REPERES - IREM . N° 18 - janvier 1995

CONJECTURES SUR L'UTILITÉ D'UNE FORMATION MATHÉMATIQUE POUR LA VIE ÉCONOMIQUE ET SOCIALE

Gérard KUNTZ
Irem de Strasbourg

Au lieu de fulminer contre les ténèbres,
mieux vaut allumer une petite lanterne.
Proverbe chinois

Préambule (1)

Si l'on en croit un récent sondage (2), les mathématiques jouissent auprès d'une immense majorité d'élèves d'un grand prestige. Elles jouent un rôle essentiel dans la sélection scolaire et sociale répètent-ils avec leurs parents (3), et elles forment l'esprit (bien sûr, on le concède, d'autres disciplines aussi sont formatrices, l'hégémo-

(1) Cet article doit beaucoup, dans sa structure et sa forme, à ma collègue Huguette Pandolfo, professeur de lettres au lycée Couffignal. Je la remercie vivement pour ses critiques et ses suggestions qui ont considérablement amélioré les versions initiales de ce texte.
Il tente de donner un contenu précis à l'affirmation généralement admise : les mathématiques forment l'esprit. Il n'apporte pas de preuves formelles et irréfutables. Il faudrait pour cela mener des expérimentations longues et délicates, dans les milieux scolaires et professionnels. Beau sujet de thèse pour étudiants courageux !
La mise en évidence de faits nombreux et convergents entraîne ce qu'on appelle en droit une "intime conviction". Nous présentons ici des conjectures issues de l'observation des élèves, de la fréquentation des responsables d'entreprises et des innombrables débats qui accompagnent la recherche dans les Irem.
Nous attendons des lecteurs des critiques, des suggestions, des expériences convergentes ou contradictoires, en un mot l'ouverture d'un vaste débat pour mieux comprendre ce qui est en jeu dans l'enseignement des mathématiques, en relation avec la vie économique et sociale.
Loin de nous la pensée que la seule finalité de l'enseignement des mathématiques soit leur utilité dans les sphères économique et sociale. Elles ont en particulier un rôle primordial dans la construction d'une rationalité qui participe à l'intelligibilité du monde. Mais, en ces temps d'utilitarisme galopant, il n'est pas inutile d'établir qu'un bon apprentissage mathématique peut favoriser l'efficacité professionnelle.

(2) Enquête "Les Maths et Vous", menée en avril-mai 1988 sur un échantillon représentatif de 2400 lycéens.

(3) Le rôle sélectif des mathématiques dans l'enseignement a tendance à se réduire. D'autres voies d'excellence sont offertes aux étudiants. Jacqueline de Romilly plaide avec persévérance, talent

nie des mathématiques n'est plus qu'un souvenir). Leur utilité dans la vie professionnelle est présumée. Voici de bien flatteuses idées toutes faites ! Mais si dans notre société à dominante scientifique et technique elles semblent aller de soi, on ne peut s'empêcher, lorsqu'on change d'univers – par exemple lorsqu'on aborde l'enseignement des mathématiques en Afrique – de les mettre en question. Est-il raisonnable d'attribuer aux mathématiques la place prépondérante qu'elles ont dans le système scolaire ? A quelles conditions leur enseignement est-il formateur et utile au développement économique et social ? Dans une société très marginalement technique et scientifique, aux prises avec une crise économique dont on n'a aucune idée en Europe, l'accent mis sur l'enseignement des mathématiques est-il justifié, ou s'agit-il d'une tragique illusion, eu égard à l'environnement social et économique ?

L'idée de cet article est née à l'occasion d'une semaine de formation organisée par l'Irem de Niamey. A la mi-stage, deux animateurs de l'Irem de Strasbourg [(4)] ont présenté une conférence-débat sur ces questions, que la grande précarité économique et sociale, aggravée par une dévaluation de 50% du franc CFA, leur avait imposées. Cet article en est le prolongement et l'approfondissement. Il tente de comprendre ce qui, dans les mathématiques, forme l'esprit et le rend apte à appréhender et à traiter des questions qui, apparemment, ne leur sont pas liées. Il ne plaide pas pour l'enseignement tel qu'il est : par routine, par facilité, par paresse intellectuelle, sous la pression des "usagers" et de l'institution [(5)], le système scolaire privilégie souvent leur caractère sélectif aux dépens de leur aspect formateur et crée ainsi – en Afrique plus qu'ailleurs – des chômeurs diplômés qui, loin de participer au développement, aggravent le fardeau déjà insupportable de la misère. Il esquisse une démarche qui, plutôt que l'accumulation de techniques mal maîtrisées (et bien vite oubliées), privilégierait une compréhension réelle des processus intellectuels.

Le stage de Niamey concernait l'apprentissage de la géométrie au collège. C'est à elle que nous allons faire référence. Mais il n'est pas difficile d'élargir le propos aux mathématiques en général : la façon de raisonner de l'expert en géométrie n'est pas fondamentalement différente de celle d'un expert en analyse ! A quoi sert donc l'enseignement des mathématiques pour la vie économique et sociale ? (nombreux sont en effet les élèves qui n'en auront qu'un usage occasionnel).

En quoi les démarches mathématiques sont-elles transposables ? En quoi permettraient-elles d'appréhender (et de mieux

et succès pour la réhabilitation des lettres classiques. Le chapitre "Aimer le grec" de son livre *Ecrits sur l'enseignement* (éditions de Fallois, 1991), établit le caractère formateur de cette discipline, bien plus proche à cet égard des mathématiques qu'il y paraît. L'examen de fin de première année de médecine comporte aujourd'hui une épreuve d'histoire de la médecine et une dissertation d'éthique. Les temps changent...

(4) Jean-Claude Rauscher et Gérard Kuntz. La première partie de cette conférence, due à Jean-Claude Rauscher, paraîtra prochainement dans *Repères-Irem* sous le titre "Les virtualités de la géométrie au début du collège".

(5) Les familles et le ministère veulent des "résultats", c'est-à-dire des pourcentages élevés de succès aux examens. Ils s'entendent pour jeter un voile pudique sur les véritables contenus de formation que manifestent ces brillantes statistiques, par ailleurs flatteuses pour le corps enseignant (qui n'est pas dupe).

résoudre) des problèmes qui se posent dans la sphère économique et sociale ? Les situations étudiées ici ont été choisies pour leur caractère exemplaire, on pourrait les multiplier.

Comment donner aux élèves, par les mathématiques, des clés pour leur avenir ? Ces quelques réflexions ne devraient pas manquer d'encourager les collègues dans leur dur labeur quotidien : en faisant des mathématiques, ils font bien plus que des mathématiques !

Introduction

De la faible utilité immédiate des mathématiques dans la vie professionnelle

Le mythe de l'utilité des mathématiques dans la vie professionnelle ne résiste pas à l'épreuve des faits. L'immense majorité des élèves ingurgite, avec plus ou moins de bonheur, des notions mathématiques qu'ils n'utiliseront que très exceptionnellement dans leur futur travail ! La géométrie, dont nous vantons ici les mérites, est particulièrement "inutile" de ce point de vue : la démonstration géométrique ne nourrit personne (sinon les enseignants de mathématiques !). Une proportion impressionnante d'emplois permet d'ignorer jusqu'aux noms de Pythagore et de Thalès.

Les secteurs techniques et scientifiques n'échappent pas au constat de la faible utilité des mathématiques dans la pratique courante de l'entreprise. Techniciens et ingénieurs n'utilisent qu'épisodiquement une faible part des mathématiques qu'ils ont apprises. Seuls les laboratoires de recherches (et les enseignants de mathématiques...) les pratiquent au quotidien.

Cachez ces mathématiques que je ne saurais voir...

En réalité, les mathématiques sont omniprésentes dans toute activité technique ou scientifique. Mais, dans la grande majorité des cas, elles se cachent dans les logiciels spécialisés qui rendent les cadres de plus en plus performants (et qui ne sont pas étrangers à l'important chômage qui les frappe). Les algorithmes, les calculs scientifiques, certains raisonnements, sont transférés de l'homme vers la machine, ou plutôt de l'homme vers les équipes d'experts d'un domaine qui intègrent dans ces logiciels les mathématiques, souvent très sophistiquées, que l'utilisateur a apprises jadis et oubliées faute de pratique.

Il conviendrait dès lors de former le futur technicien ou ingénieur, à l'utilisation de ces logiciels. Ce n'est pas une mince affaire : contrôler la validité d'un résultat, sa vraisemblance, son ordre de grandeur, repérer les cas limites où les résultats affichés sont suspects, refaire alors les calculs avec d'autres outils, tout cela demande des compétences qui sont essentielles dans les métiers d'aujourd'hui et rarement enseignées.

Il convient de repenser l'enseignement des mathématiques dans cette perspective. De quels outils l'ingénieur (ou le technicien) a-t-il besoin ? Sous quelle forme les met-il en œuvre ? Faute de réponses précises, l'enseignement proposé aux futurs ingénieurs mêle inextricablement les aspects professionnels et culturels des mathématiques. L'absence de choix clairs et d'une connaissance précise des besoins de leur domaine d'application, conduit inéluctablement à une exhaustivité coûteuse pour la société et de surcroît inefficace pour les étudiants. Et bien évidemment, faute de temps [6], la formation aux mathématiques mises en œuvre dans les logiciels professionnels est laissée à l'initiative individuelle.

L'aspect professionnel ne saurait donc justifier, à lui seul, la place des mathématiques dans le parcours scolaire. Faut-il alors réduire leur importance dans la formation des jeunes, comme l'institution scolaire est tentée de le faire [7] ? Avant de prendre des décisions imprudentes et lourdes de conséquences pour l'avenir, ***il convient d'évaluer ce qui est en jeu dans l'activité mathématique****. Les travaux récents en intelligence artificielle l'éclairent d'un jour nouveau et font mieux comprendre son aspect "formateur", donc son utilité – même indirecte – pour les élèves.*

RADIOSCOPIE DE L'ACTIVITÉ GÉOMÉTRIQUE

La tentative, au cours de la dernière décennie, d'écrire des logiciels intelligents de géométrie, a rencontré de graves difficultés : après des tâtonnements infructueux, les équipes de recherche ont pris conscience qu'elles ne savaient pas comment un expert de géométrie résolvait des problèmes et pourquoi il était performant dans sa démarche. On s'est alors mis à observer la façon de travailler des experts, à expliciter les procédures mises en œuvre, à préciser leurs innombrables "non-dits" : la complexité du raisonnement géométrique est apparue. On a alors mieux compris les difficultés des élèves pour entrer dans ce monde, et le caractère extraordinairement formateur de la géométrie. On a surtout pris conscience qu'en faisant de la géométrie, on faisait bien plus que de la géométrie : *on introduisait les élèves dans le processus du traitement abstrait de l'information*, qui est au cœur de la société post-industrielle.

Dans une thèse récente [8], J.-M. Bazin propose une modélisation de l'expert en géométrie, fruit d'une observation approfondie des géomètres en action. Cette modélisation retient les traits essentiels de leur démarche. Elle met en évidence les temps forts de l'activité géométrique et permet d'en décrire les étapes principales [9].

L'information de base est en général

(6) Le manque de temps est un argument constamment avancé pour éviter de s'interroger sur les contenus et les méthodes. Le temps est-il employé de la façon la plus judicieuse ? Douloureuse question, qu'il faudrait pourtant se poser face aux difficultés que connaît le système éducatif.

(7) On assiste actuellement à un dangereux mouvement de balancier, qui risque de faire passer les mathématiques en-dessous du seuil critique où elles perdent l'essentiel de leur valeur formatrice. L'exemple des Etats-Unis doit nous rendre attentifs : d'énormes efforts y sont déployés dans l'enseignement public pour que la formation scientifique des jeunes retrouve un minimum de qualité (après un effondrement catastrophique de plusieurs années).

(8) *Geomus : Un résolveur de problèmes qui mobilise ses connaissances en fonction du problème posé*, Jean-Marie Bazin, Thèse de doctorat, Université de Paris 6. Laforia TH93/06.

(9) C'est l'un des apports importants de l'Intelligence Artificielle à la pratique pédagogique. La réalisation de didacticiels intelligents a obligé les concepteurs à s'interroger sur la manière de travailler des experts, à les observer et à mettre en évidence les temps forts de leur activité. La modélisation du comportement de l'expert souligne la nature profonde de l'activité géométrique et sa valeur formatrice : les démarches intellectuelles qui sont au cœur de la géométrie sont repérables dans de vastes secteurs de la vie sociale et professionnelle.

proposée sous forme d'un TEXTE en français courant (avec toute l'ambiguïté qui s'y rattache). Il s'agit d'une description de figure, avec en général l'indication d'un but à atteindre (démontrez que...). Dans le cas d'un problème ouvert, l'expert est appelé à formuler lui-même des conjectures.

L'information initiale va être traitée en plusieurs étapes : Elle est d'abord traduite sous forme d'un "dessin", où apparaissent les triangles, cercles, droites et autres objets décrits dans l'énoncé.

Ce dessin est ensuite codé, de façon que toutes les hypothèses soient accessibles d'un seul coup d'œil : égalité de longueurs, parallélisme ou orthogonalité de droites... Le dessin codé devient une figure géométrique.

Cette figure est un représentant d'une famille infinie de figures compatibles avec l'énoncé initial. L'abstraction de la démarche géométrique en résulte clairement: le discours qui s'appuie sur une des figures de la famille doit être pertinent pour toutes. C'est l'obstacle que ne reconnaît pas l'élève quant il déclare à propos d'une figure : "on voit bien que..."

L'expert enrichit spontanément la figure obtenue : qu'on lui parle d'un triangle rectangle inscrit dans un cercle, il introduit le milieu de l'hypoténuse, dans lequel il reconnaît le centre du cercle. Qu'une droite soit tangente en A à un cercle de centre O, il trace le rayon OA et code l'orthogonalité. Ces tracés supplémentaires, dont l'importance est souvent considérable, sont commandés par l'expérience de l'expert : il dispose d'une information liée à une mémoire structurée, source de ses performances.

Il veille à ne pas introduire inopinément une information absente de l'énoncé : les cas particuliers sont ainsi repérés (il les élimine ou les utilise à bon escient [(10)]).

De la figure enrichie, *l'expert extrait mentalement (ou graphiquement) toutes sortes de sous-figures* dont il connaît la pertinence et qui sont sources de conjectures. Ces sous-figures (et les conjectures associées) sont présentes dans le champ de vigilance de l'expert dès la lecture de l'énoncé et avant la résolution du problème. *De l'information globale que contient l'énoncé, il extrait des blocs d'information qu'il organise en fonction de son expérience et des buts éventuels qu'il poursuit.*

Suit une phase capitale, l'*étiquetage*. Après une première phase d'analyse réflexe de la figure, l'expert passe à la phase de contextualisation du problème. Il le rattache à des connaissances et des métaconnaissances pertinentes. Il affirme par exemple que le problème se traite avec les théorèmes sur la "droite des milieux", ou qu'il prend place dans le chapitre "parallélogramme" de quatrième, ou encore qu'une homothétie pourrait rendre des services. L'expert donne une ou plusieurs ETIQUETTES au problème. Il mobilise ensuite les connaissances et métaconnaissances liées à ces étiquettes : théorèmes, savoirs, expériences, méthodes... *La capacité d'étiquetage est une des raisons majeures des performances de l'expert.*

Après la phase d'étiquetage, la recherche de solutions devient possible : l'application des théorèmes sélectionnés aux objets ou configurations extraits dans les

(10) Les situations particulières sont souvent utiles pour vérifier la vraisemblance d'une conjecture ou d'un résultat algébrique. L'utilisation judicieuse des cas particuliers fait partie de l'expertise en géométrie.

phases antérieures conduit aux résultats recherchés ou enrichit l'information liée à la figure. Le problème modifié, enrichi, se présente comme un nouveau problème, avec une nouvelle figure, auquel l'expert applique l'ensemble du processus précédent (enrichissement de la figure, étiquetage, recherche de solutions). Les résultats intermédiaires conduisent parfois à un changement d'étiquette (la mise en évidence d'un parallélisme, d'un trapèze, peuvent faire penser à une homothétie, la découverte d'un triangle équilatéral à une rotation là où, jusqu'alors, des outils statiques étaient mobilisés). La difficulté d'enrichir géométriquement la situation peut nécessiter un changement complet de cadre : la géométrie analytique offre dans certains cas une issue qu'il serait absurde de négliger.

Cette démarche est répétée jusqu'à la mise en évidence d'une solution, ou de l'ensemble des solutions du problème.

A propos d'étiquetage

La force de l'expert réside dans l'*ORGANISATION* de ses connaissances. On peut représenter cette organisation par une famille de graphes dont les nœuds sont les étiquettes du paragraphe précédent. Chaque étiquette peut elle-même avoir une structure de graphe, avec ses propres étiquettes : plusieurs niveaux apparaissent de façon naturelle. L'étiquette "objets géométriques" est un nœud du graphe "géométrie du lycée", lui-même nœud d'un graphe plus vaste. Dans cette étiquette figurent, entre autres, les triangles et les quadrilatères. L'étiquette "triangle" se spécialise en "triangle isocèle" et en "triangle rectangle", elles mêmes spécialisées en "triangle rectangle isocèle" et en "triangle équilatéral". Une spécialisation de même type s'applique au quadrilatère (trapèze, parallélogramme, rectangle ou losange, carré). La hiérarchisation des objets géométriques est liée à la notion d'héritage des propriétés : à chaque spécialisation, les propriétés de l'étiquette-mère sont transmises à l'étiquette-fille (par exemple, le rectangle hérite de toutes les propriétés du parallélogramme). La structuration des étiquettes représente une considérable économie de pensée.

L'étendue et la densité du graphe représentant les connaissances caractérisent le niveau d'expertise : elles expliquent les performances (et, *a contrario*, les nombreux échecs dans l'apprentissage des mathématiques).

Face à un problème, l'expert repère une ou plusieurs sous-figures qu'il rattache à différentes étiquettes. En réalité, c'est sa grande connaissance des étiquettes d'un domaine et d'un niveau, *qui lui révèle* les parties de figures qui sont "intéressantes", c'est-à-dire porteuses d'information nouvelle. C'est son aptitude à parcourir les graphes mentaux qui lui permet de mobiliser des étiquettes nouvelles pour tirer des propriétés initiales ou provenant de l'enrichissement du problème les ultimes conséquences.

L'expertise géométrique requiert des graphes denses d'étiquettes. Spontanément, l'expert mobilise des graphes partiels, qu'il estime suffisants pour son projet (quitte à repousser leurs limites ou à en changer, en cas de besoin). Il est facile de montrer que toute la connaissance mathématique est structurée de la même façon.

Du vrac à la structure

On comprend aisément l'échec de l'élève si les étiquettes les plus élémentaires sont floues, et les liens entre elles lâches et hésitants. Travailler de façon approfondie sur les objets et les situations élémentaires (les étiquettes de base) et tisser de façon explicite des liens entre eux, constitue une ligne de conduite pour tout enseignant : encore faut-il que les élèves se prêtent à cet austère cheminement (qui s'inscrit dans la durée).

On comprend aussi l'extrême difficulté de ceux qui, dans le flou et sans avoir tissé de liens, souhaitent brusquement – en vue du baccalauréat par exemple – combler leurs lacunes : une vue nette et un réseau de connaissances ne se décrètent pas : ils sont le résultat d'un travail régulier et soutenu, dans la durée.

Pour faire de la géométrie efficacement, il ne suffit pas d'avoir de la connaissance en vrac : l'accumulation de théorèmes, plus ou moins connus et compris, est insuffisante pour démontrer. C'est un des obstacles majeurs sur lequel butent les enseignants aujourd'hui : beaucoup d'élèves se contentent de "grumeaux" de savoirs épars, et s'étonnent de ne pas progresser. Ils découvrent de plus, que ces savoirs sont volatiles. La mémoire n'est efficace et durable que si elle rattache les connaissances nouvelles à des étiquettes anciennes, ou si elle crée de nouvelles étiquettes dans le graphe. Une connaissance non structurée s'étoffe difficilement.

Un récent article (11) relate une expérience significative à ce sujet. Un échiquier est présenté à des joueurs aguerris et à des novices. Si la disposition des pions est aléatoire, la mémorisation de la situation est comparable dans les deux groupes d'observateurs (et au demeurant faible). Si la disposition représente une phase de jeu, les joueurs chevronnés retiennent parfaitement le schéma, battant à plate couture les débutants.

Nos élèves ont quelques excuses : le monde actuel accumule de l'information en vrac, qu'il déverse à flots. L'habitude du "zapping" ajoute encore à l'incohérence. L'arrivée des outils multimédias, dont on nous menace pour très bientôt, mettra le comble à la confusion : la masse d'informations coule sur l'utilisateur amorphe et contribue à son inculture, faute de s'ancrer dans un esprit structuré. La rapidité du défilement, qui va s'accélérer, ne peut qu'amplifier le phénomène (12). En revan-

(11) "Abstract planning and perceptual chunks : elements of expertise in geometry", Koedinger et Anderson, *Cognitive Science*, n°14, pp. 511-550.

(12) Ces nouveaux outils se caractérisent par la grande quantité d'informations disponibles simultanément sur un sujet donné. Pour une œuvre musicale par exemple, un texte, une partition et son exécution orchestrale progressent en parallèle. En mathématiques, calcul formel, calcul numérique et représentation graphique se partagent l'écran, mettant en évidence les liens et les dépendances. L'utilisateur peut arrêter le défilement et cliquer sur une partie de l'écran pour obtenir une information qui lui manque, puis reprendre ensuite le cours, à l'endroit où il l'a interrompu.
Ceux qui ont observé des élèves travaillant sur ordinateur savent leur extrême difficulté à lire sur l'écran des textes d'une certaine densité. Si l'on y ajoute des graphiques et des sons, beaucoup risquent de basculer de l'apprentissage vers le spectacle ou le jeu. La réticence à prendre des notes (c'est-à-dire à extraire de l'information pertinente) face à un écran, accentue encore la tendance à la passivité. Les copies d'écrans ne sont pas une bonne solution : elles représentent une information étrangère à l'élève, non travaillée et donc peu utilisable. D'autant que les explorations arborescentes (aide sur un mot ou une image) génèrent une information foisonnante.
Pour tirer parti de ces nouveaux outils, il faut des utilisateurs capables de saisir rapidement une information dense, mobile, multiforme et complexe. Beaucoup d'élèves seront submergés par la richesse même de ce qui leur est offert !

che, ces nouveaux outils contribueront à enrichir puissamment ceux qui disposent d'outils intellectuels adéquats : les informations éparses s'inscriront dans une structure, entreront en résonance et féconderont les "étiquettes" d'un réseau de savoir. Comme le dit l'Evangile, "On donnera à celui qui a, et il sera dans l'abondance, mais à celui qui n'a pas, on ôtera même ce qu'il a." (13) C'est l'école qui peut et doit structurer l'esprit de ceux qui lui sont confiés : le volume d'informations qu'elle diffuse est secondaire. Si elle perd de vue cette mission qu'elle seule peut remplir, l'ignorance ne peut que progresser ! (14) Mais peut-elle imposer aux chères têtes blondes, une discipline intellectuelle qui semble ne pas avoir cours en dehors d'elle ? (15)

Faire de la géométrie, et des mathématiques en général, a comme vertu principale de mettre en place des graphes mentaux et d'y cheminer. Dans un article à venir, nous montrerons que d'autres disciplines, le français, l'écomomie, l'histoire ou la géographie par exemple, poursuivent une ambition tout à fait comparable. Mais en mathématiques les objets et les situations sont relativement pauvres : un problème de géométrie recèle moins de complexité que le personnage de Dom Juan, ou l'économie mondiale ! Les graphes sont plus faciles à construire, et une description exhaustive des étiquettes de base est possible. On aura noté au passage l'abstraction du processus mis en œuvre : il s'agit d'un traitement d'informations, qui, transposé dans de nombreux domaines de la société, révèle toute sa puissance et sa généralité. Quand l'esprit a été structuré, il peut, dans bien des cas, oublier ce qui en a été le prétexte : une tête "bien faite" peut traiter avec succès des objets abstraits très divers selon le schéma que nous venons de décrire dans les grandes lignes. L'alternative n'est pas entre une tête bien faite et une tête bien pleine : *seule une tête bien faite peut se remplir utilement !*

(13) Parabole des Talents, Evangile de Matthieu, chapitre 25, verset 29.

(14) Les sociétés post-industrielles sont caractérisées par la disponibilité d'informations abondantes et de toute nature : livres, bases de données et médias audio-visuels les proposent ou les diffusent. Les capacités de trier, de hiérarchiser, d'extraire et de structurer sont capitales. Sans ces compétences, l'interrogation d'une base de données est peu productive.
L'omniprésence de l'information change la mission de l'école : elle n'est plus d'abord l'institution qui la génère et la transmet, mais celle qui forge aux élèves les clés d'accès à l'information disponible.
Or l'école hésite entre la diffusion d'un savoir pléthorique – souvenir du temps où elle était le lieu unique de transmission de la connaissance – et la formation des esprits, à partir de savoirs plus limités mais fondamentaux. C'est ce qui explique la faible productivité de l'école actuelle. Elle ne peut faire face à l'augmentation prodigieuse du volume de la connaissance qu'en structurant mieux l'esprit des élèves : faute d'y tendre et d'y parvenir, l'énorme investissement éducatif conduit à de cruelles déceptions.

(15) Dans les riches sociétés post-industrielles, l'école est de plus en plus un lieu étrange et singulier. En dehors d'elle, l'enfant et l'adolescent réalisent sans grande difficulté la plupart de leurs désirs : il leur suffit d'appuyer sur un bouton pour que la musique ou l'image soient au rendez-vous.
Les objets, les services et les loisirs sont d'un accès facile pour beaucoup d'entre eux. Leur coût étant payé par d'autres, ils finissent par imaginer un monde (un peu triste) ou le désir est satisfait, avant d'être clairement exprimé.
L'école est étrangère à cet univers de facilité.
L'accès au savoir a un coût pour l'élève : l'attention, la continuité, le travail personnel, l'effort pour comprendre des notions qui résistent, il s'en passe fort bien en-dehors du système scolaire !
Beaucoup d'adolescents se consolent mal de quitter plusieurs heures par jour, un univers agréable pour celui, exigeant, de l'école. Contraints et forcés, ils y perdent leur temps, victimes d'une illusion que le développement technique et la prospérité de leurs parents ont engendrée.

Les démarches intellectuelles mises en évidence dans l'activité géométrique, sont à l'œuvre dans des domaines de la vie économique et sociale où on ne les attend guère... Les exemples que nous allons développer ont été choisis parce qu'ils nous paraissent significatifs et qu'ils couvrent de vastes secteurs de l'économie. L'informatique, proche des mathématiques, utilise leurs outils et leur formalisme. On retrouve dans un Samu, ou dans le service commercial d'une entreprise, les traits principaux de l'activité géométrique. Et même, oh surprise, elle pourrait rapprocher des rationalités fort éloignées, celles des techniciens agricoles et des communautés villageoises malgaches !

VISAGES ET MASQUES DES MATHÉMATIQUES DANS LA VIE ÉCONOMIQUE ET SOCIALE

De la "bidouille " (16) à l'analyse structurée

L'informatique est à la fois distincte des mathématiques et très proche, par ses modes de pensée. L'enseignement complémentaire, pendant plusieurs années, des mathématiques et de la défunte option informatique dans les mêmes classes, m'a permis de préciser cette distance et cette proximité.

L'informatique, c'est le traitement par une machine (automatique), de l'information. Un programme informatique réalise le passage des données initiales aux résultats attendus.

Le handicap d'être génial...

En seconde, parmi les élèves qui choisissent l'option, il y a les vrais débutants, qui suivent modestement vos consignes et progressent lentement (mais sûrement) et les "passionnés d'ordinateurs" qui arrivent avec une pratique déja ancienne. Ils adorent programmer et vous montrent avec fierté des productions concoctées par leurs soins et qui n'ont pas moins de mille lignes ! Et qui "marchent" ! Devant un problème à traiter, ils écrivent spontanément le programme au clavier et ils le testent rapidement dans deux ou trois situations. Quand la chance est de leur côté, et que le problème est simple, ils arrivent ainsi à leurs fins. Mais que la situation à traiter se complique, et voilà que les erreurs s'accumulent. Ils les traquent, en corrigent certaines, mais en génèrent d'autres : ils s'aperçoivent, désappointés que plus rien ne tient ! Et de tâtonnements en reprises, ils finissent par obtenir de confus programmes à rallonges, qu'ils sont bien en peine d'expliquer. C'est vrai, finalement "ça marche" (encore que des surprises soient possibles lors de tests approfondis...), mais le programme est inexportable (que penser d'un logiciel qui, en entreprise, ne serait plus utilisable lorsque "l'initié" aurait changé de service... ?).

Ces élèves, qui ont bien des qualités, sont victimes de trois idées naïves et fausses : un programme est une suite plus ou moins longue d'instructions, sa mise au point se fait par tâtonnements, le travail est achevé quant "ça marche" dans un

(16) C'est un terme familier qui désigne une pratique informatique empirique, dépourvue de toute démarche méthodique. Etre traité de "bidouilleur" n'est pas vraiment un compliment dans le monde de l'informatique ! L'expression équivalente "petit génie de l'informatique" est employée par des gens qui parlent du domaine sans y connaître grand chose (on y trouve des hommes politiques, certains journalistes et... les parents de bidouilleurs) !

certain nombre de cas. Ils sont de ce fait condamnés à une véritable virtuosité, pour pallier l'absence de méthode, et repousser (annuler, rêvent-ils) les limites de leur science du moment.

Une minorité d'entre eux, persuadés que le professeur leur propose une démarche régressive, indigne de leur "génie", quittent l'option informatique en fin de seconde. Avec les autres, il est possible de déconstruire un savoir-faire mal assuré et sans avenir, puis de construire (à partir de leurs acquis), une forme de pensée proche des mathématiques.

Un graphe de fonctions et de procédures

Programmer, c'est résoudre un problème en choisissant les outils adéquats et les démarches pertinentes. Or il s'agit toujours de fonctions et de procédures, au sens mathématique de ces termes (et même, si les langages informatiques étaient assez élaborés, la seule notion de fonction suffirait). Et nous voici naturellement revenus aux mathématiques.

On passe ainsi d'un raisonnement par instructions (ligne par ligne) à un raisonnement par "tâches à accomplir" (bloc d'instructions), chacune se traduisant par une fonction ou une procédure. Ces outils s'écrivent chacun au moyen d'une dizaine d'instructions, qui font souvent appel à d'autres fonctions ou procédures.

Un programme informatique structuré est constitué d'un certain nombre de blocs (fonctions et procédures), de quelques lignes chacun, et d'un programme principal, en général très court, qui met en œuvre les outils précédents. On retrouve la structure de GRAPHE, dont la racine est le programme principal, et les nœuds, les fonctions et les procédures. Un arc du graphe traduit le fait que la fonction (ou la procédure) dont il est issu, appelle, dans son corps d'instructions, la fonction (ou la procédure) à laquelle il aboutit.

On comprend alors la difficulté (et l'intérêt !) d'écrire un programme informatique correct et fiable. Pour la résoudre, la virtuosité des "petits génies de l'informatique" a peu d'intérêt. Plus utile est la capacité à imaginer et à mettre au point les outils adaptés à la résolution du problème. Ces outils doivent être testés un à un, en partant des plus simples (ceux dont aucune fonction ou procédure ne dépend) et en remontant vers la racine du graphe. On se donne ainsi des moyens de contrôle indispensables, et la possibilité de détecter (donc de rectifier) au fur et à mesure les erreurs, au niveau où elles se situent, sans mettre en péril la construction d'ensemble.

Dans cette perspective, la longueur d'un programme n'est plus significative. C'est une bonne maîtrise de la notion mathématique de fonction, qui rend l'analyste performant. Il est très intéressant de faire produire aux élèves le graphe des programmes qu'ils écrivent : ils en visualisent ainsi la véritable complexité, en traduisant un programme de longueur moyenne par un graphe aux arcs multiples et enchevêtrés...

Les fonctions utilisées en informatique sont plus variées que celles mises en œuvre par les élèves en mathématiques. Les fonctions à plusieurs variables y sont d'un usage courant. Ces variables sont souvent de nature différente : réels, entiers, chaînes de caractères, tableaux, pointeurs, cohabitent dans les en-tête des fonctions.

Empruntées aux mathématiques, fonctions et procédures donnent à la démarche informatique cohérence, moyens de contrôle, élégance et économie. Leur usage intensif en informatique consolide ces notions essentielles et prépare leur généralisation en mathématiques.

Des liens logiques à la logique mathématique

L'écriture correcte d'une fonction suppose la connaissance et l'utilisation judicieuse des liens logiques : coordination par "et" ou bien "ou", négation d'une proposition (pouvant contenir ces conjonctions...), booléens et fonctions booléennes. Force est de constater les échecs répétés des élèves, dûs à leur méconnaissance des articulations logiques. Cette ignorance se manifeste dans de nombreux domaines autres que l'informatique (elle rend par exemple difficile la compréhension d'un texte, ou la rédaction d'une démonstration). Est-il bien raisonnable de faire silence, en mathématiques, sur des compétences capitales pour penser et communiquer clairement ?

En terminale, l'introduction (prudente) des langages déclaratifs (Prolog par exemple), fait appel à la logique des prédicats du premier ordre. Elle ne peut réussir que si les articulations logiques sont en place : elle constitue alors pour les élèves, une première découverte de la logique mathématique, outil de base d'une large partie de l'informatique.

Des obstacles au transfert de connaissances

On voit sans peine le lien étroit entre informatique et mathématiques, même si, en contre-exemples, des élèves "doués en informatique" et faibles en mathématiques, sont assez nombreux. Il est vrai que le "coefficient personnel" en informatique est important. Le plaisir de jouer puis de lutter avec une machine sophistiquée (et de la dominer), le narcissisme qui accompagne la "création" sur écran, les conditions plus ludiques de l'apprentissage, font qu'un certain nombre d'élèves -des garçons le plus souvent d'ailleurs (17) – sont plus passionnés, plus à l'aise et partant meilleurs, en informatique qu'en mathématiques.

Et pourtant ces élèves mettent en œuvre en informatique des notions et des démarches mathématiques subtiles et délicates (avec succès), sans progresser pour autant en mathématiques ! Hors du contexte où ils excellent, leurs capacités ne jouent plus : le transfert de compétences n'est ni automatique, ni garanti. L'histoire personnelle, le climat affectif et l'imaginaire peuvent le favoriser ou l'entraver.

On retrouve, dans les métiers de l'informatique les mêmes considérations que dans la défunte option informatique : de la capacité pratique (utilisateurs d'informatique, programmeurs, techniciens) à la compétence théorique de plus haut niveau (analystes, ingénieurs systèmes), l'importance des mathématiques est de plus en plus visible et considérable. En informatique théorique, le formalisme est tout entier mathématique.

Les médecins de l'urgence (18)

"Pour le grand public, l'activité du Samu, ce sont les ambulances qui interviennent dans un délai record. En réalité, nous sommes avant tout un organisme de

(17) L'option informatique attire une majorité écrasante de garçons. On retrouve ce quasi-monopole dans la passion pour les jeux vidéo. Les filles ont, sans doute, des centres d'intérêts qui ne se limitent pas au combat avec une machine. Leur plus grande maturité les protège de ce narcissisme infantile.

(18) *L'Express*, 24 février 1994, pp. 122 et 123.

régulation par téléphone des urgences médicales, afin de leur apporter la meilleure réponse possible" explique le docteur Daniel Jannière, du Samu de Paris. Et de préciser que la sortie d'une ambulance du Smur (service mobile d'urgence et de réanimation) rattaché au Samu, coûte 1000 francs la demi-heure...

Le centre de régulation des appels du Samu de Paris est un standard téléphonique complexe, où trois permanenciers reçoivent les appels et les passent aux trois médecins régulateurs, qui vont décider de l'intervention appropriée. En moyenne, 350.000 appels par an aboutissent à 60.000 décisions médicales de tous ordres, et seulement à 17.000 sorties d'ambulances.

L'activité d'un médecin régulateur ressemble trait pour trait à celle d'un expert en géométrie. Tous deux traitent de l'information abstraite, dont le médecin prend connaissance à travers le discours plus ou moins cohérent et éclairé d'un interlocuteur.

Avec une différence de taille : en géométrie, l'expert dispose d'un jeu cohérent et complet de données; en revanche, le médecin doit interroger son correspondant pour générer un tableau de symptômes à partir de quelques signes cliniques faisant craindre un péril imminent (à tort peut-être...).

Tout en poursuivant l'interrogatoire, l'expert médical organise les données recueillies en groupes de symptômes, liés aux étiquettes de sa science (probabilité d'infarctus, d'hémorragie interne, malaise sans gravité immédiate, à élucider par le médecin généraliste...). Ces familles de symptômes sont les équivalents des sous-figures de la géométrie : elles se rattachent à une ou plusieurs étiquettes d'un réseau de savoir et conduisent le médecin à formuler des diagnostics possibles. Les deux domaines présentent des similitudes profondes : *l'ensemble des symptômes constitue les hypothèses d'un théorème médical, dont la conclusion est un diagnostic.* Ces théorèmes sont explicités dans des systèmes experts médicaux comme SPHYNX ou MYCIN.

Bien qu'étant de même nature, la démarche du médecin est plus délicate et plus redoutable que celle du géomètre. Il est des symptômes discrets ou absents, des douleurs plus ou moins précises et appréciées en fonction d'une sensibilité particulière. L'information reçue peut être déformée, tronquée ou amplifiée par l'affolement de l'entourage du malade ou du blessé. Le médecin se trouve dans la situation d'un géomètre dont les théorèmes auraient des hypothèses peu sûres, et dont certaines pourraient manquer sans mettre en cause les conclusions de l'énoncé ! C'est pourquoi celles qui figurent dans les systèmes experts médicaux sont souvent affectées d'une probabilité, et indiquent explicitement les fausses pistes répertoriées (erreurs de diagnostic classiques !) (19). Mais surtout, si l'erreur de raisonnement du

(19) Voir *La Recherche*, nº151, Janvier 1984. Extrait de MYCIN.
Si le site de la culture est le sang
et si l'organisme est gram négatif
et si l'organisme est de forme bâtonnet
et si le patient est un hôte à risques
alors il est probable (0.6) que l'organisme est le pseudomonas aeruginosa.
Extrait de SPHYNX.
SI subictère, grosse rate, bilirubine libre prédominante, FN : anémie ferriprive, sidérémie augmentée, électrophorèse : hémoglobine thalassémique,
ALORS penser à : lithiase, cirrhose,
ignorer : minkowski-chauffard, déficit enzymatique.

géomètre n'a pas de conséquences vitales, celle d'un médecin régulateur peut conduire au drame.

Le service commercial d'une entreprise

Vendre les produits que crée l'entreprise est une activité d'une grande complexité. Il n'est pas question, dans le cadre de cet article, d'en faire une analyse exhaustive, mais de mettre en évidence certaines de ses composantes qui ne sont pas sans rapport avec la démarche géométrique.

Une équipe qui collecte de l'information

Qu'il s'agisse de machines-outils, d'automobiles, d'ordinateurs, de médicaments, de produits alimentaires ou de voyages, le vendeur doit d'abord parfaitement connaître les produits qu'il commercialise. Le service commercial rassemble et traite l'ensemble des informations qui les concernent.

Prenons l'exemple d'une société d'informatique qui lance un nouvel ordinateur. Il nous permet de décrire le processus de façon complète, et donc d'établir la parenté des démarches mises en œuvre dans les différents domaines (les lignes essentielles de notre exemple peuvent être généralisées sans difficulté).

Le service technique fournit à l'équipe commerciale un volume contenant l'ensemble des données techniques de l'appareil. Ce texte, illisible pour le profane et, au départ, hermétique pour la plupart des vendeurs, nécessite une formation interne à l'entreprise.

Il ne sert à rien de connaître parfaitement le produit s'il n'est pas placé dans son contexte. D'abord l'environnement de l'entreprise elle-même : qu'apporte de neuf l'ordinateur par rapport à ceux de la génération précédente ? Comment s'insère-t-il dans leur lignée ?

Les entreprises concurrentes ne peuvent être ignorées : y a-t-il des produits "voisins", quel est le degré de compatibilité avec telle ou telle "famille" ? La mise en réseau est-elle possible et fiable ?

Le client est le personnage central d'un service commercial : particulier ou entreprise, il décide du succès ou de l'échec (avec toutes ses conséquences) de la campagne de commercialisation. Il est présent, à travers les études de marché, de la gestation du produit jusqu'à sa mise en vente. Le service de maintenance veille à le satisfaire si un problème survient en cours d'utilisation. Ses besoins, ses habitudes, ses procédures internes et sa structure, sa culture et ses rêves sont des composantes essentielles qu'un service commercial doit connaître et prendre en compte s'il veut réussir.

La situation économique fait partie des paramètres de poids qu'il convient d'analyser, ne serait-ce que pour fixer un prix réaliste, compromis entre les coûts et les possibilités financières des clients. D'autant que dans l'économie de marché, la concurrence est impitoyable.

Les différents aspects que nous venons d'énumérer sont au cœur de toute politique commerciale. L'importance relative (et la complexité) de chaque aspect doit être modulée en tenant compte du domaine d'application.

En fin de parcours, le service commercial a accumulé une importante quantité d'informations, le plus souvent abstraites, qu'il va devoir traiter. Aux informations récentes, liées au nouveau produit, aux nouveaux clients éventuels, à la situation économique du moment, s'ajoutent les informations anciennes, rassemblées au cours du temps, qui constituent un des capitaux les plus précieux : la mémoire de l'entreprise. Il convient d'insister sur la nature des informations mises en jeu : quoi de plus abstrait que la structure interne d'une entreprise, les habitudes commerciales des Japonais, les rêves automobiles ou informatiques des Français, les paramètres d'une situation économique ? Une négociation commerciale peut se briser sur la méconnaissance de pratiques culturelles...

Une équipe qui traite de l'information abstraite

De la masse d'informations disparates accumulées, l'équipe commerciale extrait une information homogène et ciblée vers différents publics. Cela se traduit par une série de brochures ou de documents vidéo, de panneaux d'exposition et de courriers pour les clients. A cela s'ajoute une réflexion, de la plus haute importance, avec une agence de publicité chargée de la promotion du produit.

Si E est l'ensemble de l'information dont dispose le service commercial, son travail consiste à créer des sous-ensembles cohérents et accessibles à différentes catégories de clients potentiels.

La brochure technique E1 contient une description complète du produit et de ses composants, indispensable au service de maintenance : les caractéristiques techniques et les performances d'un ordinateur sont des paramètres capitaux pour une décision d'achat. Le contenu de E1 n'est accessible qu'à des spécialistes du domaine dont l'avis pèse lourd dans le choix final d'une entreprise.

Toute autre est l'information E2 destinée aux décideurs des entreprises. Seuls les paramètres techniques *décisifs* y figurent. Ils sont complétés par une argumentation concernant la nouveauté du produit, les progrès qu'il apporte par rapport au passé et aux concurrents, et sa compatibilité avec eux. Le prix y est souligné s'il est peu élevé, ou justifié eu égard aux performances promises. E2 renvoie évidemment à E1 en cas de besoin, mais n'est pas une partie de E1 : l'information y est organisée tout autrement. Si E1 permet au technicien de comprendre les performances du produit, E2 se contente de les décrire pour les décideurs.

Autre encore est le document E3 destiné au grand public : les données techniques sont réduites à leur plus simple expression. La facilité d'utilisation y est soulignée (et souvent exagérée...). L'usage qui peut en être fait est largement détaillé : aspect éducatif (c'est un produit utile), ludique (il occupe les loisirs), de promotion sociale ("vous faites partie de l'élite..."). Une argumentation de ce type serait ridicule dans E2 : l'entreprise connaît parfaitement les fonctions du produit qui lui est proposé.

Enfin le document E4, publicité du produit, joue sur une vaste gamme d'expressions : de la publicité informative au spot de quelques secondes à la télévision ou au cinéma, les possibilités sont considérables. Une page dans un journal pour décrire et vanter un produit, cela s'apparente au document E2. Le spot publicitaire s'adresse bien plus au rêve. Il travaille par associations d'idées, flatte l'ego, cherche à faire rire : le contenu en informations d'E4 au sujet du produit est voisin de zéro. En revanche, il s'alimente à l'imaginaire social, domaine flou, sensible et versatile : ainsi s'expliquent les remarquables succès, ou les échecs catastrophiques de certaines campagnes publicitaires, suivant qu'elles avaient choisi ou non un bon angle d'attaque. Une campagne publicitaire ne saurait ignorer les traditions, les valeurs de ceux à qui elle s'adresse : il est essentiel de bien mesurer le poids relatif des arguments, des images et des sons dans les différentes cultures.

De E1 à E4, l'information contenue dans E a été extraite, hiérarchisée, formalisée (rédigée ou mise en images et en sons). A chaque stade, elle doit être claire, agréable dans la forme, sans ambigüité quant à la cible. Chaque étape correspond à un autre regard organisateur et structurant sur l'ensemble E, dont la nature abstraite ne fait aucun doute.

Le parallèle entre l'activité mathématique et le travail d'un service commercial est frappant : les qualités développées dans l'une sont précieuses dans l'autre.

Une fable moderne : le paysan et le technicien

Des rizières et des hommes

Dans les années 70, le gouvernement malgache entreprit une grande campagne de vulgarisation agricole, destinée à développer le rendement des rizières, pour faire face à l'explosion démographique. Les techniciens agricoles, formés à l'université, furent chargés d'adapter les paysans aux nouvelles techniques : plantation du riz en ligne, utilisation d'engrais et de petit outillage devaient améliorer sensiblement la vie des villageois, en augmentant la qualité et le volume des récoltes, et en rendant le travail moins pénible.

Un village de la côte est de l'île reçut ces techniciens avec tous les honneurs dûs à leur rang. Les hommes suivirent avec intérêt la formation que le gouvernement, dans sa grande bonté, leur destinait. Ils notèrent tous les avantages que les nouvelles techniques allaient leur apporter. Ils remercièrent les techniciens pour l'outillage et les engrais qu'ils leur laissaient et dont ils ne manqueraient pas de faire bon usage. Puis, après le départ de la délégation, ils se mirent au travail. Ils appliquèrent les nouveaux préceptes avec enthousiasme et humour : rien ne fut négligé pour combler d'aise les techniciens lors d'une future visite.

A leur retour, ceux-ci furent stupéfaits : à l'entrée du village, une rizière, unique en son genre, avait été cultivée selon les préceptes nouveaux. A perte de vue, les autres rizières avaient gardé l'allure ancestrale. Cette histoire fit rire tout Tananarive. Elle est exemplaire de l'humour des paysans malgaches, et de l'incompréhension entre les anciens et les modernes, dans le Tiers-Monde. Elle n'est pas sans rapport avec notre sujet...

La rizière abstraite du technicien

Pour le technicien, comme pour le paysan, la rizière est un objet absrait, hautement élaboré : nous sommes en présence de deux *types structurés*, au sens que donnent à ce terme les informaticiens [20] : la "Rizière_du_technicien" et la "Rizière_du_paysan". Elles ont peu de points communs, et leurs hiérarchies internes sont totalement différentes. On peut les représenter par des graphes : les nœuds du premier sont de nature quantitative, ceux du second privilégient les aspects qualitatifs.

Egrenons les champs de la"Rizière_du_technicien". On y trouve des nœuds descriptifs : la forme de la parcelle, sa superficie, la nature du sol, la variété des plants, le type et la quantité d'engrais nécessaires, le rendement, le type d'irrigation, l'outillage adapté, la situation dans l'environnement, les techniques agricoles utilisées. Tous ces nœuds sont interdépendants : forme et superficie peuvent constituer un obstacle à la mécanisation et influer sur le rendement; s'il est trop faible, il n'y aura pas d'argent pour acheter des engrais... Un autre nœud de ce graphe est de nature prospective : il répond à la question : "comment transformer les paramètres actuels pour obtenir une meilleure récolte ?" Il recense les méthodes dont la mise en œuvre accroîtrait le rendement.

La "Rizière_du_technicien" représente le savoir et les méthodes qui font de lui un expert agricole. Tout s'articule autour d'une notion centrale, le rendement, dont la croissance est indispensable pour nourrir la population et pour garantir le niveau de vie du paysan.

La rizière métaphysique du paysan

La "Rizière_du_paysan" répond à une logique toute différente. Elle est avant tout *la terre des ancêtres*, le lieu où les générations successives ont travaillé, répétant les mêmes gestes, à la frontière de l'agricole et du rituel. Dans la communauté villageoise, la vie est un tout, et les activités productives participent au SENS de la vie. Le riz est bien plus qu'une nourriture : il témoigne, trois fois par jour, de la bienveillance des ancêtres. Il n'est qu'accessoirement objet de commerce : le village produit pour sa propre consommation. C'est sous la pression du gouvernement, par le truchement de l'impôt, qu'un surplus est produit et vendu. L'idée d'accroître le rendement n'a pas grand sens dans un tel contexte. L'agriculture participe d'un double mouvement : elle est l'un des points de contact avec les ancêtres et un moyen essentiel de cohésion sociale. Le réseau de connaissances développé dans la "Rizière_du_paysan" n'a rien à envier, en rationalité et en complexité, à celui du technicien : ils sont simplement de *nature différente.*

Il est alors facile de comprendre l'histoire qui précède : elle traduit la rencontre superficielle et polie de deux savoirs trop hétérogènes pour s'enrichir l'un l'autre. La transmission du savoir technique échoue sur l'absence de compréhension et de prise en compte de la représentation mentale du paysan (le savoir du paysan est généralement méprisé par les techniciens universitaires qui le jugent "irrationnel").

Une rizière de synthèse ?

A partir des deux modèles précédents, il

(20) Pour cerner au mieux un problème, les informaticiens créent des ensembles d'objets appelés types structurés. Pour la gestion d'une entreprise par exemple, le type "employé" contient les champs suivants : nom, prénom, date de naissance, état-civil, date d'entrée, nature de l'emploi etc... La date de naissance est elle-même un type structuré à 3 champs : jour, mois, année. Le type structuré "employé" décrit un ensemble, chaque employé particulier étant un élément de cet ensemble.

conviendrait d'en bâtir un troisième, la "Rizière_de_synthèse", qui en intègrerait les traits vitaux. Impossible de faire évoluer le paysan par l'appât du gain qui n'a pour lui aucune séduction. L'idée de solidarité, en revanche est au cœur de son expérience et de ses valeurs. Placez la notion de rendement dans la perspective d'une solidarité entre la campagne et les villes, entre les jeunes et les vieux (par la création d'écoles) et le discours prend une autre dimension ! Il a alors une chance de toucher l'oreille, puis le cœur, c'est affaire de temps, et l'école joue dans cette évolution un rôle capital.

Des mathématiques pour réduire les rigidités sociales

L'histoire du technicien et du paysan permet de comprendre certaines raisons qui empêchent le transfert de connaissances. Ne pas prendre en compte le savoir de l'autre (ou pis encore le mépriser), bloque tout apprentissage. L'absence de communication entre les domaines, l'habitude du cloisonnement mental, stérilisent le savoir : il est essentiel, dès le plus jeune âge, de jeter à l'école des passerelles entre les disciplines et de rendre sensible à ce qu'il y a de commun dans des démarches intellectuelles sans lien apparent.

L'enseignement des mathématiques a, dans le Tiers-Monde, une particulière importance. Il complète la rationalité sociale omniprésente et conservatrice, par une rationalité de type opératoire, indispensable pour comprendre le monde et agir sur lui. Il bouscule l'esprit et l'oblige à complexifier, à réorganiser les connaissances et les méthodes. Il peut aider les jeunes générations à faire, dans leurs propres traditions, le tri entre les valeurs stables – les invariants de leur culture – et les aspects appelés à évoluer. Est-il nécessaire, par fidélité aux ancêtres, de reproduire les gestes peu productifs de l'agriculture ancienne ? L'amélioration des méthodes ne peut-elle être vécue comme une forme supérieure de fidélité ? Le technicien doit à son tour s'interroger sur son modèle de rizière : est-il raisonnable d'ériger un modèle qui évacue totalement le sens ? Les sociétés post-industrielles découvrent les ravages d'un système dont la productivité est le maître-mot exclusif et qui engendre chômage, angoisses et frustrations.

Les situations que nous avons examinées et que nous pourrions multiplier contiennent un faisceau de faits qui semblent indiquer l'importance de "l'esprit de géométrie" pour s'inscrire intelligemment dans une société. Nous allons maintenant passer cette conjecture au crible d'une réflexion critique.

QUELQUES BÉMOLS DANS UNE MÉLODIE TROP ALLÈGRE.

Le transfert de compétences : mythe ou réalité ?

Lorsqu'on écrit un article ou un essai, on risque toujours de simplifier (ou même de tordre) la réalité, pour mieux la faire entrer dans le moule d'une pensée préexistante. Dans les exemples qui précèdent, nous avons mis en évidence la parenté de certaines façons de penser avec les mathématiques. Mais comparaison n'est pas raison. Le transfert de compétences paraît possible, mais il rencontre de rudes obstacles, dont la nature est didactique, mais aussi psychique et affective. Le moment est venu de réfléchir plus avant aux conditions qui le rendent possible, le favorisent ou l'entravent.

Dans les exemples qui précèdent, nous avons repéré, dans la vie économique et sociale, des démarches intellectuelles qui, sans être clairement des mathématiques, s'en inspirent de façon étroite. Nous avons laissé entendre que les compétences acquises en mathématiques pouvaient être transférées dans des secteurs d'activité parfois trés éloignés, où le profane ne discerne pas leur présence. Ce postulat fait l'objet d'un très vif débat en sciences de l'éducation. On en trouve une analyse détaillée et stimulante dans l'ouvrage de Philippe Meirieu et Michel Develay, "Emile, reviens vite... ils sont devenus fous" (21). Nous partageons leur conviction que des transferts de compétences sont possibles, sous certaines conditions précises et contraignantes, que nous allons examiner (22). Nous constatons que l'école ne prête guère attention à cet aspect qui nous paraît pourtant capital. Faut-il s'étonner, dès lors, que les jeunes diplômés n'aient pas les compétences qu'on attend d'eux en entreprise ?

La possibilité de transférer les compétences devrait être un objectif pédagogique majeur de tout apprentissage. Pour qu'il devienne réalité, il faut s'en donner les moyens. Meirieu et Develay distinguent trois étapes pour y parvenir.

(21) *Emile reviens vite... ils sont devenus fous*, ESF éditeur, collection pédagogies, 1992.

(22) Nous reprenons ici l'argumentation de Meirieu et Develay, pages 144 à 167, en l'illustrant d'exemples plus nettement mathématiques. Ces pages résument les profonds débats qui traversent les sciences de l'éducation.

Apprendre des mathématiques utilement...

Contextualiser...

Tout apprentissage s'accomplit d'abord dans un contexte précis et réduit, autant que faire se peut, au seul sujet de l'étude : le théorème de Pythagore est introduit par exemple à l'aide d'un triangle rectangle ABC, seul objet au tableau ou sur la feuille. On le retrouve ensuite dans des situations simples, que des informations parasites ne viennent pas brouiller. Puis il est mis en œuvre dans des exercices où l'élève repère facilement les triangles rectangles et où les consignes sont très précises. Dans cette première étape, le contexte est simplifié à l'extrême et les exercices ont, de ce fait, un caractère résolument artificiel. Afin de créer du sens pour l'élève et de faciliter son investissement, il importe de bien montrer, dans cette phase, ce que le théorème apporte de possibilités nouvelles.

Lorsqu'en classe de première on introduit la notion de nombre dérivé, il est important de faire précéder la définition générale (incompréhensible si elle est donnée sans préalables) de l'étude approfondie de plusieurs exemples qui aient un sens intuitif pour les élèves. Le passage de la vitesse moyenne à la vitesse "instantanée" d'un point mobile sur un axe, ou celui de la sécante à une courbe, à la "tangente" en un point de celle-ci, constituent des exercices préliminaires essentiels (d'ailleurs fort délicats), qu'il convient de traiter dans tous les détails. Chaque situation doit être reliée aux connaissances antérieures, en particulier à celle de limite (qu'il faut sans aucun doute rafraîchir à cette occasion) [23]. Dans un second temps, on met en évidence ce que les exemples traités ont en commun : alors, mais alors seulement, on peut tenter une définition générale du nombre dérivé, qu'on illustre ensuite par des exemples simples, nombreux et significatifs.

L'acquisition de toute notion nouvelle est déstabilisante : par l'élève en difficulté, elle peut être ressentie douloureusement. Il convient donc de rassurer, d'insister sur l'importance de la durée dans la compréhension, de créer du sens et un climat de confiance. Les facteurs psychologiques sont ici d'une extrême importance.

“Ceux qui nient l'utilité de cette contextualisation pour immerger directement les élèves dans l'abstraction, coupent les chemins des contrées où ils voudraient les conduire” [24]. A la fin de cette première étape, les élèves disposent d'un outil neuf, qu'ils ont mis en œuvre dans un contexte donné, sur des problèmes choisis par l'enseignant. Malheureusement, l'apprentissage se limite souvent à cette seule phase : l'évaluation des acquis se borne alors à reproduire, avec de légères variantes, les exercices déjà pratiqués. On connaît ces auto-écoles qui forment les futurs conducteurs sur des parcours répétitifs, ceux-là mêmes qu'ils empruntent, flanqués de l'inspecteur, lors de l'examen du permis de conduire. Leurs taux de réussite sont bons. Rendent-elles service aux clients qui, le lendemain, devront affronter l'imprévu des routes ?

(23) La démarche esquissée ici traduit un choix pédagogique. Ce n'est pas le seul possible et cohérent. Les autres progressions pédagogiques imposent des contraintes analogues.

(24) Ouvrage de la note 21, page 162.

Le graphe des connaissances vient de s'enrichir d'une étiquette nouvelle. Il faut dans les deux étapes qui suivent, la rattacher aux multiples étiquettes anciennes du paysage mental des élèves. Et cela ne va pas sans douleur !

Décontextualiser...

Sans jeter immédiatement nos apprentis conducteurs sur le boulevard périphérique parisien aux heures de pointe, il convient de leur faire découvrir progressivement les chemins de la liberté.

Le théorème de Pythagore s'applique à d'innombrables situations, et ne saurait se limiter aux seuls problèmes originels d'arpentage de champs qui servent parfois à l'introduire. Il faut apprendre à l'utiliser dans un problème où le parallélisme domine, ou dans le cercle trigonométrique. Il est souvent un chaînon, court mais indispensable, dans une démonstration qui fait appel à d'autres outils. Il est temps de dépasser les situations concrètes du début, et d'accéder à une compréhension suffisamment abstraite, qui permette, dans des contextes nouveaux, son application.

Le parcours est analogue pour la notion de dérivée : ses usages multiples dans tous les domaines de l'activité humaine, nécessitent un travail approfondi d'assimilation. Que le nom de la variable change, qu'un paramètre complique la situation, et voilà nos élèves incapables d'utiliser leur savoir, qui semblait pourtant acquis sur des exemples “voisins” ! Que le physicien utilise ses notations ou ses raisonnements propres et voilà qu'ils ne font plus le lien avec les mathématiques ! Que le problème traite de l'évolution d'un phénomène biologique, ils se découvrent soudain incapables de mettre en œuvre le bel outil mathématique pour décrire le phénomène et l'interpréter ! Rien d'étonnant à cela : la phase de décontextualisation ne fait guère partie des préoccupations du système éducatif et se trouve, faute d'intétêt, donc de temps, réduite à presque rien.

Les transformations géométriques illustrent à merveille notre propos. Là plus qu'ailleurs, la décontextualisation est absente. On ne les utilise guère que dans le chapitre qui leur est consacré ! Et la plupart du temps, les énoncés proposent ou imposent les transformations pertinentes. Mais que ces indications viennent à manquer, qu'un problème soit posé dans un autre contexte, et voilà nos élèves amnésiques ! Il suffit de passer en revue les exercices de géométrie du baccalauréat C pour se persuader de leur caractère hyper-directif (25). Qu'ont-ils de révélateurs d'une formation ? Pour des raisons statistiques, liées à la demande sociale, on ne cherche pas à vérifier l'acquisition de démarches fondamentales. Reconnaître dans une figure statique les éléments qui la rendent susceptible d'un traitement dynamique, par une transformation, est une expertise qui ne tombe pas du ciel ! Elle s'acquiert par un travail approfondi sur des figures multiples et significatives, en dégageant des heuristiques qui n'ont rien d'évident. Il s'agit d'un exemple typique de changement de registre, d'étiquetage, dont nous avons souligné l'importance dans la vie économique. Or les sujets d'évaluation révèlent le renoncement, la capitulation du système éducatif devant cette forme de compétence si précieuse dans l'entreprise ! (26)

Pour être menée à bien, cette étape demande du temps, beaucoup de temps. Mais l'objectif paraît plus utile et plus exaltant, davantage porteur de sens, que l'accumulation séquentielle de savoirs morcelés et mal reliés. Entre quantité et qualité il faut choisir. Le choix actuel n'est pas convaincant.

Nous retrouvons dans cette deuxième étape la fameuse distinction de Piaget entre "réussir" et "comprendre". La réussite s'accroche au produit, elle est absorbée par la tâche. La compréhension, elle, est du côté du processus, elle se dégage progressivement des contraintes particulières d'une tâche donnée, elle accepte de surseoir à une certaine efficacité dans l'action, pour s'attacher à ce qui permet de mettre en lumière les raisons de cette efficacité.

Force est de constater que sur bien des plans, l'école s'attache à la réussite immédiate, aux dépens de la compréhension en profondeur.

Recontextualiser, jeter des ponts...

A ce stade, la démarche pédagogique n'est pas encore achevée. Tant que l'élève ne sait pas utiliser ses outils neufs dans des situations nouvelles, tant qu'il ne sait pas repérer les classes de problèmes qu'ils permettent de traiter, il reste dépendant de la situation d'acquisition, et ses connaissances sont fragiles et volatiles. Il reste à *établir des ponts* entre les connaissances nouvelles et des situations où leur

(25) Cela peut se comprendre dans le cadre d'une épreuve en temps limité. Mais où évalue-t-on les autres capacités, bien plus indispensables dans la vie sociale et professionnelle ? Les thèmes de fin d'études en section de techniciens supérieurs pourraient fournir d'utiles pistes de réflexion.

(26) *Cf.* note 25. Voir aussi dans *Repères-Irem* n°7, l'article "Quelques idées d'activités glanées au contact des entreprises."

application se révèle pertinente. Le travail prend alors nécessairement un caractère interdisciplinaire, et la forme d'une recherche individuelle ou en groupe. De quelles statistiques se sert-on en géographie ? Quels phénomènes met-on en évidence ? Comment interpréter les résultats ? Comment de sèches statistiques éclairent-elles des comportements sociaux ? On voit des élèves se passionner en découvrant la capacité de l'outil statistique à révéler les mouvements profonds de la société.

L'usage constant des statistiques et des probabilités en entreprise, justifie leur importance dans les sections de techniciens supérieurs. Pourquoi ne pas inviter ces élèves à découvrir, sur le terrain, les applications de ces techniques, par exemple dans le contrôle de qualité d'une chaîne ? Le dialogue avec les cadres les convaincra, mieux que le professeur, de l'utilité de cet enseignement, de ses nécessaires extensions, de la puissance et de la fiabilité des outils mis en œuvre. Ils verront aussi les différences de formalisme et le sens des résultats obtenus pour l'entreprise. Une enquête dans un institut de sondages leur fera voir les applications au champ social et politique. Ils prendront conscience de la distance entre les résultats et leur interprétation, et des risques de manipulation de l'opinion.

A partir de la notion de dérivée, d'innombrables ponts ne demandent qu'à être jetés vers d'autres disciplines. Comment diable le biologiste obtient-il l'équation différentielle qui commande la concentration d'un produit injecté dans le sang, au fil du temps ? Et le physicien ? Et l'économiste ? Et le sociologue ? Comment raisonnent-ils sur les variations d'un phénomène, pour trouver, universellement, des dérivées et des équations différentielles ? Autant de questions passionnantes qu'une recherche sur documents, ou qu'un dialogue avec un expert peuvent éclairer. C'est ainsi que le concept de dérivée se fixe définitivement dans l'esprit. Ce n'est pas seulement une obsession du professeur de mathématiques. La dérivée est indispensable dans tout le champ scientifique. Avec des formalismes divers, elle permet de décrire des invariants, là où tout semble évoluer. Une prise de conscience aussi forte est susceptible d'éveiller l'intérêt, et par suite l'investissement, de certains élèves.

Quant à la géométrie, on ne peut s'en passer lorsqu'on travaille avec des logiciels de DAO ou de CAO [27]. Concevoir des produits industriels, c'est créer dans l'espace des objets géométriques souvent fort compliqués et mobiles les uns par rapport aux autres. Il convient de s'assurer de la conformité avec le cahier des charges, des possibilités de mouvement relatif des pièces (sans chocs ni bris). "Voir dans l'espace" est indispensable, même si le logiciel permet de regarder l'objet "sous toutes les coutures" ! Les enseignants de mathématiques ne savent pas toujours quelles démarches géométriques sont nécessaires dans ces activités. Elles sont souvent différentes de celles qu'ils traitent en mathématiques. Un travail interdisciplinaire rendrait possible une harmonisation, et persuaderait les élèves de l'utilité de la géométrie dans l'espace, dont ils voient mal le lien avec la DAO ou la CAO. L'absence de ponts est préjudiciable aux deux domaines.

Il reste enfin à mettre en évidence des ponts entre les démarches intellectuelles des différentes disciplines que les élèves pratiquent durant leur scolarité. Tout au

(27) Dessin Assisté par Ordinateur et Conception Assistée par Ordinateur.

long de cet article, nous avons montré les analogies de raisonnement et de traitement dans des domaines de prime abord fort éloignés. Mettre en évidence ce qu'ont en commun l'activité géométrique et la contraction de texte, ou l'analyse de documents en économie, c'est ouvrir des horizons et donner sens et noblesse à chaque activité. C'est sans doute l'aspect le plus délicat de cette recontextualisation, mais pas le moins important. Il demande au professeur la compréhension en profondeur de ce qu'il fait et de ce que mettent en jeu les autres disciplines, pour souligner les convergences, et aussi, bien entendu les spécificités.

Une déstabilisation dynamique

On comprend sans difficulté les raisons qui limitent de plus en plus l'enseignement à la première étape, avec des incursions en lisière des deux autres. Lorsqu'un sportif apprend un nouveau geste, il perd en efficacité globale dans un premier temps. Il devient plus performant lorsque ce geste est maîtrisé et replacé dans l'ensemble des techniques disponibles. Dans l'éducation nationale l'élève ressemble à un joueur de tennis qui assimilerait successivement différents coups, sans jamais disputer un match ! Son examen consisterait à prouver l'efficacité de chaque geste, sans les enchaîner.

Enchaîner les procédures, les raisonnements, choisir les bons outils, savoir en changer, voilà les compétences que demande le monde industriel. Elles sont difficiles à acquérir. Chaque étape déstabilise l'apprenant. Lorsqu'il a compris les formes de raisonnements liés aux transformations, il s'aperçoit qu'il ne sait pas les repérer sans indications nouvelles dans des contextes non balisés. Autre moment délicat lorsqu'il découvre la pertinence de la notion de transformation (donc de fonction) dans d'autres domaines, non nécessairement mathématiques. L'enseignant opère à chaque stade une rupture dans un double registre : celui des conceptions de l'élève et celui de son investissement narcissique. La satisfaction de l'élève se déplace de la maîtrise d'un contexte donné et des techniques associées, à celle d'un modèle explicatif (par exemple, voilà tout ce que les transformations me permettent de faire, dans divers domaines).

Chaque expérience pénible de déstabilisation précède l'agréable retour à l'équilibre. Dans ces transitions qui prennent du temps, le rôle de l'enseignant est considérable. Il est d'autant plus utile dans ces phases, qu'il vit lui-même cette expérience, en continuant de se former. S'il se contente de transmettre ses savoirs, il a de la peine à entrer dans l'expérience psychologique difficile qu'il impose, par la force des choses, aux élèves.

En synergie avec d'autres disciplines

Si l'on veut que l'enseignement des mathématiques atteigne son but, il est nécessaire de le replacer en synergie avec les autres disciplines. Dans cette perspective, il convient de remarquer que si les mathématiques ont d'indéniables qualités formatrices, elles n'en ont pas le monopole ! Il n'y a pas si longtemps, les élites étaient sélectionnées (et formées) par l'intermédiaire des lettres classiques ! Aujourd'hui, Bruno Lussato, auteur de "Bouillon de culture" (28) et professeur au Conservatoire National des Arts et Mé-

(28) *Bouillon de culture*, Lussato et Messadié, Robert Laffont, 1986. Voir en particulier les pages 255 à 259.

tiers, assure la formation continue des cadres d'entreprises à partir de l'écoute d'une fugue de Bach, ou de l'étude d'un tableau de peinture contemporaine. "A force d'apprendre à apprécier Bach, on finit par acquérir le goût du travail bien fait, des rapports professionnels harmonieux et de l'organisation..." (29).

Nous avons expliqué longuement ce qui rend les mathématiques précieuses dans la formation d'un adolescent. Elles nous semblent importantes, parmi les autres disciplines formatrices, par leur originalité même. Ce qui distingue les mathématiques (et peut-être la physique) des autres domaines du savoir, c'est l'extrême précision du langage et des outils du raisonnement, le contexte épuré et l'abstraction des objets et des démarches. Ces atouts peuvent devenir handicaps pour des adolescents qui ont, pour des raisons personnelles, besoin d'un contexte chargé d'humanité, pour apprendre et exercer l'indispensable abstraction. Ces élèves, qui peinent en mathématiques, pourraient cependant faire de cette discipline leur alliée contre la confusion et l'inconsistance.

(29) *A contrario*, les musiques proposées par les radios de la bande FM sont pour la plupart d'une pauvreté affligeante. Chaque radio vise une "cible" particulière" et ne s'en écarte pas : cela donne une "couleur d'antenne" qui fidélise l'auditeur (insérer une musique d'une autre nature, c'est perdre des auditeurs). Aucune séquence parlée ne peut dépasser trois minutes, durée maximale au-delà de laquelle l'auditeur "zappe"... On frémit à l'idée que ces mêmes auditeurs, subissent en classe des séquences de 55 minutes. Cherchez l'erreur... (Les indications qui précèdent sont issues d'un stage organisé par le très officiel Institut National de l'Audiovisuel au profit des animateurs de radios associatives).

Dialoguer pour sortir de l'ennui et de l'échec

Tout au long de cet article, nous avons précisé le sens de notre titre. Si les mathématiques présentent quelqu'utilité dans la vie sociale et économique, c'est au moins autant par les démarches intellectuelles pour comprendre et maîtriser les complexités, que par le contenu des programmes. Les parents qui s'affolent des médiocres résultats en mathématiques de leurs enfants, seraient bien avisés d'établir avec eux un dialogue authentique, pour comprendre leurs réticences et leurs peurs, et mettre en évidence leurs intérêts réels. Ils pourraient alors définir avec eux un projet cohérent, où les mathématiques ne joueraient plus seulement le rôle de sélection et de normalisation, mais prendraient leur juste place, entre culture et préoccupations de réussite professionnelle. On peut rêver ?

La pratique pédagogique est politique

Une classe est une micro-société

On n'apprend généralement pas les mathématiques tout seul. Elles sont enseignées dans une classe, micro-société où interagissent le professeur et les élèves d'une part, les élèves entre eux d'autre part. La manière d'organiser ces relations est aussi importante pour la formation des élèves, que le contenu de l'enseignement lui-même.

En classe comme en société, savoir et pouvoir ont partie liée

L'école reproduit les modèles sociaux environnants. Elle peut aussi peser sur la société en favorisant des comportements qui rejailliront sur elle. La très vive résistance que nous avons observée en Afrique, à l'égard de tout enseignement qui ne soit pas magistral, traduit la structure d'autorité de la société africaine : l'Ancien possède le savoir et le transmet à la génération montante. Bien que détenteur d'un savoir d'une autre nature, le professeur joue en classe ce rôle, et jouit du prestige qui lui est associé. L'enseignement par résolution de problèmes, qui met en évidence des résultats et des méthodes généralisables, avec une importante participation de la classe, déstabilise profondément les collègues. L'enjeu est de taille : la formation des élites à cette démarche peut, avec le temps, introduire la notion de compétence indépendante de l'âge, et une forme de relation sociale moins pyramidale et figée.

En France, le risque est d'une autre nature. Le cours magistral a été réduit à peu de choses, trop peu sans doute. En revanche, la parole sans références et sans consistance a tendance à proliférer. L'activisme pédagogique, dénoncé par R. Bkouche [30], pallie le manque d'investissement de nombreux élèves par une succession d'"activités" destinées essentiellement à rassurer le professeur sur sa capacité à intéresser une classe. "Ca marche", s'exclame l'enseignant devant une classe animée, où les élèves s'expriment, participent : c'est en effet une forme de réussite indispensable, une condition nécessaire à l'apprentissage et au progrès. Elle est loin d'être suffisante. La spontanéité est souvent synonyme d'erreur ou d'approximation, et demande une élaboration pour devenir vérité scientifique. La science progresse de ratures en ratures. L'erreur est première, naturelle, habituelle : la démarche scientifique traduit l'effort de la pensée pour la débusquer et l'éliminer, après en avoir tiré les bénéfices.

On ne peut juger de la réussite d'un enseignement des mathématiques à l'animation d'une classe, même si c'est en soi une belle performance pour l'enseignant ! Il faut jauger les idées émises, séparer celles qui sont fécondes de leur gangue, comprendre en quoi consiste cette fécondité, analyser les démarches, vérifier l'exactitude des résultats annoncés, leur permanence, en un mot *passer d'un débat de café du commerce à un débat scientifique tel que le définit et le pratique Marc Legrand* [31]. Ce passage, long et difficile, ne peut être assuré que par l'école, c'est sa responsabilité première : il est d'une extrême importance pour la société.

Le débat scientifique : l'acceptation des règles

La pratique du débat scientifique est un choix qui dépasse largement le cadre pédagogique : c'est une démarche politique, au sens étymologique. Elle est exigeante et coûteuse en temps. Elle suscite des résistances de la part des étudiants qui craignent de prendre du "retard", dans leur programme, par rapport à ceux qui suivent l'enseignement traditionnel. Elle substitue la compréhension approfondie des notions fondamentales (on prend le temps de les

(30) "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique", Rudolf Bkouche, *Repères-Irem* n°9.

(31) "Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse", Marc Legrand, *Repères-Irem* n°10. Cet article est d'un intérêt considérable : il est le fruit d'une réflexion parvenue à maturité et d'une expérience menée sur le terrain avec des étudiants. Il esquisse une façon d'enseigner les mathématiques qui est réellement formatrice pour l'esprit.

regarder sous tous leurs aspects et dans leurs multiples conséquences) à une connaissance extensive et superficielle. Elle fait le pari que la maîtrise des concepts clés fait gagner du temps, ensuite, dans leurs applications. Sa généralisation en classe supposerait d'importants aménagements des programmes et une modification de l'évaluation des connaissances. Il est probable que les cadres formés de cette façon seraient plus aptes à affronter les problèmes hypercomplexes de la société actuelle.

La démocratie se trouve menacée par l'absence d'adhésion de groupes de plus en plus larges, aux valeurs et aux institutions fondatrices. Cette déchirure s'accompagne, dans l'institution scolaire, d'une perte d'intérêt d'importants groupes d'élèves pour la démarche rationnelle. Il s'y ajoute un refus de toute règle dans le domaine de la langue : l'orthographe et la grammaire sont ignorées, le vocabulaire, réduit à peu de mots, rend le dialogue difficile. Les deux phénomènes sont incontestablement liés et s'entretiennent mutuellement. Ils traduisent tous deux la perte de références extérieures à l'individu et au groupe. Il ne leur reste alors que le repli frileux ou agressif sur eux-mêmes et une marginalisation croissante par rapport à la société qui leur est de plus en plus étrangère, faute d'en partager le langage, les valeurs et les représentations mentales.

Le débat scientifique initie à la démocratie

Le débat scientifique est une école de démocratie. Comme elle, il reconnaît à chacun le droit et la possibilité de s'exprimer et de participer à la solution des problèmes. La démocratie repose sur une construction intellectuelle faite de valeurs et d'institutions admises par une large majorité, destinée à arbitrer les conflits et à promouvoir le progrès du plus grand nombre. Les valeurs et les institutions démocratiques, nées de l'effervescence révolutionnaire, dépassent ceux qui les ont inspirées et s'imposent à tous. Elles sont l'équivalent social de l'édifice scientifique, né de l'effort de compréhension des hommes, et qui, reconnu par tout être doué de raison, lui permet, s'il le souhaite, de participer à l'aventure scientifique. Il n'est pas indifférent de rappeler que l'idée démocratique a émergé au moment où la science connaissait une extraordinaire expansion, en imposant l'idée d'une *vérité objective*, que le savant se proposait modestement de découvrir (32). Le siècle des Lumières de la Raison a engendré simultanément la science constituée et le rêve démocratique. Comme la science, la démocratie n'est ni immuable, ni achevée : elle connaît des crises et demande des remises à jour périodiques.

La technicité des problèmes économiques et sociaux actuels entraîne une dérive du débat démocratique, accaparé par les techniciens et les experts. Cette tendance est déjà présente dans le débat scientifique en classe, où les bons élèves réduisent les autres au silence, par leur rapidité et leur maîtrise du langage. Parfois, le professeur vide le débat de sa substance, par des

(32) La science classique avait résolument séparé l'observateur des phénomènes observés : c'était sa façon de se protéger de la subjectivité, des croyances et des mythes qui parasitent la démarche scientifique. Cette attitude a été très utile à ce stade de la connaissance. Mais on a dû, au cours du 20^e siècle, opérer des révisions déchirantes : l'observateur (et ses instruments) "perturbe" les phénomènes qu'il observe ! Il n'est plus cet être neutre, objectif, extérieur, dont le 18^e siècle rêvait. (*cf. A la recherche du réel*, Bernard d'Espagnat, GauthierVillars, 1980. Voir en particulier les pages 19 et suivantes).

interventions intempestives : il n'est pas aisé de laisser "sécher" une classe. C'est pourtant un passage obligé de la résolution d'un problème un peu complexe. L'école a de la peine à accepter le temps de la recherche tâtonnante. Son modèle inconscient est le bon élève de "Math Sup" qui, devant un exercice, repère immédiatement sa nature et applique les solutions adéquates, déjà mises en œuvre dans de nombreux exercices analogues. Les élèves ne s'y trompent pas : à toute question posée, ils tentent une réponse immédiate. Même en fin de lycée, l'idée que cette réponse puisse être une démarche d'une certaine complexité, reste étrangère à beaucoup. Sont-ils seuls responsables ? On retrouve là les dérives de la démocratie.

Le directeur de l'Ecole Polytechnique déclarait récemment sur *France Culture*, qu'une partie importante du temps de formation consistait à "inculquer le doute" aux élèves de cette prestigieuse école. Et il expliquait que, par leur formation et par leur dispositions naturelles, ces brillants sujets avaient tendance à aller droit à la solution, privilégiant les paramètres quantitatifs, et laissant dans l'ombre des paramètres sociaux dont ils n'avaient pas de pratique (33). On pourrait sans difficulté généraliser ces remarques à l'ensemble de l'élite française. Or les choix fondés sur une rationalité quantitative, ignorant les paramètres humains, difficilement quantifiables, conduisent parfois à des situations inextricables et se payent, à terme, un prix démesuré : l'exemple des banlieues édifiées à la hâte, au moindre coût et en dépit du bon sens il y a trente ans par de brillants technocrates, en est un bel exemple. Les avertissements de certains sociologues n'avaient pas pesé bien lourd devant des choix aussi "naturels et évidents". On voit le résultat aujourd'hui, et ce n'est sans doute qu'un début.

Le "brillant sujet" a de la peine à écouter le discours un peu maladroit de la "base" qui subira les effets de ses choix : il s'expose aux révoltes de ceux qui ont l'impression de subir des décisions, sans avoir été consultés ! Les experts doivent, non pas renoncer à leur rationalité, mais y inclure les paramètres humains et sociaux, si difficiles à cerner et de plus en plus indispensables pour atteindre à l'efficacité. Il leur faut apprendre à *écouter vraiment*, à consulter, à prendre en compte les questions même maladroites des "usagers". Bref, il est temps de repasser de la technocratie – que l'école favorise, sans doute inconsciemment, par le traitement de son élite – à la démocratie, que la pratique du débat scientifique pourrait encourager (34). Faute de quoi la société connaîtra de plus en plus souvent des explosions et des blocages.

(33) Plus étonnantes et plus troublantes encore les réflexions de Jean-Pierre Bourguignon sur radio *Arc-en-ciel* à Strasbourg, dans le cadre du congrès de l'APMEP en 1992. "A l'école Polytechnique, mathématiciens et physiciens proposent des enseignements qui font appel systématiquement les uns aux autres : pour le moment, nous rencontrons une incompréhension assez totale des élèves. L'idée même que des idées profondes de mathématiques soient efficaces en physique leur est totalement étrangère". On croit rêver...

(34) Ces réflexions renvoient à l'œuvre d'Edgar Morin et à la notion de "pensée complexe" qu'il précise depuis de nombreuses années. On pourra consulter son *Introduction à la pensée complexe*, collection "Communication et complexité", ESF éditeur, 1990.

Partenaires ou usagers ?

Face à cette grande ambition, il y a l'attente, modeste, minimale, des "usagers de l'éducation". Pour beaucoup d'élèves, l'école n'est qu'un lieu de passage obligé pour la vie professionnelle. Ils se comportent comme les clients d'un libre-service. Ils font ce qu'il faut (tout juste) pour un cursus scolaire sans trop d'obstacles. Les matières "importantes" sont l'objet de leur attention (pas nécessairement de leur intérêt [35]), les autres sont purement et simplement négligées. Plus grave encore, les contenus des enseignements ne les font guère vibrer... Seule l'importance du coefficient crée l'indispensable motivation. Or les enseignements littéraires occupent aujourd'hui, dans cette stratégie à la petite semaine, une place très limitée. Ce sont pourtant eux qui pourraient ouvrir l'indispensable fenêtre sur la tragique et sublime condition humaine (que les sciences ont profondément modifiée). Parce que la société a dévalorisé depuis quelques décennies certaines disciplines, considérées (à tort, évidemment) comme peu utiles professionnellement [36], de nombreux adolescents manquent une rencontre capitale avec des textes qui parlent pourtant de leurs interrogations, de leurs angoisses et de leurs espérances, même si elles ne sont pas encore entrées dans leur expérience. Et qui pourraient, en donnant unité et sens à leur formation, créer l'indispensable curiosité, le plaisir d'apprendre sans lesquels les études deviennent corvée et produisent, au bout de longues années, des diplômés amorphes et incultes, que les entreprises ont bien du mal à intégrer.

Les mathématiques, une aventure de l'esprit

Les mathématiques constituent un édifice intellectuel complexe, subtil, bâti au fil des siècles sur un certain nombre de principes et de règles logiques. Il n'est pas immuable (il a été secoué par des crises profondes). Sa solidité a été mise en cause à bien des reprises. Mais telles qu'elles sont, les mathématiques, avec leur capacité d'évolution, s'imposent à tout esprit doué de raison.

L'édifice mathématique est la référence permanente et ultime d'un débat scientifique, tel qu'on le souhaite aussi dans les classes. Le débat scientifique suppose l'écoute de chacun par tous : une idée riche peut se cacher dans l'explication balbutiante d'un élève qui pose sur une figure un regard original. Il oblige à ne pas prendre pour argent comptant le discours du bon élève ou du professeur, ni à s'incliner devant la conviction contagieuse de celui qui confond vérité et force de persuasion. Il appelle chacun à la vigilance : l'erreur est parfois délicate à débusquer, et certaines "évidences" sont fausses ! Il est parfois difficile de repérer l'erreur dans la "démonstration" d'un résultat manifestement faux. La notion même de vérité et d'erreur scientifiques mérite qu'on s'y attarde : elles dépendent largement des choix initiaux qui ont été faits et du cadre auquel ils se réfèrent. A cet égard, l'exemple de l'axiome d'Euclide est éclairant. Le nier

(35) Voir l'article "Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques" dans *Repères-Irem* n°10.

(36) De nombreux élèves imaginent qu'un technicien ou un ingénieur peuvent se contenter, dans l'activité professionnelle, de leurs connaissances techniques et scientifiques. Ils sont sceptiques lorsqu'on leur dit qu'une part croissante de l'activité d'un cadre scientifique se situe dans le domaine du langage et de la communication : animation de réunions, rapports d'activité, textes de prospective, contact avec les clients. Certains réveils seront douloureux...

conduit à des géométries différentes, mais cohérentes et fort utiles en physique. Il est très important de signaler de telles bifurcations dans la construction mathématique. Bien des élèves sont stupéfaits de découvrir des mathématiques nées de débats séculaires, là où ils imaginaient une science sans relief et achevée. Il n'est pas besoin d'entrer dans la technique mathématique qui les dépasse : évoquer et décrire les bifurcations suffit à éveiller l'intérêt et à faire émerger des questions : il est alors possible de réfléchir devant eux et avec eux, à la notion de *théorie scientifique* et à celle de *vérité scientifique*, toujours provisoire et liée à une forme de regard sur le réel.

L'univers s'écrit en langage "géométrique"

Faire des mathématiques, c'est avant tout prendre conscience d'une grande aventure de l'esprit humain, née de la nécessité économique et élargie à l'inutile. Nombreux sont les élèves qui n'ont aucune idée du développement historique des mathématiques. Ils ont vaguement, et bien à tort, le sentiment de leur stabilité à travers le temps (elles ont toujours plus ou moins eu leur forme actuelle) et de leur achèvement (ils ignorent l'existense même d'une recherche mathématique). Leur surprise est profonde de découvrir la difficile conquête des notions (comme celle de limite) et les débats qui l'ont accompagnée. Et surtout, la dialectique de l'utile et du gratuit, en mathématiques, leur est totalement étrangère : si d'importantes notions mathématiques ont attendu longtemps leurs applications "pratiques", d'autres, en revanche sont issues de questions que les physiciens avaient à résoudre et ont pris ensuite leur autonomie. De toute cette ignorance, nous sommes responsables, par notre silence. Il est grand temps que l'histoire des mathématiques soit introduite, autrement que par des allusions, dans les programmes. Son absence prive nos élèves d'une compréhension globale, et surtout d'un moteur puissant pour leur difficile apprentissage : l'émerveillement que suscite l'aventure scientifique de l'humanité !

On se rappelle l'exclamation de Galilée : "La nature s'écrit en langage géométrique". Il prenait ainsi conscience, avec étonnement, de l'adéquation des mathématiques à décrire l'univers. Einstein le confirmait : "l'étonnant, c'est que la connaissance soit possible". Est-il déraisonnable d'expliquer à nos élèves que les mathématiques, sur lesquelles ils peinent, sont le langage de l'univers, et que grâce à elles, ils peuvent ainsi mieux comprendre le monde qui les entoure ? On peut certes vivre sans comprendre, mais on vit tellement mieux en comprenant !...

Soleil clair, soleil noir...

Dans un beau texte à propos du "Tiers instruit" (37), Michel Serres s'interroge comme nous sur la validité d'expressions comme "recherche" (du latin *circum,* autour), "encyclopédie" (du grec *kùklos,* cercle) ou "cycles d'enseignement...".

> "On croit qu'une science ou qu'un enseignement est un cercle avec un centre. Eh bien, je ne le crois pas ! Je ne crois pas que le monde est circulaire, avec le soleil au centre. Je sais depuis le seizième siècle que les orbites sont elliptiques, avec deux centres, l'un clair, le soleil, l'autre obscur, ce qui

(37) Texte d'une conférence prononcée par Michel Serres au cours d'un petit déjeuner-débat organisé par le journal *Réforme*.

n'enlève rien à sa réalité. Je crois profondément qu'il faut enseigner deux choses : les sciences exactes et la douleur humaine. Les sciences constituent le foyer clair de la rigueur et de la rectitude de la raison; ce sont les outils d'intelligibilité et d'action sur le monde. La douleur humaine, foyer noir, c'est l'expérience de l'injustice, de la violence, de la faim, de la souffrance et de la mort. Le soleil clair fait de nous des êtres infinis, car on n'a jamais fini d'apprendre, l'histoire de la raison est sans cesse ouverte. Le soleil noir parle de notre finitude. Sans les "humanités", les cultures, les mythes, les arts, le droit, la médecine et ses remèdes, la raison claire ne peut simplement pas s'apprendre."

Il nous invite à considérer ensemble – et non à exclure l'un ou l'autre – deux pôles : l'intelligence qui clarifie et la confuse et douloureuse expérience humaine.

Sans initiation esthétique et poétique, un élève est rarement sensible à l'austère beauté des mathématiques. L'absence d'interlocuteur valable pour partager le pathétique de la condition humaine (qu'on peut rencontrer très jeune), l'enferme dans une solitude désespérante, où les mathématiques peuvent briller sans réchauffer ! L'absence d'horizon ne favorise pas le nécessaire investissement dans les études.

L'école cherche à former des êtres humains capables d'appréhender le monde dans sa déroutante complexité. Il y faut davantage que des savoirs clairs, muets sur des aspects essentiels de l'expérience humaine.

Faire des mathématiques de cette manière ne les détournera pas d'un usage immédiat, ou de retombées directes ou indirectes : mais cette précieuse inutilité des mathématiques les introduira dans la démarche qui fait toute la noblesse de l'humanité, la quête du Sens.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Emile reviens vite... ils sont devenus fous*, Meirieu et Develay, ESF éditeur, collection pédagogies, 1992.

[2] *Geomus : Un résolveur de problèmes qui mobilise ses connaissances en fonction du problème posé*, Jean-Marie Bazin, Thèse de doctorat, Université de Paris 6. Laforia TH93/06.

[3] *Introduction à la pensée complexe,* Edgar Morin, collection "Communication et complexité", ESF éditeur, 1990.

[4] *Actes du colloque sur les transferts de connaissances*, Université Lumière Lyon 2, 29 septembre au 2 octobre 1994, à paraître.

[5] *Le tiers instruit*, Michel Serres, François Bourin, 1991.

[6] "Abstract planning and perceptual chunks : elements of expertise in geometry", Koedinger et Anderson, *Cognitive Science*, n°14, pages 511-550.

[7] "Quelques idées d'activités glanées au contact des entreprises", Gérard Kuntz, *Repères-Irem* n°7.

[8] "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique", Rudolf Bkouche, *Repères-Irem* n°9.

[9] "Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse", Marc Legrand, *Repères-Irem* n°10.

[10] "Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques", Bernard Charlot et Elisabeth Bautier, ESCOL, Université Paris 8, *Repères-Irem* n°10.