère où 2 cm représentent 1 unité sur l'axe des abscisse et 10 unités sur l'axe des ordonnées. (Prévoir des graduations de –5 à +5 sur l'axe des abscisses et de –50 à +30 sur l'axe des ordonnées).

2) On donne $f_2(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x + 10$.
Etudier la fonction f_2 et établir son tableau de variations. (On pourra se servir du logiciel DERIVE pour factoriser la dérivée f_2'.)
Construire sa courbe C_2 sur la même figure que C_{-3}. Marquer les points de C_2 correspondant à un maximum ou à un minimum de f_2.

3) On donne $f_3(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x + 10$.
Calculer . Avec l'aide du logiciel DERIVE, déterminer les racines de puis justifier que $f_3'(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$ où le trinôme $(ax^2 + bx + c)$ n'a pas de racine réelle.
En déduire le tableau de variations de f_3 (en utilisant x_0). Donner une valeur approchée de x_0 et de $f_3(x_0)$. (Utiliser DERIVE et penser à **cHoix Substitue...**)
Construire la courbe C_3 avec sa tangente horizontale sur la même figure que C_{-3} et C_2.

(1) Pour calculer des coordonnées de points de la courbe, programmer la calculatrice ou taper l'expression **Auteur** de DERIVE : **VECTOR ([x , f(x)] , x , a , b , pas)** où a et b désignent les bornes de l'intervalle de calcul et bien sûr " pas " la distance entre deux valeurs de x.
La commande approX... donne des valeurs approchées des couples [x , f(x)] . Si on demande moins de 12 valeurs à la fois, l'affichage se fait en tableau vertical, plus clair que l'affichage en ligne.

ANNEXE 2 : QUESTIONNAIRE ET STATISTIQUES SUR LES RÉSULTATS

Page 1 du questionnaire et répartition des réponses en pourcentages :

1 – As-tu un ordinateur à la maison ?

Oui	Non	NR
S2 : 76,5	23,5	0,0
S3 : 50,0	50,0	0,0

– Si oui, quel modèle ? ....

2 – Si oui, as-tu le logiciel DERIVE ?

S2 : 64,7	11,8	23,5
S3 : 7,7	42,3	50,0

– Quel modèle de calculatrice as-tu ? ....

3 - Sais-tu programmer ta calculatrice pour calculer u_{100} lorsque la suite (u_n) est définie par récurrence ?

S2 : 58,8	35,3	5,9
S3 : 30,8	61,5	7,7

4 – Trouves-tu difficile de programmer la calculatrice ?

S2 : 11,8	70,6	17,6
S3 : 69,2	26,9	3,8

5 – As-tu trouvé difficile d'apprendre à te servir du logiciel DERIVE ?

S2 : 5,9	94,1	0,0
S3 : 3,8	96,2	0,0

– Donne un exemple de difficulté d'apprentissage : ....
– Que demanderais-tu d'améliorer aux concepteurs de ce logiciel ? ....

6 – Est-ce que certains problèmes de math t'ont semblé plus agréables à traiter avec DERIVE ?

S2 : 94,1	5,9	0,0
S3 : 84,6	7,7	7,7

– Donne un exemple de ce cas : ....

– Est-ce que ça te gêne plus ou moins de faire des erreurs en cours de math avec DERIVE ou sans ? ....

– Pourquoi ? ....

– Que t'a permis de faire DERIVE que tu n'aurais pas pu faire autrement ? (Donne des exemples) ....

– A part l'utilisation du logiciel et les calculs de dérivées, qu'as-tu découvert de plus avec DERIVE ? ....

7 – Aimerais-tu avoir DERIVE sur ta calculatrice ?

S3 : 92,3	0,0	7,7

– Pourquoi ? ....

8 – Si tu disposais de tous les outils nécessaires, préférerais-tu étudier une fonction à la main, avec l'aide de ta calculatrice ou avec l'aide de DERIVE ?

Main	Calc.	DER	NR
S2 :11,8	29,4	58,8	0,0
S3 : 15,4	11,5	69,2	3,8

– Pourquoi ? ……………………………………………………………………………………

Remarques :
- la question 7) n'a pas été posée en S2 ;
- dans NR nous avons compté les non-réponses, mais aussi les réponses du type "oui et non"

Page 2, empruntée à peu de choses près à un questionnaire DIDIREM, et répartition des réponses en pourcentages (les questions 2 et 8 n'ont pas été posées en S2)

	Sans opinion	Pas du tout d'accord	Plutôt pas d'accord	Plutôt d'accord	Tout à fait d'accord
1) Avec DERIVE, même si on a des difficultés en algèbre, on peut faire des mathématiques	S2 : 5,9 S3 : 7,7	11,8 0,0	17,6 19,2	58,8 53,8	5,9 19,2
2) (Même sans DERIVE), même si on a des difficultés en algèbre, on peut faire des mathématiques	S3 : 7,7	7,7	34,6	46,2	3,8
3) Avec DERIVE, il n'y a plus besoin d'apprendre à calculer, il le fait à notre place	S2 : 0,0 S3 : 3,8	47,1 30,8	29,4 38,5	11,8 23,1	11,8 3,8
4) Ca ne sert à rien de travailler avec DERIVE, puisqu'aux contrôles et examens, il faut rédiger les calculs et les démonstrations	S2 : 11,8 S3 : 11,5	17,6 19,2	58,8 30,8	11,8 19,2	0,0 19,2
5) DERIVE, ça donne plus envie de faire des mathématiques	S2 : 29,4 S3 : 23,1	0,0 15,4	5,9 15,4	52,9 30,8	11,8 15,4
6) DERIVE, ça aide pour faire des mathématiques	S2 : 5,9 S3 : 11,5	0,0 3,8	11,8 11,5	17,6 42,3	64,7 30,8
7) DERIVE, ça complique plus que ça n'aide pour apprendre les mathématiques	S2 : 5,9 S3 : 19,2	64,7 23,1	23,5 38,5	5,9 15,4	0,0 3,8
8) En général, j'ai des difficultés en mathématiques	S3 : 15,4	11,5	38,5	30,8	3,8

9) Quand DERIVE ne donne pas de réponse, c'est que le problème n'a pas de solution	S2 : 23,5 S3 : 26,9	58,8 30,8	11,8 26,9	5,9 15,4	0,0 0,0
10) Si les données sont rentrées correctement, on peut faire entièrement confiance au résultat donné par DERIVE	S2 : 23,5 S3 : 3,8	11,8 0,0	17,6 11,5	35,3 53,8	11,8 30,8
11) DERIVE, c'est bien pour découvrir des règles de calcul	S2 : 5,9 S3 : 5,7	35,3 19,2	11,8 30,8	41,2 34,6	5,9 7,7

Autres remarques : ....