MATHÉMATIQUES, MYTHE OU RÉALITÉ

Un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique

Marc LEGRAND
Institut J. Fourier Grenoble

DEUXIÈME PARTIE (*)

UN ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES QUI AIT UNE RÉALITÉ SCIENTIFIQUE

1) Pourquoi les mathématiques enseignées à l'école n'ont le plus souvent de réalité que scolaire

Il me semble que les mathématiques du mathématicien sont pour lui de véritables réalités d'idées, car elles sont réponses à des questions qu'il se pose ou qu'il aurait pu se poser ; elles émergent le plus souvent erratiquement comme un élément d'ordre, de clarté et de certitude là où il n'y avait au départ aucun questionnement possible, et où, après réarrangement, apparaissent simultanément des possibilités de régularité et d'ordre et aussi un doute profond sur le degré de généralité de ces régularités. Nos théorèmes ne naissent pas théorèmes, ils sont le plus souvent l'aboutissement d'une suite de conjectures erronées, rectifiées au fur et à mesure que sont levés les doutes sur leur part de fausseté.

Dans nos recherches sur le "débat scientifique en cours de mathématiques", nous sommes partis de l'hypothèse que ce qui "coupe" les mathématiques que nous enseignons classiquement de toute réalité scientifique, c'est qu'elles ne sont le plus souvent l'aboutissement d'aucun projet de l'élève ou de l'étudiant, qu'elles ne sont l'issue rationnelle d'aucune contradiction ressentie comme telle par eux ; les vérités qu'on établit en cours, les théorèmes, ne sont en général pour eux réponses à aucune question qu'ils se posent véritablement ou pourraient se poser.

Dans un contrat didactique classique, où les mathématiques se donnent à voir en suivant la logique interne de l'exposition de cette discipline, logique qui ne correspond le plus souvent ni à une logique de la découverte de résultats nouveaux, ni à une

(*) La première partie de cet article est parue dans le numéro 20 de *Repères*.

logique de découverte du sens de ce qui a déjà été découvert, ces mathématiques que nous proposons frontalement (y compris en grande partie par les exercices et problèmes que nous donnons à résoudre aux élèves sous la forme "démontrez que...") introduisent un ordre et des certitudes là où il n'y avait du point de vue de l'élève rien à ranger et pas le moindre doute.

Le point le plus caricatural de cet aspect de nos enseignements mathématiques concerne à mon sens le point capital, celui de la démonstration.

En effet, que faisons-nous pour donner sens à la preuve particulière du mathématicien : la démonstration ?

* Nous énonçons un théorème dans un temps et un environnement problématique tels que l'élève n'en voit véritablement ni la nécessité ni la portée (ce théorème n'annonce *a priori* rien de bien extraordinaire quand l'élève est immergé dans une mathématique naturaliste qui n'est là que pour numériser ses convictions les plus évidentes ; de façon analogue, ce théorème risque de n'avoir que très peu de signification en termes de résultat et sa consistance mathématique risque d'échapper totalement à un élève immergé malgré lui dans une construction axiomatique et hypothético-déductive dont il ne maîtrise ni les enjeux ni les règles de fonctionnement).

** Ce théorème étant énoncé en tant que tel, *i.e.* en tant que résultat vrai de la théorie mathématique, nous nous engageons dans sa démonstration.

Je prétends alors que (malgré nos efforts de clarté et bien que certains de nos élèves "grattent" tout ce que nous leur disons) cette démonstration qui se déroule à une vitesse et en s'appuyant sur des arguments qui ne sont pas ceux de l'intelligibilité "normale" d'un non professionnel, a d'entrée de jeu perdu pour la quasi totalité de nos interlocuteurs l'essentiel de sa fonction scientifique (il y a très peu de chances pour que ce que nous faisons soit lu par nos élèves ou nos étudiants comme un acte proprement scientifique).

Pourquoi notre démonstration a-t-elle peu de chances d'être lue par nos interlocuteurs comme un acte scientifique ?

* tout d'abord, comme par définition un théorème de la théorie mathématique ne peut être faux, et que la logique de l'exposition nous a contraints à nommer l'énoncé que nous allons démontrer théorème, il devient alors "absurde", dans la logique de quelqu'un qui n'est pas entré dans une culture scientifique, de chercher à prouver qu'il est vrai, *i.e.* chercher à se persuader qu'il n'est pas faux !

Dans la logique de nos apprentis scientifiques, la démonstration que nous effectuons ne peut donc avoir la fonction scientifique de débusquer l'erreur, puisque ce que nous prouvons est institutionnellement déclaré vrai dès le départ !

** ensuite, on pourrait donner à cette démonstration la fonction scientifique de nous éclairer sur la raison des choses, mais pour cela encore :

– il faudrait d'abord qu'il y ait quelque chose à éclairer ; or, dans une mathématique naturaliste, il risque de ne rien y avoir à éclairer puisque l'énoncé est déjà considéré comme évident dans son énonciation, et à l'inverse dans un cours très "mathématique", trop dense et trop rapide pour notre interlocuteur, il ne servira le plus souvent à rien de chercher à donner des éclaircissements sur les raisons des choses, car les "choses" elles-mêmes ne seront pas suffisamment visibles pour lui. (Opacité du sens des résultats très peu problématisés et / ou présentés dans un langage formel, directement pensés pour la généralité)

– il faudrait ensuite pour que notre démonstration puisse éclairer et / ou convaincre, que les chaînons démonstratifs et la logique de leur agencement ne soient pas eux-mêmes partiellement ou totalement plus opaques pour notre interlocuteur que le résultat lui-même.

Si trop souvent la démonstration que nous effectuons ne peut, pour les raisons précédentes, remplir auprès de nos interlocuteurs les fonctions scientifiques de les éclairer sur les raisons de résultats qui ont déjà du sens et de les convaincre rationnellement de la vérité non évidente de ces résultats, alors cette démonstration n'a pour nos interlocuteurs élèves ou étudiants de réalité que scolaire.

En effet pour la plupart d'entre eux cette démonstration devient principalement un exercice de style réservé au professeur, exercice qui dans son brio leur permet de "jauger" la valeur scientifique de leur maître ("celui-là, il est fort ! il démontre tout sans se servir de ses notes !", "celui-là, par contre, il se plante régulièrement !") mais qui, pour ce qui les concerne en propre, est essentiellement une grimace qu'ils doivent être capables de faire dans certaines circonstances en respectant des canons : une démonstration doit comporter des hypothèses, des formules, des théorèmes, des équivalences et une conclusion, etc.

2) Principes et fondement d'un changement de regard sur la réalité de l'enseignement scientifique

Principe de base : nécessité de la communauté scientifique classe ou amphi

Si l'on veut que les mathématiques que nous enseignons à l'école prennent une réalité scientifique auprès de nos interlocuteurs élèves ou étudiants, il faut que nous réinstaurions en classe les raisons de la pensée scientifique : les questionnements, le doute, la volonté de réduire ce doute et d'arriver à des communautés de points de vue, non par l'autorité, la force ou les trucages, mais par les éléments de la raison raisonnable, i.e. parce que les arguments produits nous éclairent, nous convainquent, emportent notre adhésion sans chercher à nous tromper en masquant les difficultés ; en clair, il faut que le groupe classe ou amphi puisse, au moins à certains moments, fonctionner comme une communauté scientifique.

Se pose immédiatement la question du réalisme de ce principe didactiquement paradoxal.

Tenant compte de la culture dominante de nos interlocuteurs (*i.e.* l'absence quasi générale d'une réelle culture scientifique), ce premier principe nous conduit à en poser un second.

Principe de nécessité de confrontation entre différents domaines de réalité

Tout enseignement des mathématiques qui ne s'adresse pas à des professionnels purs et durs de cette discipline (pratiquement tous les enseignements jusqu'en maîtrise ou DEA de mathématiques) nécessite, pour garder une réalité scientifique auprès des élèves ou des étudiants, une part importante de confrontations entre les raisons de la théorie et les questions que pose la pratique de cette théorie dans d'autres domaines de réalité.

En d'autres termes, si une conjecture mathématique apparaît aux élèves comme vraie, elle ne doit pas pouvoir se transformer en une aberration, conduire à un raisonnement absurde susceptible de provoquer des catastrophes, lors de son utilisation dans d'autres domaines de réalité ; et si un développement théorique demande pour être maîtrisé un gros investissement intellectuel, cela doit simultanément pouvoir se traduire en termes de nouvel éclairage particulièrement précieux apporté sur d'autres domaines de réalité.

Et si dans certains cas il s'avère impossible, même à un niveau métaphorique, de trouver des correspondances convenables entre objets ou faits mathématiques et objets ou faits pris dans d'autres domaines de réalité, cela doit donner lieu à une discussion spécifique qui permettra de préciser la nature particulière de certains objets théoriques, la valeur particulière qu'il faut attribuer à certaines affirmations (notamment celles du type "il existe...").

On fait ici le pari que par cette confrontation (et non confusion) entre vérité mathématique et utilité de l'éclairage théorique sur des problèmes pratiques, nos interlocuteurs initialement très éloignés d'une culture scientifique pourront se rapprocher de nos problématiques parce qu'ils y trouveront enfin un moyen de satisfaire leur besoin de cohérence globale (besoin qui s'exprime souvent par les questions du type "à quoi ça sert ?", questions souvent jugées "impertinentes" par nous, professeurs, parce que nous ne pouvons y répondre localement, mais qui, dans des dispositifs didactiques où le besoin de cohérence globale de l'individu est explicitement pris en compte, peuvent s'interpréter comme des appels à un approfondissement théorique).

Mais pour cela, il faut que ces "personnes globales" que sont nos élèves et nos étudiants puissent se faire régulièrement la preuve que la théorie développée en cours (dont leur culture initiale nie l'efficacité) n'est pas une fuite en avant devant la difficulté des réalisations concrètes, mais au contraire un moyen de mise à l'écart momentanée des réalités pragmatiques trop prégnantes, afin de pouvoir mieux comprendre de quelle réalité il s'agit exactement.

Il faut donc que, dans certains cas au moins (expérience cruciale), nos interlocuteurs puissent sentir l'exigence théorique naître de l'étude objective de situations très familières pour eux au niveau de leurs effets externes, mais dont ils ne connaissent pas les raisons ou pour lesquelles ils possèdent de mauvaises explications.

Pour un grand nombre de concepts mathématiques, il est possible (*cf.* les exemples proposés en troisième partie) de trouver des situations où l'élève peut s'engager dans une construction franchement mathématicienne si on ne le dirige pas tout de suite vers les formules et résultats *ad hoc* qui lui éviteront de se poser les questions : "comment expliquer, maîtriser, vérifier, écrire, calculer ce que je pense intuitivement et qui ne correspond à aucun savoir précis qui m'ait été enseigné auparavant ?".

Il faut alors que par ces expériences

cruciales, les élèves ou les étudiants découvrent à la fois les aptitudes de l'homme à s'engager dans un mouvement théorique pour résoudre les problèmes qui se présentent à lui souvent de façon très pratique et le bonheur qu'il éprouve lorsqu'il devient capable en partie par lui-même de se construire les outils théoriques de la compréhension et de l'explication ; à terme, ces expériences doivent leur permettre de "palper" l'efficacité de cette prise de distance, de cette mise à l'écart des évidences concrètes, en constatant que ce détour théorique les aide effectivement à mieux penser, comprendre, maîtriser des réalités de vie qui les intéressent, bien que leur principe de fonctionnement leur ait échappé jusqu'à ce jour. (A un moment, il doit se produire une sorte d'inversion des rôles : le jeu théorique de la compréhension et de l'explication doit devenir pour nos interlocuteurs plus captivant, plus épanouissant, que l'obtention de la solution dont la recherche avait initié le jeu.)

En clair, on fait l'hypothèse que le besoin de construction théorique et de validation interne de la théorie – qui caractérise la pensée mathématicienne – n'étant pas pour la plupart des personnes un besoin inné (alors que nos exclamations : "soyez rigoureux !" ont implicitement l'air d'affirmer que cette attitude devrait être naturelle), il ne peut devenir une nécessité chez bon nombre de nos élèves ou de nos étudiants que si, au moins à certains moments cruciaux, la théorie mathématique émerge et fait ses preuves dans des domaines externes aux mathématiques.

Par exemple, pour beaucoup d'étudiants, je constate que ce n'est que lorsque la compréhension plus profonde de l'intégrale se traduit par un meilleur éclairage sur des problèmes de physique, leur permet de mieux comprendre les difficultés qu'ils rencontrent dans la mise en équation infinitésimale de certains problèmes pratiques, qu'il devient normal, légitime, nécessaire pour eux aussi d'aller regarder "comment cette intégrale-là est construite", pourquoi il faut pour l'obtenir, majorer, minorer, découper, passer à la limite et pourquoi il ne suffit pas de se contenter d'apprendre à calculer des primitives.

Cette hypothèse ne doit donc pas être confondue avec celle qui préside au choix utilitariste et "naturaliste", puisqu'ici la théorie n'est pas présentée comme évidente et sans aucun risque d'erreurs ; elle doit au contraire être mise en question à chaque fois qu'elle a l'air de fournir des indications absurdes sur d'autres domaines de réalité, et ici l'on ne cherche ni à cacher, ni à réduire artificiellement la complexité de la théorie pour l'enseigner, mais – pour que l'effort de rigueur demandé soit acceptable par ceux qui n'en éprouvent pas spontanément le besoin – on cherche à montrer à chaque étape que la complexité de la théorie est proportionnée à l'ampleur des problèmes externes qu'elle permet d'"éclairer" utilement.

Métaphore sur "le sentiment d'absurdité" des exigences théoriques

Métaphoriquement parlant, on pourrait dire qu'une telle hypothèse de nécessité de confrontation entre les raisons d'une construction théorique et les éclairages possibles que cette théorie donne sur des réalités pratiques permet d'expliquer en partie le comportement souvent assez paradoxal des professeurs de mathématiques vis-à-vis des recherches en didactique des mathématiques.

En effet, bon nombre de mathématiciens

qui n'ont pas peur, de par leur culture, d'affronter en mathématiques un vocabulaire et une syntaxe très précis, qui acceptent pour eux les exigences d'une théorie qui doit avancer souvent de façon totalement aveugle par rapport aux autres domaines de réalité et qui n'ont pas peur non plus d'exiger ce type de rigueur intellectuelle de la part de leurs élèves ou étudiants, poussent néanmoins de grands cris d'horreur devant l'herméticité des textes didactiques ; ils dénoncent très rapidement une mystification théoriciste dès qu'ils voient certains de leurs collègues s'obliger à prendre de la distance par rapport au réel de l'enseignement pour se doter d'outils théoriques et d'un vocabulaire un peu plus précis pour parler de ce domaine de réalité.

Ces "praticiens de l'enseignement mathématique", bien qu'ils puissent facilement imaginer en quoi un effort théorique sur le didactique pourrait leur apporter un nouvel éclairage sur la réalité de leur enseignement, se refusent alors pour une grande part à faire l'effort intellectuel qui les amènerait à étudier dans un esprit scientifique (comme ils le font si naturellement malgré le travail, voire la souffrance, qu'impose la lecture critique de tout article mathématique un peu consistant) ce qu'il y a derrière tout cela. Ils pourraient le cas échéant en critiquer les éventuels manques de fondement ou l'aspect trop vague ; ils pourraient peut-être aussi y trouver des ébauches de réponses à des questions qu'ils se sont posées et qu'ils continuent à se poser sans trouver pragmatiquement de cheminements satisfaisants pour avancer dans la résolution de ces problèmes.

Ce rejet assez général d'une didactique théorique ne peut donc pas être mis *a priori* chez les mathématiciens sur le compte de la paresse intellectuelle ou d'un manque de confiance dans la validité des détours théoriques ; je pense que ce rejet repose d'abord sur l'impossibilité dans laquelle se trouve le mathématicien d'effectuer seul une confrontation naturaliste entre les méthodes de travail du chercheur en didactique et une réalité d'enseignement.

Tout comme ces élèves de mathématiques qui, ne parvenant pas à effectuer seuls une confrontation entre les raisons des raisonnements mathématiques et l'éclairage scientifique que la compréhension de ces raisonnements pourrait leur apporter sur d'autres domaines de réalité, se refusent à s'intéresser aux mathématiques en elles-mêmes et par suite se font chaque jour davantage la preuve que la théorie mathématique ne sert à rien d'autre qu'à faire plaisir aux mathématiciens, de même le professeur de mathématiques, ne pouvant découvrir spontanément en quoi le jeu didactique théorique le renseigne utilement sur sa réalité d'enseignement, se refuse à entrer dans cette problématique et se fait ainsi, par impossibilité d'une réelle confrontation entre raisons théoriques et éclairage pratique, la preuve que la didactique n'a aucune réalité scientifique (ne peut être un outil pertinent de compréhension de certains aspects du monde, un moyen d'anticipation et de contrôle sur les réalités de l'enseignement, réalités pédagogiques qui pourraient, si le professeur reconnaissait une réalité scientifique à la théorie didactique, se penser plus rationnellement).

Heureusement peut-on dire, la didactique n'est pas un enseignement obligatoire pour tous, car il me semble que les didacticiens ne savent pas encore organiser dans un dispositif scolaire ce type de confrontation entre raisons de la théorie didactique et raisons pédagogiques.

Il me semble clair par contre que plus on ira vers un enseignement largement institutionnalisé de cette discipline, plus il sera fondamental de réfléchir aux moyens didactiques qui permettent, qui forcent une confrontation permanente entre raisons des choix théoriques et éclairages qu'ils donnent sur la pratique ; sinon, à mon sens, on verra fleurir en pire encore dans ces enseignements-là tous les effets pervers des enseignements scientifiques dont la majorité des "élèves" ne perçoivent pas la consistance épistémologique.

En résumé

Revenant aux enseignements des mathématiques proprement dites, je défends donc la thèse que la confrontation entre l'étude objective de domaines de réalité extérieurs aux mathématiques, la construction théorique d'éléments ou de concepts mathématiques *ad hoc* pour tenter de résoudre les problèmes qui se posent dans ces domaines externes, et le retour à ces domaines de réalité pour voir les nouveaux éclairages que cette construction mathématicienne y projette (confrontation qui n'a lieu ni dans une présentation utilitariste des mathématiques, ni dans une présentation purement mathématicienne) est un préalable nécessaire pour que les mathématiques que nous enseignons puissent prendre réalité scientifique chez nos interlocuteurs élèves ou étudiants culturellement éloignés, pour qu'elles deviennent pour eux aussi un objet de pensée valide et intéressant en soi, et finalement pour qu'il soit "bon" éthiquement parlant (car respectueux de la dignité des personnes) de proposer à tous les hommes de s'initier par l'enseignement à cette forme de culture.

A partir de ces hypothèses, quels obstacles aux changements de pratique ?

Se posent maintenant les questions : Quels obstacles vont s'opposer à notre projet d'enseignement ? Comment faire pour que le mythe d'une classe ou d'un amphi de mathématiques débattant scientifiquement pour valider ses conjectures devienne réalité ?

Deux concepts fondamentaux : l'épistémologie d'une personne, les obstacles épistémologiques

Le modèle cognitif le plus couramment utilisé dans tout système éducatif repose sur une sorte d'évidence cognitive ; apparemment, c'est la simple mise en application du fameux précepte de Boileau : "Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement et les mots pour le dire arrivent aisément".

Une question s'impose : cet adage, qui peut être regardé comme un bon critère pour tester si l'on a bien compris ce que l'on a étudié, est-il adéquat pour envisager la façon dont on va présenter ce qu'on va enseigner ou la façon dont il faut apprendre ce que l'on veut savoir ?

En effet, le but de l'enseignement n'est pas, nous en conviendrons aisément, de permettre au professeur de montrer qu'il a bien compris (même si c'est assez nécessaire), il n'est pas davantage que l'élève sache montrer le plus vite possible qu'il "sait", alors qu'il ne sait pas encore.

Dans ces conditions, il se peut que la très grande clarté du discours magistral, le bel ordonnancement des rédactions des élèves, lorsqu'ils s'érigent en philosophie de l'enseignement afin d'atténuer les difficultés d'apprentissage et de souscrire aux exigences de l'évaluation, ne deviennent, à l'insu de tous, les pires ennemis de ces élèves vus comme des personnes capables de comprendre et de prolonger la pensée de ceux qui ont déjà pensé avant eux.

Cette clarté, cette concision, cette logique qui caractérisent le discours scolaire, ces atouts qui, en vertu du modèle cognitif précédent, se veulent structurants, qui se présentent comme des sortes de glissières conduisant plus sûrement la pensée des élèves vers le savoir enseigné, glissières empiriquement disposées par l'institution pour éviter aux classes ou aux amphis de tomber dans le gouffre de l'ignorance collective, ne risquent-ils pas simultanément de s'ériger comme d'énormes barrières aux questionnements personnels, interdisant par là l'accès au sens de ce qui est enseigné ?

Les limites de l'empirisme volontariste : la nécessité théorique

Ce qui psychanalytiquement parlant m'a poussé depuis plus de trente ans, depuis bien avant mon entrée dans le métier d'enseignant-chercheur, à imaginer d'autres voies d'enseignement que celles qui correspondent aux canons de la clarté, c'est que, contrairement à la majorité des professeurs de mathématiques, je n'ai pas toujours été un bon élève à l'école et en particulier en mathématiques : jusqu'en classe de seconde, à part de courts moments comme celui, par exemple, de l'introduction à la géométrie de la démonstration où le maître avait fait explicitement un peu d'épistémologie, je n'ai jamais trop compris le jeu qu'on pratiquait en cours de mathématiques, lieu où – me semblait-il – on appliquait des règles très claires, mais sans lien entre elles et sans lien avec le monde extérieur, lieu où l'on demandait d'effectuer des calculs sans fondements pour moi et sans buts apparents.

J'ai alors ressenti, au fil de ces heures de passivité scolaire, quel lieu d'enfermement, de honte, de rejet et de mépris représente le cours de sciences, et de mathématiques en particulier, pour celui qui ne boit pas les paroles du maître.

J'ai vu de près quel danger d'anéantissement psychique ou de marginalisation par la révolte, et finalement quel risque d'exclusion sociale court celui qui ne comprend pas le monde comme le professeur et qui le fait savoir, celui qui ne se résout pas facilement à la docilité scolaire.

Mais si cette expérience cruciale m'a depuis constamment aiguillonné dans la pratique de mon métier, d'étudiant d'abord, puis d'enseignant, dans nos recherches en didactique et jusque dans l'écriture de ces lignes (où il est toujours très difficile, pour aider à la compréhension du propos, de livrer un bout de soi-même à un lecteur qu'on ne connaît pas, à qui on ne pourra jamais expliquer une deuxième fois le sens de ce qu'on n'a pas su lui faire directement comprendre ou qu'il n'était pas prêt à entendre), cela ne m'a absolument pas suffi pour trouver des solutions pédagogiques fondamentalement différentes et applicables dans l'enseignement avec mes étudiants (*i.e.* des procédés didactiques ouvrant à mes interlocuteurs de nouvelles portes d'accès au sens).

Il est "impressionnant" de constater que devenu par privilège professeur de mathématiques (privilège en ce sens que fils de professeur, j'ai bénéficié d'un environnement socio-culturel sans lequel j'aurais été définitivement "évacué" à l'adolescence du système des études longues), je me suis néanmoins empressé, malgré mon désir de faire autrement, de reproduire en tant que professeur le modèle d'enseignement qui m'avait tant fait souffrir, que j'avais tant critiqué en tant qu'élève ou étudiant, et contre lequel j'avais finalement trouvé la possibilité de me révolter sans être marginalisé.

En effet, très tôt, pour moi-même, j'avais trouvé un cheminement didactique radicalement différent : prenant conscience au milieu de la classe de seconde que j'avais une compréhension des mathématiques quasiment nulle, pour apprendre, je me suis progressivement interdit de continuer à faire la grimace (*i.e.* résoudre un exercice ou un problème, répondre à une question de professeur, rédiger un résumé de cours sans avoir véritablement compris l'essentiel, sans au moins avoir établi suffisamment de ponts avec d'autres domaines de réalité pour que le savoir proposé en cours ne soit plus pour moi une suite de mots ou de signes sans significations intrinsèques ou métaphoriques cohérentes).

Je me suis donc progressivement interdit de répondre artificiellement, *i.e.* d'exploiter les possibilités de décodage des questions des professeurs et des problèmes qu'ils nous posaient, décodage qui permet à tout élève qui participe d'une certaine culture scolaire de donner des réponses satisfaisantes sans avoir résolu les réels problèmes scientifiques que ces questions abordent en substance ; cette exigence a parfois été si dure à tenir en milieu scolaire et universitaire que j'ai failli plusieurs fois encore abandonner au cours de mes études supérieures.

Eh bien ! ayant trouvé une méthode de travail qui me réussissait si bien (les études étaient ainsi devenues absolument passionnantes, même lorsque le professeur ne l'était pas du tout ; on pouvait de surcroît très bien réussir aux examens en continuant jusqu'au bout à travailler sans s'astreindre à "bachoter"), je n'ai pas pu montrer l'efficacité d'une telle méthode à mes étudiants autrement que sous forme d'un discours, de conseils et d'exhortations – discours, conseils et exhortations qui bien évidemment n'étaient positivement reçus que par ceux qui étaient déjà prêts à les entendre et à les mettre en œuvre !

Tout en ayant maintes fois constaté (comme élève ou comme professeur) que, quelle que soit la bonne volonté des partenaires de la relation didactique, "l'explication lumineuse du prof" n'est pas comprise par l'élève si ce dernier n'est pas prêt à la recevoir (et à un certain stade la sur-explication ne fait qu'envenimer les choses), je restais néanmoins persuadé que "s'il s'y prenait bien" (utilisation de situations introductives attrayantes, d'images et de métaphores parlantes, d'applications spectaculaires, de commentaires de nature épistémologique, etc.), le professeur devait toujours pouvoir expliquer, se faire comprendre, se mettre sur la longueur d'onde de l'élève (à moins, bien sûr, que ce dernier ne refuse d'apprendre).

En tant qu'enseignant donnant beaucoup plus d'explications sur le pourquoi et sur le comment que je n'en avais reçues moi-même, j'avais donc le sentiment de ne pas reproduire les pratiques pédagogiques qui m'avaient tant rebuté en tant qu'élève, et cependant je devais constater que si je réussissais très bien avec certains élèves ou étudiants (ceux qui étaient dans une épistémologie proche de la mienne), je n'atteignais que très localement et très superficiellement les autres ; par amitié, certains sentant un regard positif porté sur eux, faisaient un effort pour aller dans le sens impulsé, mais pour l'essentiel ils restaient hors des préoccupations scientifiques auxquelles je les invitais, et malgré moi, beaucoup se sentaient plus ou moins niés, péjorés, rejetés par mes enseignements.

La prise de conscience de l'existence de l'épistémologie d'une personne ou l'une des clefs de l'ouverture au sens

L'épistémologie, qui a tendance à être évacuée de l'enseignement de toute discipline qui n'a pas besoin de se justifier socialement, a disparu à un point tel dans l'enseignement des mathématiques (comme de la physique) que la plupart d'entre nous avons pu quitter nos études supérieures en ignorant jusqu'à son nom ou ce que ce nom représentait exactement.

De façon générale, l'épistémologie est définie comme une réflexion sur la science, qui ne se confond pas avec la science elle-même. Ce concept qui désigne la philosophie des sciences est essentiellement l'étude critique des principes, des hypothèses et des résultats des diverses sciences, étude destinée à déterminer leur origine logique, leur valeur et portée objective.

En fait, ce qui nous intéresse principalement en matière d'enseignement pour comprendre ce qui se passe dans une classe ou un amphi, ce sont les différentes épistémologies des personnes, maître et élèves, à propos d'un savoir.

Par épistémologie d'une personne à propos d'un savoir, on désigne alors principalement les qualités d'intérêt, d'utilité, de validité que cette personne attribue au savoir mis en jeu, qualités qui se fondent à travers l'expérience acquise au fil des années sur les méthodes et les concepts de la discipline concernée, qualités qui vont conditionner le sens que cette personne va attribuer au savoir.

Le drame qui se noue dans l'enseignement autour de l'absence du terme épistémologie et par suite de l'absence de préoccupation explicite pour nommer, pour désigner ce filtre d'accès au sens que chacun place entre lui et le Savoir, entre ce que le professeur sait savamment et ce qu'il enseigne, entre ce qui est enseigné à l'élève et ce qu'il "choisit" d'apprendre, c'est que par cette omission il n'est plus nécessaire, pour entrer dans la logique de préparation d'un cours, de prendre en compte les épistémologies des uns et des autres dans leur diversité.

Quand un professeur ne peut identifier et nommer son épistémologie propre, il ne peut être conscient de l'importance de la diversité et de la pertinence d'autres épistémologies ; dans ses jugements scientifiques, il n'y a plus de place que pour une façon de voir et de comprendre: la sienne !

Dès lors, si ce professeur considère par exemple les mathématiques comme vraies en soi, comme indiscutables et indiscutablement plus pertinentes que d'autres approches, comme une sorte de réalité suprême – la réalité de la vérité absolue des idées –, il va croire et prétendre qu'il n'y a que cette façon de concevoir les mathématiques, de voir le monde, et il pensera que les autres façons de traiter les mathématiques ou les problèmes en général sont des formes plus ou moins dégénérées de la pensée ; il le fera alors savoir à ses interlocuteurs en péjorant (plus ou moins consciemment) leurs positions de façon parfois très violente.

Pour caricaturer cette forme d'intégrisme [3] scientifique que j'ai inconsciemment pratiqué pendant mes premières années de métier, je peux dire que le mot épistémologie ne m'était absolument pas nécessaire pour désigner diverses conceptions philosophiques de la science, puisque pour moi il n'y en avait qu'une, celle que nous "partagions" implicitement dans notre groupe de recherche ; les autres, je ne cherchais même pas à les comprendre (ne pouvant être nommées, elles n'étaient pas dignes d'être étudiées).

On ne réalise que longtemps après en quoi une telle conception de sa discipline conduit à son insu le professeur à une outrecuidance hégémonique et terrifiante qui risque de fermer momentanément ou durablement l'accès au sens à tous ceux de ses élèves ou étudiants qui ne partagent pas spontanément la même épistémologie.

Finalement, je dois à la communauté de recherche en didactique des mathématiques, profondément traversée par la pensée de chercheurs comme Bachelard, Piaget ou Lakatos, de m'avoir permis d'élargir mes conceptions initialement très étroites sur les mathématiques.

Je sais gré à cette communauté de m'avoir introduit à cette façon d'aborder nos disciplines scientifiques, car depuis, bon nombre d'indices m'ont montré qu'il y a là pour le professeur une véritable clef d'ouverture au sens pour lui d'abord, et aussi pour une très grande part de ses élèves ou de ses étudiants.

En particulier, et sans vouloir dans une démagogie réductrice mettre toutes les interventions de mes étudiants sur le même pied, je ne peux plus aujourd'hui, déontologiquement parlant, me permettre de péjorer ou de dénigrer certaines épistémologies de mes étudiants ou de mes collègues comme je pouvais le faire en toute bonne conscience auparavant ; je ne peux davantage présenter un savoir important en me référant à un seul cadre épistémologique.

En fait, à partir du moment où l'on reconnaît la diversité et l'importance des épistémologies individuelles, on est conduit à adopter en cours de mathématiques les principes d'obligation de mise en évidence des épistémologies naïves, de reconnaissance de leurs valeurs locales, de nécessité de confronter les savoirs formels à d'autres domaines de réalité, d'accepter comme pertinentes non seulement les validations internes aux mathématiques qui suffisent à certains élèves, mais aussi les validations externes qui sont indispensables à d'autres pour que les savoirs scientifiques prennent sens pour eux aussi.

Vers le concept d'obstacle épistémologique

J'ai rappelé précédemment que pour fuir une sorte de médiocrité scolaire, pour faire de mes études scientifiques une activité qui vaille la peine d'être travaillée, j'avais instinctivement été amené à rejeter l'attitude de docilité scolaire, à délaisser les savoirs purement scolaires que l'on peut réciter et utiliser mécaniquement, mais qu'on ne comprend pas sur le fond, parce que je ressentais bien qu'en un certain sens

(3) Dans son livre *La pureté dangereuse*, Bernard-Henri Lévy analyse de façon très pertinente à mon sens les racines de l'intégrisme; je trouve qu'une part de son analyse décrit assez fidèlement nos comportements inconscients de professeurs purs et durs.

ils faisaient écran à l'acquisition de savoirs plus consistants (plus scientifiques).

Les théories constructivistes éclairent les différences fondamentales qu'il peut y avoir entre ces savoirs trop scolaires faits "pour la récitation" et les savoirs scientifiques faits pour résoudre des problèmes.

Chez une personne, les premiers savoirs, non problématisés pour rester simples, peuvent très bien produire de bons résultats aux examens, tout en laissant coexister des systèmes de pensée contradictoires constitués de raisonnements erronés qui "se taisent" lorsqu'ils entrent en conflit direct avec les savoirs officiels du professeur ou du livre, mais qui reprennent immédiatement le dessus dans l'action, si aucune indication scolaire explicite ne les interdit.

Contrairement à ces savoirs superficiels qui s'enseignent d'autant plus facilement qu'ils évitent les contradictions avec d'autres systèmes de pensée, les savoirs scientifiques doivent le plus souvent, eux, lutter pour prendre leur place, pour acquérir non seulement le statut officiel d'un savoir scientifique, mais aussi l'opérationnalité qui les caractérise ; lorsqu'ils sont appris en étant associés à des problématiques consistantes, ces savoirs-là finissent par changer le regard de la personne sur le monde, car ils interagissent sur l'ensemble de son système d'appréhension des problèmes.

Apparaît à ce niveau le concept fondamental d'obstacle épistémologique

C'est probablement ce concept qui a le plus radicalement changé mon regard de professeur ; je l'épinglerai par une boutade : "la bonne explication du professeur n'est toute puissante que lorsque la chose enseignée est mineure".

Ce que toutes mes années d'élève, d'étudiant et d'enseignant m'ont constamment obligé à constater se trouve en grande partie théorisé par ce concept qui néanmoins ne se laisse pas spontanément envisager, car il met en avant ce qu'un professeur ne "saurait voir en face", le paradoxe fondamental de l'enseignement :

"Lorsque le savoir est vraiment consistant, il est impossible de l'enseigner directement".

En d'autres termes, je prétends que ce concept d'obstacle épistémologique est totalement révolutionnaire pour l'enseignement dans la mesure où il bat en brèche le postulat fondamental de la toute-puissance didactique de la parole du professeur (postulat auquel, je pense, nous tenons tous consciemment ou non assez fortement, bien que nos expériences d'élève et de professeur le mettent constamment en défaut. Nous y tenons fortement, car c'est apparemment lui qui légitime notre position de maître dans la classe, c'est en tout cas lui qui justifie la position dominante de notre parole dans le cours).

Si on reconnaît l'existence d'obstacles épistémologiques, *i.e.* l'existence d'entraves à la compréhension d'un savoir qui ne seraient pas dues au seul fait que l'élève n'est pas doué ou ne travaille pas, ou qu'on lui a mal présenté les choses ou qu'il est difficile d'apprendre du nouveau, mais d'entraves qui sont liées au fait que ce qu'on veut enseigner est "énorme", représente un changement très important de regard sur le monde, va contre tout un système de pensée qui avait une pertinence locale et qui avait fait ses preuves dans des cas assez simples, on est conduit à faire l'hypothèse que l'explication directe de tout savoir réellement consistant ne sera probablement entendue que par ceux qui ont déjà une problématique idoine, et que par contre, nos explications si lumineuses soient-elles, ne pourront produire que contre-sens ou savoir assez superficiel chez ceux qui seront demeurés à l'extérieur de telles problématiques, qui les interpréteront dans une épistémologie encore trop éloignée de la nôtre.

Si on "lit" un programme d'enseignement en termes d'obstacles épistémologiques et si on analyse les difficultés que l'on rencontre classiquement pour enseigner à un niveau donné, on prend alors assez vite conscience que l'apprentissage des connaissances les plus fondamentales de ce programme est lié au dépassement de quelques obstacles épistémologiques bien repérables, mais qui ne se laissent pas pour autant circonscrire facilement puisqu'il s'agit plus d'attitude d'esprit, de comportement global, d'entrée dans une problématique que de capacité à restituer un savoir donné ou à exécuter une tâche précise.

Par exemple, comprendre qu'un système de majorations et de minorations peut aboutir à des résultats exacts et comprendre cette philosophie jusqu'à accepter de "perdre de l'information" en remplaçant de son propre chef dans une résolution de problème un calcul exact par une majoration ou une minoration suffisante, est un obstacle épistémologique qui devient crucial dès la classe de seconde, car son non dépassement verrouille l'accès au sens de l'analyse. (Tant qu'on n'a pas franchi cet obstacle, on ne comprend que l'aspect algébrique des résultats de l'analyse, mais cette compréhension ne donne aucune autonomie supplémentaire pour résoudre un problème mathématique non scolaire ; de plus cette analyse totalement algébrisée n'est pas idoine, à mon sens, pour aborder les "vrais" problèmes de physique.)

Le changement de regard sur l'enseignement consiste alors, si nous voulons que nos élèves "sachent vraiment", à ne plus considérer ces obstacles comme des ennuis, des gênes, des "erreurs" qu'il faudrait à tout prix éviter, contourner, adoucir par des acrobaties pédagogiques (par exemple en découpant les difficultés en "fines rondelles"), mais au contraire à penser les obstacles épistémologiques comme une cristallisation des connaissances essentielles du programme, à voir leur dépassement comme les moments cruciaux de l'apprentissage, puisque ce sont les moments où l'élève modifie de façon décisive son système de pensée sur un aspect du savoir.

Il faut donc, dans cette modélisation du savoir, que l'élève, l'étudiant affronte ces obstacles, bute durablement dessus, ne comprenne pas tout de suite, réalise lui aussi qu'il y a là quelque chose de très important, comprenne qu'il est normal, voire nécessaire, qu'il éprouve à cet endroit de véritables difficultés.

Il nous "faut" donc, dans cette vision de l'enseignement, arrêter de tant miser sur les vertus de la bonne explication préalable et des applications immédiates consécutives à l'énonciation de la théorie (pratiques qui rassurent l'élève, lui donnent même l'impression de tout comprendre, alors que l'essentiel lui échappe souvent, ce qui est alors dramatique, car l'élève qui a ce sentiment ne peut plus affronter l'obstacle), et il nous "faut" par contre, nous professeurs, "travailler" beaucoup plus l'entrée de nos interlocuteurs élèves ou étudiants dans des problématiques scientifiques consistantes.

Se pose alors le problème de la viabilité dans la classe ou dans l'amphi de situations erratiques et conflictuelles (sur un plan cognitif) susceptibles de provoquer à terme un changement de regard de l'élève sur la situation (changement de l'élève ou plus exactement des élèves, et là se situe un problème didactique majeur, car tous ne vont pas changer au même moment et pour les mêmes raisons), une mini-révolution épistémologique du groupe classe ou amphi, fruit le plus souvent de la traversée collective d'une période d'incertitude et de doute scientifique.

Apparaît simultanément la nécessité de ne pas combattre de façon frontale et péjorante les épistémologies trop naïves de nos élèves ou de nos étudiants, puisque ce sont elles qui vont permettre de faire émerger les conflits cognitifs indispensables au dépassement des obstacles.

Le professeur "doit" donc maintenant utiliser comme un matériau vivant de son cours ces épistémologies trop naïves, il doit pouvoir les faire travailler explicitement dans la classe ou l'amphi pour que ses élèves ou ses étudiants, tout en continuant à penser à la première personne, évoluent peu à peu vers des conceptions compatibles avec la complexité des savoirs qu'il souhaite leur enseigner.

3)Le concept d'obstacle épistémologique crée la nécessité d'opérer une révolution dans la façon de concevoir l'enseignement scientifique

Quand, dans le principe fondateur du débat scientifique en cours de mathématiques, j'affirme la nécessité que la classe ou l'amphi se comporte au moins à certains moments cruciaux comme une communauté scientifique, j'évoque une pratique pédagogique totalement déraisonnable dans une certaine vision du savoir.

En effet, si on nie la pertinence du concept d'obstacle épistémologique, *i.e.* si on pense que l'essentiel des savoirs d'un programme peut, après quelques situations introductives, être enseigné sur le mode frontal de l'exposition de la théorie et de la mise en application par les élèves dans des exercices et problèmes assez guidés, et finalement produire des significations scientifiquement acceptables auprès d'une proportion importante d'élèves ou d'étudiants, tout dispositif de type débat scientifique amenant la classe ou l'amphi à exercer une véritable responsabilité scientifique sur ce qui se dit ou se fait dans un cours de mathématiques restera toujours infiniment trop coûteux et risqué pour le professeur, ses élèves et leurs parents, pour les étudiants, pour l'institution et la société en général.

Dans une conception transparente des savoirs scientifiques, quelles que soient les valeurs éthiques qu'on adopte, aucun dispositif "révolutionnaire" du type débat scientifique ne trouvera les conditions écologiques de sa survie au delà de quelques phases d'essais (phases d'essais plus ou moins réussis suivant le moment choisi pour les faire, le degré de conviction et de professionnalisme du professeur).

En clair, si on nie la pertinence scientifique du concept d'obstacle épistémologique, en dehors d'un caractère purement expérimental à des fins de recherche, les modes d'enseignement très coûteux ne peuvent être considérés autrement que comme des utopies pures.

Ces sortes de "folies pédagogiques" ne deviennent envisageables, voire très raisonnables, et n'apparaissent finalement comme des nécessités que lorsqu'on réalise à partir de ce concept d'obstacle épistémologique que ce qui est une folie, ce qui à terme confine à l'absurdité, c'est de vouloir enseigner à tous par les procédés pédagogiques classiques, des concepts scientifiques ayant une certaine épaisseur sémantique.

En guise de conclusion

Partant de ces constats et hypothèses sur l'appropriation des savoirs scientifiques, mon nouveau métier d'enseignant m'apparaît aujourd'hui comme étant d'abord celui d'un scientifique qui a à ouvrir ses interlocuteurs à des problématiques scientifiques, à provoquer chez eux un véritable questionnement scientifique.

Je ne me sens donc plus déontologiquement contraint à répondre immédiatement aux questions que me posent mes élèves ou mes étudiants, mais à les amener à transformer ces questions en conjectures pour qu'ils découvrent que dès qu'ils cultivent des savoirs consistants, ils disposent en eux-mêmes de moyens scientifiques suffisants pour résoudre en partie les problèmes qu'engendrent leurs propres questions ; de même, je n'ai plus (en raison de l'importance du programme) à me précipiter pour leur transmettre de la façon la plus logique et transparente possible les résultats importants (pour nous), car je sais que si dans mon empressement, mes explications arrivent trop tôt, si elles se présentent comme "réponses" à un non questionnement scientifique, elles se présenteront aussi comme du non-sens, comme du non-savoir scientifique.

Je me dis par suite : n'hésitons donc pas à prendre le temps de vivre des situations où la philosophie de la science se montre particulièrement pertinente, des situations dans lesquelles l'élève ou l'étudiant est progressivement amené à sentir qu'il obtiendra difficilement de bonnes explications et des certitudes s'il veut rester à un niveau trop concret, trop particulier, donc trop implicite, des situations où pour comprendre, il va devoir s'engager personnellement dans un double mouvement à la fois généralisateur et réducteur, des situations où il lui faudra accepter de théoriser ses pratiques, définir ce dont il veut parler, dire dans quel modèle il se place, faire des hypothèses explicites dans ce modèle, accepter les facilités mais aussi la dureté qu'il y a à exprimer ses idées dans un modèle mathématique.

Et si à ce point de l'analyse, nous revenons au thème de la liberté du professeur esquissé précédemment, et à son droit au bonheur en enseignant, je prétends qu'il est possible de se sentir très libre et d'être très heureux en acceptant de travailler sur des modes de pensée qui ne sont pas (ou ne sont plus) spontanément les nôtres.

Quand on a le sentiment de collaborer à la construction d'une rationalité scientifique auprès de personnes qui participent d'une culture qui nous est (devenue) étrangère, on éprouve alors plus de bonheur à les voir "faire des mathématiques imparfaites" qu'en leur "faisant nous-mêmes des mathématiques plus correctes" dont on sait pertinemment que la majorité des subtilités leur échappent.

Finalement, je ne chercherai pas à vous convaincre davantage par ce type d'arguments généraux, car je pense que nous sommes ici au cœur de l'obstacle épistémologique fondamental de l'entrée à toute problématique didactique : celui qui ne ressent pas d'une certaine façon par lui-même les limites du pragmatisme pour aborder nos problèmes d'enseignement, qui ne ressent pas l'obligation de s'ouvrir à d'autres épistémologies que celle qu'il privilégie inconsciemment, celui-là ne va pas par enchantement, par la clarté et la transparence de mon propos découvrir maintenant ces nécessités fondamentales de notre métier ; toute sur-explication de ma part ne servirait à rien, bien au contraire.

Je dirai seulement, pour conclure, que je crois très sérieusement au réalisme de cette utopie que serait une école qui, à chaque fois qu'elle se propose d'enseigner un savoir, se donnerait pour mission de le faire dans le respect du savoir et du développement personnel et social de la personne-élève, une école donc qui ne se donnerait plus pour but de sélectionner ceux qui courent le plus vite, mais plutôt d'apprendre à vivre humainement ensemble en ne marchant pas tous à la même vitesse.

La légitimité de ces propos, c'est finalement vous et vous seuls qui pouvez la donner :

– ou bien ces questions, ces hypothèses, ces paris et ces indignations vous interpellent et vous aident à cheminer dans une quête de vérités toujours fragiles quand il s'agit de théoriser l'humain, et dans ce cas j'ai raison de vous aiguillonner ainsi,

– ou bien tout cela vous dérange, sans pour autant vous donner des pistes intéressantes pour espérer et construire ce monde meilleur auquel nous aspirons tous, mais où il faut bien admettre que le désir ne fait pas la réalité (bien qu'il y contribue fortement), et alors je vous prie de bien vouloir excuser les jugements que vous aurez reçus comme des jugements de valeur (jugements injustes si vous voyez d'autres valeurs que celles que je perçois dans l'enseignement scientifique classique, auquel je reproche d'être beaucoup trop scolaire pour être formateur).

TROISIÈME PARTIE : ÉTUDE DE DEUX EXEMPLES

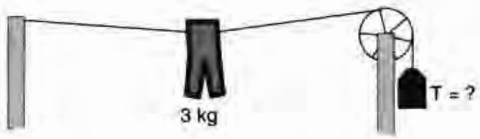
Pour ne pas en rester aux généralités, je vous propose l'analyse très succincte de deux situations d'enseignement qui mettent en œuvre les considérations précédentes ; la première peut être proposée au lycée, la seconde correspond davantage à la première année d'université. Le texte de commentaire de cette deuxième situation est d'ailleurs mot pour mot celui que j'ai donné cette année, après débat en amphi, à mes étudiants de DEUG A afin qu'ils gardent une trace institutionnelle de cette entrée un peu spéciale dans une problématique.

La première situation, dite du blue-jean, a déjà été présentée dans cette revue pour illustrer le fonctionnement d'un "débat scientifique en cours de mathématiques" ; je la reprends ici pour la commenter sous l'angle qui nous préoccupe directement, celui des rapports entre mathématiques et réalités. Résumons donc en quelques lignes le principe du débat scientifique en cours.

Partant de situations problématiques introduites par le professeur ou de conjectures proposées par les élèves, les définitions et les théorèmes du cours sont peu à peu introduits par l'enseignant comme réponses, mises en forme, synthèses des débats des élèves : débats faits de questionnements, d'essais de résolution des problèmes, de tentatives de preuves, etc.

Le blue-jean

Ce blue-jean mouillé suspendu sur ce fil à linge pèse environ 3 kg.



Question :

La tension T du fil (c'est-à-dire la valeur en kg du contrepoids C qu'il faudrait suspendre à son extrémité pour soutenir le blue-jean dans cette position) est-elle à votre avis plutôt de :

1,5kg	3kg	6kg	20kg	45kg	100kg	?

Vous pouvez travailler seul ou avec vos proches voisins afin de déterminer la réponse qui vous semble la plus satisfaisante.

Au cours d'une conférence que j'effectuais sur le thème "Mathématiques, mythe ou réalité", conférence qui est à l'origine de ce texte, j'ai posé ce problème au groupe de professeurs de mathématiques réunis à cette occasion ; après les quelques instants de silence nécessaires pour se remettre à penser à la première personne, l'assistance qui semblait proche de l'état de sommeil s'est brutalement enflammée, et au bout de cinq minutes la salle était dans un état quasi volcanique !

Les réponses ont été les suivantes :

1,5kg	3kg	6kg	20kg	45kg	100kg	refus de vote
25	40	13	20	0	0	2

J'ai eu le "tort" de ne pas proposer à ces professeurs, comme cela se pratique dans nos cours, d'entrer dans un débat où chacun peut expliquer sa position ou contrer les explications des autres lorsqu'elles lui paraissent erronées.

Je ne l'ai pas proposé, car l'objet de la conférence n'était pas de présenter en détail le débat scientifique en cours de mathématiques, mais plutôt d'illustrer par des exemples les possibilités de confrontation des mathématiques aux autres domaines de réalité. Je ne l'ai pas proposé donc parce qu'il aurait fallu, pour que nous puissions débattre scientifiquement sur ce problème, que nous consacrions un certain temps non seulement au débat, mais aussi à son organisation.

En effet, pour qu'un débat initié par une situation problématique comme celle du blue-jean puisse se structurer scientifiquement dans un groupe important, il est apparu progressivement nécessaire au cours de nos recherches de respecter des règles strictes peu coutumières à l'école et dans la société, règles "incontournables" pour gérer la situation paradoxale suivante : l'enseignant doit garder le contrôle de la situation sans la dominer, il doit organiser le débat sans l'arbitrer sur un plan épistémologique ; les participants, eux, doivent être spontanés et simultanément se sentir responsables de la vérité de ce qui est dit, se plier aux lois du scientifique et respecter la prise de parole en groupe.

Pour cela donc, l'enseignant "doit" distribuer la parole à ceux qui en font la demande et résumer aussi fidèlement que possible au tableau ce que chacun propose en prenant garde de ne pas sélectionner ce (ou ceux) qui lui plaît (plaisent), de ne pas arranger ce qui est dit, et surtout de ne pas laisser le moins du monde transparaître son avis, afin que pour chaque participant "élève" le jeu ne soit pas scolaire : "qu'est-ce que le maître en pense ? qu'est-ce qu'il attend de moi ?" mais scientifique : "qu'est-ce qui est vrai ici ? cet argument est-il crédible ? qu'est-ce qui est certainement faux ? comment le montrer ? etc."

La nécessité d'un contrat didactique explicitement négocié

Je n'ai donc pas lancé ce débat dans cette conférence parce que n'ayant négocié aucun contrat didactique avec mes interlocuteurs, il m'est apparu dangereux, malgré la tournure joviale que prenaient les débats en petits groupes, de pousser des personnes à s'exposer dans un débat public, dans une prise de parole sincère où probablement une grande partie de ce qu'elles avanceraient, s'avérerait progressivement faux, sachant que cette mise en évidence se ferait d'une certaine façon sans douceur et sans pudeur par la dureté du jeu mathématique dans lequel des nombres comme 3 ou 6 ne peuvent être considérés comme des nuances ou des lapsus des nombres 45 ou 100.

En effet, ce jeu socio-mathématique, dans lequel on ne peut adoucir la fausseté des arguments pour tenir compte des données psychologiques, ne peut respecter l'individu "élève" que dans une coutume didactique explicitement convenue, où les personnes acceptent une position d'apprenti scientifique et où l'erreur n'est plus connotée négativement, mais au contraire est explicitement reconnue comme un passage obligé vers une compréhension plus profonde.

Ce jeu n'est donc jouable que si dans un premier temps on convient (et à terme on prouve dans l'action) que celui qui défend une position erronée n'est pas un âne qui fait perdre son temps à la classe, mais plutôt un scientifique en vraie grandeur qui contribue par son intervention à faire avancer une des parties essentielles du travail scientifique : déterminer la réalité du problème que l'on cherche à traiter.

Dans ce contrat didactique-là, il est clair que l'élève, s'il souhaite apprendre, n'a plus intérêt à chercher à deviner "les pièges" que le maître lui aurait tendus, ou à se gloser du pair qui ne proposerait pas tout de suite la "bonne réponse", puisque (si on admet que les obstacles épistémologiques existent et par suite que les raisonnements erronés sont très résistants) il n'existe plus de "mauvaises réponses" sur le plan cognitif en classe (*i.e.* de réponses dont on puisse dire *a priori* que leur discussion ne nous apprendra rien d'intéressant).

Pour apprendre plus, l'élève doit donc mettre en débat tout raisonnement spontané qui lui paraît valide après réflexion personnelle et / ou discussion avec ses proches voisins, afin d'en tester la solidité et la pertinence.

On "gagne" à ce jeu didactico-scientifique aussi bien si l'on a trouvé le pourquoi des réponses exactes que celui des réponses erronées ; et pour que le jeu puisse perdurer tout au long de l'année, il faut que chacun garde à l'esprit la nécessité qu'il y ait des élèves pour proposer des réponses de toute nature et des élèves pour les contredire. (Il faut donc en particulier qu'à l'issue de chaque débat, personne ne sorte blessé de s'être exposé à dire sincèrement ce qu'il pensait.)

Le réalisme des mathématiques ou l'objectif d'une situation comme celle du blue-jean

Ici l'objectif est triple :

– il s'agit d'une part d'expérimenter avec les élèves un aspect important de la méthodologie scientifique : la nécessité de construire de nouveaux objets intellectuels quand ceux que l'on possède ne sont plus adaptés (ici il faut réaliser que les nombres ne suffisent plus),
– il s'agit ensuite d'introduire ces nouveaux objets (ici les vecteurs),
– il s'agit enfin de montrer d'entrée de jeu que ces nouveaux objets (les vecteurs), s'ils ressemblent aux précédents (les nombres) puisque comme eux ils s'ajoutent, sont néanmoins très différents dans la mesure où ils ne s'ajoutent pas de la même façon (et que c'est cette différence, cette complexité supplémentaire, qui les rend performants ici pour nous aider à mieux penser la réalité matérielle du fil à linge ; réalité qui est beaucoup plus complexe que celle de la suspension d'un poids à la verticale de son point de sustentation).

De façon plus précise, observons qu'ici le problème est présenté en termes de nombres : le blue-jean pèse 3 kg et il est maintenu par l'action conjuguée des deux brins d'un même fil.

Bien que cette action soit fondamentalement vectorielle, elle est dans ce problème ramenée à un nombre puisque la question posée est : "quelle est la tension T qui s'exerce sur chaque brin ?". L'introduction de la poulie et du tableau des valeurs possibles permet, s'il subsistait un doute, de matérialiser cette tension par un nombre : la valeur en kg du contrepoids qui tend la corde.

Rien donc, dans la position du problème, ne permet à l'élève habitué à décoder les énoncés scolaires pour y trouver les variables pertinentes, de soupçonner que les nombres ne sont pas bien adaptés ici pour mathématiser cette situation.

Le problème orientant notre réflexion sur des nombres et l'action des deux brins du fil tendant à se conjuguer pour contrer le poids du pantalon, notre bon sens nous pousse tout naturellement à ajouter ces tensions, d'où la réponse T = 1,5 kg car 1,5 + 1,5 = 3 (réponse qui serait pertinente si le blue-jean était suspendu par deux fils verticaux accrochés au plafond).

Les explications que les élèves donnent habituellement pour justifier les réponses : 3 kg et 6 kg sont le plus souvent des variantes de cette vision fondamentalement numérique.

La réponse 3 kg correspond au cas où on ne fait intervenir qu'un brin pour soutenir le pantalon, par exemple le brin actif relié au contrepoids ; 6 kg est le résultat d'une opération plus complexe, mais fréquente en situation scolaire : puisqu'il faut fournir une réponse et que la réponse obtenue par un premier raisonnement est trop contraire à l'expérience, on rééquilibre le résultat en prenant l'opération inverse.

Ici le raisonnement spontané est "la moitié du poids sur chaque brin" qui donne une tension plus faible que le poids ; comme cette réponse ne correspond pas à l'expérience de ceux qui ont bricolé des suspensions "horizontales", ils transforment cette moitié en son double pour obtenir une réponse "rationnelle" et plus vraisemblable.

Une vingtaine de professeurs de sciences ont choisi ici T = 20 kg (ce qui est très différent de ce qui se produit dans une classe où cette valeur n'est choisie au plus que par un ou deux individus, qui par leur singularité provoquent en général dans un premier temps l'hilarité de la classe) ; il est remarquable de voir néanmoins que la majorité des professeurs qui se sont exprimés ont choisi des tensions très inférieures et que les valeurs 45 kg et 100 kg n'ont été choisies par personne, bien que ce soient les réponses les mieux adaptées à la situation.

Devant ce résultat, j'aurais tendance à dire que cette situation est idoine et robuste pour provoquer un changement de regard.

En effet, le problème didactique majeur pour introduire significativement le concept de vecteur auprès d'élèves peu attirés par les mathématiques est que ces élèves sont toujours réticents lorsqu'il s'agit d'élargir, de compléter, de remplacer des objets devenus simples pour eux à force de s'en servir par des objets nouveaux et plus complexes (passage des entiers aux décimaux, des chiffres aux lettres, des nombres aux vecteurs, des formules aux fonctions, etc.).

Souvent, pour ces élèves, la complexité des nouveaux objets mathématiques apparaît comme artificiellement entretenue par le professeur pour faire monter les enchères de la course d'obstacles que représente pour eux le cours de mathématiques ("pourquoi faire si compliqué, alors que jusqu'ici on pouvait faire beaucoup plus simplement").

Ici il me semble que la difficulté vectorielle est adaptée à la complexité du problème qu'on cherche à étudier ; si on veut échapper à cette complexité, on ne pourra comprendre pourquoi la réalité est aussi éloignée de notre intuition, de notre bon sens.

C'est donc là (nous l'espérons) que l'élève réservé sur l'intérêt du jeu mathématique va peut-être commencer à apercevoir qu'en "faisant compliqué" dans un premier temps, les mathématiques peuvent aussi beaucoup nous simplifier la vie en nous apportant un éclairage pertinent et des outils de calcul pour quantifier nos intuitions.

En réalité, il me semble que tant qu'on veut voir uniquement les nombres poids et tension pour résoudre le problème, tant qu'on ne veut pas faire intervenir l'angle des deux brins de la corde, *i.e.* tant qu'on n'accède pas à une vision vectorielle, nos raisonnements ne font que nous éloigner d'une réponse adaptée.

En particulier, contrairement aux nombres qui, lorsqu'ils "coopèrent à la même action", sont automatiquement de même signe (*i.e.* sont tels que le module de leur somme est la somme des modules), les vecteurs, eux, peuvent bien coopérer à la même action (c'est le cas des vecteurs $\vec{T1}$ et $\vec{T2}$ qui participent chacun pour moitié à compenser le poids $\vec{P}$ du pantalon) sans que pour autant leurs modules s'ajoutent.

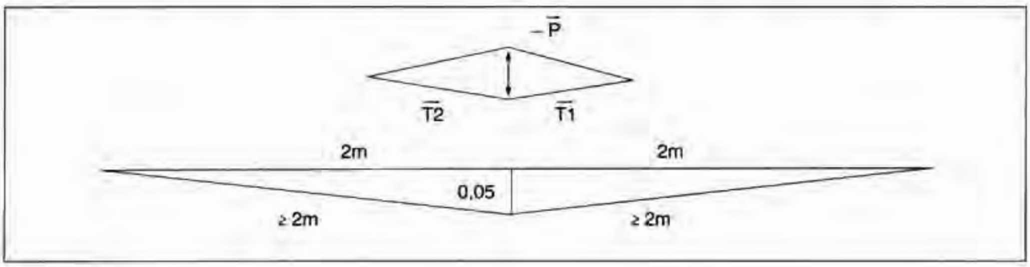
(Ici ce n'est pas parce que : $\vec{P} = \vec{T1} + \vec{T2}$ que l'on a aussi : $\|\vec{P}\| = \|\vec{T1}\| + \|\vec{T2}\|$.)

De façon *a priori* paradoxale (à force de ne considérer que des repères orthonormés, on se fabrique le faux théorème : "Le module des composantes d'un vecteur est toujours inférieur à la norme du vecteur lui-même"), la norme du vecteur somme (ici le poids du pantalon) peut devenir dérisoire par rapport à chacune des normes des vecteurs composants (ici la tension T que l'on demande d'évaluer), et plus on veut ignorer la nécessité que ces vecteurs équilibrateurs $\overrightarrow{T1}$ et $\overrightarrow{T2}$ "fassent un angle" pour contrer le poids (plus on veut faire en sorte que l'étendage ne fléchisse pas) et plus le rapport T/P devient fou (tellement fou que tout étendage finit par casser si on refuse de lui donner une "flèche" suffisante).

Si par suite on prend pour définition de la somme de deux vecteurs la diagonale du parallélogramme (il n'est pas question d'attendre que ce soient les élèves qui fassent cette proposition ; la situation n'a pas pour objet de permettre aux élèves de "réinventer les mathématiques" ! – ce qui serait une utopie totalement irréaliste ou une manipulation grossière du professeur – elle n'est là que pour permettre aux élèves de découvrir la pertinence des constructions scientifiques), et si l'on se propose de modéliser les forces par des vecteurs et non plus par de simples nombres, le principe de Thalès appliqué à un étendage dont par exemple l'écartement des poteaux est de 4 mètres et sur lequel on accepte une "flèche" au centre de 5 cm (étendage "normal") nous conduit à prévoir un facteur d'ordre 20 pour le rapport T/P (voir figure ci-dessous).

C'est bien l'absence de cette intuition vectorielle "la tension du fil doit être de 10 à 20 fois supérieure au poids à soulever si l'on veut que la flèche de l'étendage soit raisonnable" qui nous interdit de choisir spontanément les réponses adéquates 20 kg, 45 kg ou même 100 kg, mais excepté pour celui qui travaillerait régulièrement de façon empirique sur des ruptures d'étendages, cette intuition-là n'est pas évidente, ne résulte pas du simple "bon sens", c'est du bon sens théoriquement construit, mathématiquement construit ! C'est la concrétisation de la connaissance mathématique : "si deux vecteurs font entre eux un angle quasiment plat, le module de leur somme peut être dix, vingt, cent, mille fois plus petit que le module de chacun d'entre eux !"

Je prétends donc que ce concept de vecteur mathématique, s'il est couplé avec une situation telle que celle du blue-jean, peut changer notre regard sur le monde et que ce changement de regard est aussi important pour l'intellectuel pur qui renâcle à se salir les mains dans une réalité trop contingente et incertaine, que pour l'esprit concret qui se déclare irréductible-



ment pragmatique, et qui (pour cela ou en se protégeant par cela) renâcle *a priori* à tout effort de théorisation, en particulier celui que lui réclame le cours de mathématiques ou de physique.

Qui, par exemple, de l'un ou de l'autre de ces deux personnages pense avec son pragmatisme ou avec ses théories pures pouvoir sortir sa voiture tombée dans le fossé, alors qu'il est seul avec un enfant et ne dispose que d'une corde et d'un solide point fixe ?

Le bon sens seul et le manque d'entraînement physique les pousseront l'un et l'autre à se dire qu'ils n'ont pas la force de tirer seul leur voiture.

Si ce père "connaît" les vecteurs en tant que concept frotté à la réalité du monde sensible, il se dira que ce qu'il ne peut obtenir en tirant directement sa voiture avec une force de 50 kg, il peut y accéder en reliant solidement avec sa corde la voiture au point fixe, puis en tirant la corde par son travers.

Tout comme le blue-jean avec ses 3 kg..., le père avec ses maigres forces de 50 kg arrivera à exercer une tension sur la voiture dix à vingt fois supérieure ; cette force de près d'une tonne finira bien par "décoller" la voiture de son ornière (elle avancera jusqu'à ce que les deux brins de la corde fassent à nouveau un angle trop marqué pour que le facteur multiplicatif soit appréciable). L'enfant n'aura alors qu'à glisser des pierres sous les roues pour que la voiture ne recule pas lorsque la corde sera relâchée pour être retendue (pour ramener l'angle à zéro) et ils n'auront plus qu'à recommencer la manœuvre autant de fois qu'il le faudra pour que la voiture soit à nouveau sur la route.

C'est un peu long, me direz-vous ! Bien sûr... et tout le monde ne dispose pas d'une corde assez solide et raide en prévision de ses sorties de route à portée d'un arbre judicieusement placé !

Mais, si vous le voulez bien, et si nous ne souhaitons pas polémiquer pour le plaisir, je pense que vous avez parfaitement compris le sens de mon propos : après une telle expérience on n'est pas prêt à écrire : $\|\overrightarrow{V+W}\| = \|\vec{V}\| + \|\vec{W}\|$, même si tout un contexte numérique positif nous y pousse.

En définitive, si les mathématiques sont là pour nous aider à appréhender rationnellement les réalités de la vie matérielle, inversement les réalités de la vie matérielle nous avertissent rationnellement sur ce que ne doivent pas être les mathématiques !

LE CYCLISTE

PROBLÈME (À RÉSOUDRE DE TÊTE)

Pour monter au col du Coq, un cycliste arrive à tenir la moyenne de 14 km/h.

S'il reprend à la descente le chemin de montée, ***à quelle vitesse*** **ce cycliste doit-il** ***descendre*** pour parvenir, sur la totalité du parcours (montée + descente), à ***doubler*** sa vitesse de montée ?

$V_{Mont.}$ 14 km/h $V_{Desc.}$ = ?
|—————|—————|
← Vtot. 28 km/h →

Pour que
$V_{Tot.} = 2 \cdot V_{Mont.}$, il suffit que $V_{desc.}$ = ?
28 km/h, 42 km/h, 56 km/h, autre.

Institutionnalisation (texte donné aux étudiants après débat)

La grande majorité de l'amphi a choisi 42 km/h et une dizaine d'entre vous ont déclaré "c'est impossible", mais ils ont eu beaucoup de mal à faire entendre leurs raisons tant les convictions adverses étaient fortes.

Deux raisonnements qui s'opposent : le point de vue du *chemin* et celui du *temps*.

– $\mathbf{R_{chemin}}$ consiste à "suivre le cycliste le long du chemin".

chem.descente = chem.montée, donc vitesse de montée et vitesse de descente "contribuent dans la même proportion" à la vitesse totale.

La vitesse moyenne totale est donc la moyenne des vitesses partielles:

$$V_{Tot.} = \frac{V_{Mont} + V_{Desc}}{2}$$

Il suffit alors de tripler la vitesse à la descente pour que la vitesse moyenne totale double !

D'où la réponse majoritaire $V_{desc.} = 42$ km/h.

– $\mathbf{R_{temps}}$ consiste à "penser le problème dans le temps !"

Un **paradoxe** apparaît alors, dès qu'on ***suppose le problème résolu :***

Doubler sa vitesse moyenne signifie : dans un même temps deux fois plus de chemin.

En arrivant au sommet, on doit donc instantanément être revenu en bas !

Pour réussir à "doubler sa moyenne", ce cycliste n'a donc pas droit même à une seule seconde pour redescendre !

– $\mathbf{R_{chemin}}$ mis à l'épreuve du contre-exemple :

Si $R_{chem.}$ est valide, il l'est quelle que soit la longueur du chemin !

Si, par ex., $D = 14$ km , et que $V_{desc.} = 42$ km / h, par la relation fondamentale : "$D = V.T$" qui définit la vitesse moyenne, on obtient $T_{mont.} = 1h$, $T_{desc.} = 1/3h$,

donc $V_{tot.} = \dfrac{14+14}{1+1/3} = \underline{21 \text{ km/h}}$. ; or 21 km / h n'est pas 28 km / h et de loin !

*Le procédé qui fait "chuter" R_{chemin} peut nous faire **"converger" vers** $\boldsymbol{R_{temps}}$:*

Quadruplons $V_{desc.}$	$\rightarrow V_{Tot.} = 22{,}4$ km/h.
Quintuplons $V_{desc.}$	$\rightarrow V_{Tot.} = 23{,}33$ km/h.
Décuplons $V_{desc.}$	$\rightarrow V_{Tot.} = 25{,}45$ km/h.
Passons le mur du son	$\rightarrow V_{tot.} = 27{,}6$ km/h !
Atteignons la vitesse de la lumière	$\rightarrow V_{tot.} = 27{,}99999996$ km/h !

28 km / h apparaît donc ici comme une limite indépassable !

Lorsque $V_{desc.} \rightarrow +\infty$, $V_{Tot.} \rightarrow 28$.

– La force de l'algèbre

$\mathbf{R_{algèbre}}$: *A partir de la relation fondamentale $D = V * T$ liant Distance, Vitesse moyenne et Temps, on peut écrire les équations :*

$T_{mont.} = D / V_{mont.}$, $T_{desc.} = D / V_{desc.}$

$$V_{tot.} = \frac{D + D}{T_{mont.} + T_{desc.}},$$

donc $$V_{tot.} = \frac{2 * V_{mont.} * V_{desc.}}{V_{mont.} + V_{desc.}}.$$

– Synergie algèbre-analyse

*Le principe de base de l'analyse : **"quel est l'ordre de grandeur,** qu'est-ce qui compte vraiment dans cette relation?" nous conduit à réécrire cette formule pour "la faire parler !" :*

$$V_{tot.} = 2.V_{mont.} * \left(\frac{V_{desc}}{V_{mont.} + V_{desc.}} \right),$$

et on peut anticiper rationnellement !

En effet,

– $\frac{V_{desc.}}{V_{mont.} + V_{desc.}} < 1$

montre que l'objectif $V_{tot.} = 2.V_{mont.}$ ne sera jamais atteint.

– et si $V_{desc.} >> V_{mont.}$ $(V_{desc} \to \infty)$

alors, $\frac{V_{desc.}}{V_{mont.} + V_{desc.}} \to 1$

donc $V_{tot.} \sim 2.V_{mont.}$!

S'autoriser des vitesses "infinies" pour penser ce problème peut nous aider à comprendre pourquoi il est beaucoup plus efficace de pédaler fort à la montée plutôt que de prendre des risques inouïs à la descente.

– En résumé de cette première analyse :

R_{temps} nous *montre* de façon fulgurante que le *problème est impossible*,

$R_{algèbre}$ nous donne une "bonne formule" pour calculer $V_{tot.}$,

$R_{analyse}$ nous permet *à partir de cette formule* d'*interpréter le paradoxe* dégagé par R_{temps} et d'*envisager une stratégie* plus rationnelle pour améliorer la vitesse moyenne.

Mais... si tous ces raisonnements montrent que la règle de R_{chemin} :

> *"La vitesse moyenne totale est la moyenne des vitesses partielles "*

est "profondément fausse", ***aucun* ne nous explique véritablement *pourquoi* notre raisonnement spontané :** *" si les chemins partiels sont les mêmes, les vitesses correspondantes contribuent dans la même proportion à la vitesse moyenne globale"* ***est illégitime !***

> ***En quoi "pensons-nous mal" le réel en raisonnant ainsi ?***

**** Ce qui est effectivement vrai dans un cas très particulier :***

– à vitesse constante, la relation fondamentale entre distance et temps $D = V * T$ étant linéaire, si $V \neq 0$, on peut inverser les rôles entre D et T en écrivant la relation linéaire réciproque : $T = (\frac{1}{V}) * D$.

On a donc raison *dans ce cas* (à vitesse constante) de *penser le temps* de parcours et la *distance* parcourue "comme des grandeurs *synonymiques*", puisque doubler l'une revient à doubler l'autre.
C'est implicitement ce résultat qui est utilisé dans Rchemin , mais *abusivement* puisque *V n'est pas constante* !

***** Lorsque la vitesse "change par morceau"***, le lien entre distance parcourue, vitesse et temps s'obtient en appliquant la relation fondamentale $D_i = V_i * T_i$ sur chaque période de durée T_i où la vitesse demeure constante égale à V_i.

Pour notre cycliste, la relation fondamentale entre distance, vitesse et temps est donc :

$$D_{tot.} = V_{mont.} * T_{mont.} + V_{desc.} * T_{desc.}$$

En respectant la réalité, on voit donc apparaître deux *coefficients* Tmont. et Tdesc. qui *ne sont pas les mêmes* et qui de ce fait ***ne vont pas donner la même importance*** aux km/h "gagnés" à la descente par rapport à ceux *"perdus" à la montée* !

Généralisation de la mathématisation précédente au cas de n vitesses.

Pour mieux comprendre, envisageons le cas d'un mobile qui change n fois de vitesse sur une période globale de durée T :

$$\begin{array}{ccccccc} V_1 & V_2 & & & V_n & & \\ |\text{——}| & \text{—}| & \text{——} - - - - & | & \text{——} - - - - & | & \\ t_0 & t_1 & t_2 & & t_{n-1} & & t_n = t_0 + T \end{array}$$

La distance totale parcourue D s'obtient en appliquant n fois la relation fondamentale :

$$D_i = V_i \cdot \Delta T_i ,$$

$\Delta Ti = T_i - T_{i-1}$ désignant la durée de la période où la vitesse est V_i.

La relation fondamentale simple $D = V * T$ doit donc être remplacée par :

$$D = V_1 * \Delta T_1 + V_2 * \Delta T_2 + \ldots + V_n * \Delta T_n ,$$

somme finie résumée par le symbole

$$D = \sum V_i * \Delta T_i .$$

La notation intégrale au service de cette mathématisation de la réalité :

Si on regarde la *vitesse qui varie* par paliers entre les instants t_0 et $t_0 + T$ comme une *fonction* $t \to V(t)$ de $[t_0 , t_0 + T] \to R$, on nomme intégrale sur $[t_0 , t_0 + T]$ de la fonction V la somme précédente des vitesses partielles V_i affectées de leur coefficient durée Δt_i.

***On note* cette intégrale**

$$\int_{[t_0,\, t_0+T]} V(t)\ dt = \sum V_i\, \Delta t_i .$$

La relation globale $D = V * T$, simple mais inadaptée aux vitesses variables,

devient $D = \int_{[t_0,\, t_0+T]} V(t)\ dt$.

Le concept d'intégrale

***Faire l'intégrale* d'une fonction**

$$V : [t_0 , t_0 + T] \to R ,$$

c'est *sommer* les valeurs V_i prises par cette fonction V en les pondérant par leur "importance",

i.e. en multipliant ces valeurs V_i par des coefficients notés Δt_i, chaque *coefficient* Δt_i *tenant compte de "l'importance"* au cours du temps de la valeur Vi.

Ici, comme la *variable* est le *temps*, "l'importance de Vi " est marquée par la *durée* Δt_i pendant laquelle cette valeur est prise.

De façon générale, les symboles intégraux $\int_\Omega f$ $\iint_\Omega f$ $\iiint_\Omega f$ indiquant respectivement que la variable est dans R, R^2 ou R^3, se réfèrent au *même concept*.

Dans tous les cas, une très grande valeur f(x) de f peut n'avoir aucune influence sur le résultat intégrale *si elle est prise rarement* !

Par exemple :

– dans un déplacement : 150 km/h pendant 10^{-5} seconde → déplacement ≈ 0 !
– dans un objet, une densité de 10^5 sur un volume 10^{-10} m^3 → masse ≈ 0 !

Tout *dépend de la "mesure"* de l'ensemble Ω_i sur lequel la valeur f_i est maintenue !

Dans une intégrale, ce ne sont donc pas les valeurs f_i seules qui sont "capitalisées", mais

$$\mathbf{f_i \cdot mes\{x\ ;\ f(x) = f_i\}}\ .$$
$$\int_\Omega \mathbf{f = \Sigma\, f_i \cdot mes\{x\ ;\ f(x) = f_i\}}\ .$$

En quoi le concept d'intégrale peut-il, après coup, nous aider à mieux penser la réalité initiale du cycliste ?

Penser la distance comme intégrale de la vitesse suivant le temps permet de penser différemment la vitesse moyenne totale.

En effet $V_{tot.} = \frac{D_{tot}}{T_{tot}}$ peut alors s'écrire :

$$V_{tot.} = \frac{\int_0^{T_{tot}} V.dT}{T_{tot.}} = \frac{\sum V_i * \Delta T_i}{T_{tot.}}$$

$$\mathbf{V_{tot.} = \Sigma\, V_i \cdot \frac{\Delta T_i}{T_{tot.}}}\ .$$

La problématique de l'intégrale nous pousse alors à "lire" $V_{tot.}$ comme une *moyenne pondérée* des vitesses partielles.

Chaque valeur Vi compte en proportion de sa durée relative $\frac{\Delta T_i}{T_{tot.}}$.

Pour le cycliste

$$V_{tot.} = V_{mont.} \cdot \frac{T_{mont.}}{T_{tot.}} + V_{desc.} \cdot \frac{T_{desc.}}{T_{tot.}}\ .$$

Sous cet éclairage, on comprend mieux pourquoi :

– des *vitesses de descente "folles"* ne produisent pas l'accroissement de la moyenne que l'on attendait, puisque $\frac{T_{desc.}}{T_{tot.}}$ est petit.

– la vitesse de montée, malgré sa faible valeur, marque fortement le résultat final, puisque $\frac{T_{mont.}}{T_{tot.}}$ fait l'essentiel du pourcentage.

Comme ici $V_{desc.} \cdot T_{desc.} = D = V_{mont.} \cdot T_{mont.}$, toute augmentation de la vitesse de descente est presque totalement compensée par une diminution de la durée de descente.

D'où la relation qui "explique tout !" :
$$V_{tot.} = 2 \cdot V_{mont.} \cdot \frac{T_{mont.}}{T_{tot.}}\ .$$

Remarques importantes

1) L'intégrale n'est pas une panacée !

En effet le raisonnement erroné de R_{chemin} correspond aussi à une intégrale : celle de la vitesse le long du chemin parcouru ! (Intégrale qui a du sens en mathématiques, mais qui ne représente plus les grandeurs physiques vitesse, distance ou temps.)

La formule exacte $V_{tot.} = \frac{\int_0^{T_{tot}} V.dT}{T_{tot.}}$

admet une *version analogue erronée* :

$$V_{tot.} = \frac{\int_0^{D_{tot}} V.dD}{D_{tot.}} \, .$$

Relation qui redonne la formule erronée de R_{chemin} : $Vtot = \frac{V_{mont.} + V_{desc.}}{2}$.

2) Le cycliste, une métaphore pour l'intégrale

Nos intuitions spontanées nous trompent lorsqu'elles nous font croire qu'en allant suffisamment vite au retour, on peut au total doubler, voire tripler sa vitesse moyenne !

La connaissance du concept d'intégrale doit, dans des cas semblables, nous *rendre plus perspicaces :*

> une grandeur, même de très forte amplitude, peut n'avoir pratiquement aucun effet sur le résultat si elle ne se "produit pas souvent" !

A l'inverse, comme spontanément nous avons tendance à uniformiser (*i.e.* à supposer que lorsque des facteurs s'ajoutent pour "produire un résultat", ils interviennent tous "dans les mêmes proportions" !), la métaphore du cycliste peut nous aider à nous rappeler que dans toute intégrale, les valeurs fi ne sont pas en général comptées également, ne sont pas capitalisées isolément, ce sont les produits fi * mes{x ; f(x) = fi} qui sont sommés.

Notre travail sur l'intégrale pour la suite

Il s'agit maintenant pour chacun d'entre nous de :

1) Repérer des situations **particulières** où l'on sait facilement trouver un résultat R parce qu'**il suffit pour l'obtenir de faire le produit d'une grandeur fixe f** par une durée, une longueur, une aire ou un volume V.

2) Constater qu'**en général les situations sont plus complexes,** car pour évaluer le résultat R recherché, *il ne suffit plus de faire le produit d'une grandeur fixe f* par une autre, **la grandeur f qui intervient *étant variable*** au cours du temps (vitesse), le long du chemin (force), quand on se déplace sur une surface ou un volume (densité linéique, de surface ou de volume).

L'intégrale de f sur Ω sera l'outil mathématique qui pourra dans les cas favorables nous permettre de prévoir, de calculer, de maîtriser le résultat R si on connaît comment varie la grandeur f sur Ω.

On remplacera alors les formules linéaires :

Distance = Vitesse • Temps

$$\text{par} \quad D = \int_{[t0,\, t0+T]} V(t)\, dt \, .$$

Travail = Force • Déplacement

$$\text{par} \quad W = \int_{[a,\, b]} F(x)\, dx \, .$$

Masse = Densité • Volume

$$\text{par} \quad m = \iiint_{\Omega} \rho(M) dM \, .$$

On aura "gagné" lorsqu'on aura franchi quatre étapes :

1) On "connaît" des situations dans lesquelles on a compris pourquoi on ne "s'en sort pas" avec une simple linéarité et on sait pourquoi l'intégrale peut nous permettre de dépasser certaines difficultés (cycliste). **(L'intégrale a plusieurs sens concrets pour nous.)**

2) Quand une situation se mathématise bien avec une intégrale, on "le sent venir" et on arrive peu à peu à déterminer une fonction f sur un domaine Ω telle que :

$$\textbf{Résultat} = \int_{\Omega} f .$$

3) On comprend pourquoi l'outil intégrale ne peut se construire utilement (somme de Riemann) au moyen d'une seule formule magique. (Complexité d'un nombre réel, majorations, minorations, découpages et passages à la limite.)

4) **On est à l'aise avec l'outil mathématique intégrale. (Intégrale dépendant de la borne supérieure, majorations, minorations, calcul par les primitives, calcul numérique.)**

BIBLIOGRAPHIE

Michèle ARTIGUE, Laurence VIENNOT *et al.* (1987) : "Le thème "Différentielles", un exemple de coopération Maths-Physique dans la recherche (en didactique)", Actes du Colloque de Sèvres : *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Vergnaud et Coll., La Pensée Sauvage.

Gaston BACHELARD (1934) : *Le Nouvel Esprit scientifique*, PUF, Paris.

Evelyne BARBIN (1988) "La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques", bulletin n°366 de l'*APMEP*.

Rudolf BKOUCHE, Bernard CHARLOT, Nicolas ROUCHE (1991) : *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris.

Guy BROUSSEAU (1986) : "La théorie des situations", *R.D.M*, vol. 7.2., La Pensée Sauvage.

Alan F. CHALMERS (1976) *Qu'est-ce que la science ?*, Coll. La Découverte, Essais, Le livre de poche, 1987.

Bernard CHARLOT et Elisabeth BAUTIER (1993) : "Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques", *Repères IREM*, n°10, Topiques Editions.

Yves CHEVALLARD (1983) : *Remarques sur la notion de contrat didactique*, IREM de Marseille.

Hélène DI MARTINO, Daniel PINTARD, Nadia MICHALOPOULO (1991-1992) : *La situation du pétrolier*, DEA de didactique des mathématiques à l'Université de Grenoble.

Régine DOUADY (1986) : "Jeux de cadre et dialectique outil-objet", *R.D.M* vol. 7.2, La Pensée Sauvage.

ENSEIGNER AUTREMENT EN DEUG A 1re ANNÉE, Publications inter I.R.E.M., 1990.

Samuel JOHSUA, Jean-Jacques DUPIN (1989) : *Représentations et modélisations : le "débat scientifique" dans la classe et l'apprentissage de la physique*, Ed. Peter Lang.

Imre LAKATOS (1976) : *Preuves et réfutations, la logique de la découverte mathématique*, (traduction N. Balacheff, J.-M. Laborde), Hermann, Paris 1984.

Marc LEGRAND (1993) : "Débat scientifique en cours de mathématiques", *Repères IREM* n°10, Topiques Editions.
– (1989) : *La crise de l'enseignement, un problème de qualité*, Aléas Editeur, 15 quai Lassagne, Lyon.

Bernard-Henri LÉVY (1994) : *La pureté dangereuse*, Ed. Grasset.

Aline ROBERT, E. BAUTIER (1987) : "Apprendre des mathématiques et comment apprendre des mathématiques : premiers éléments pour une étude des représentations des élèves de l'enseignement post-obligatoire de l'accès au savoir mathématique", *Cahier de didactique des mathématiques*, n°41, IREM de Paris VII.