LE TROISIÈME DEGRÉ EN SECOND CYCLE : LE FIL D'EULER

Jean-Pierre LE GOFF
Irem de Basse-Normandie

(Pour l') ***Introduction*** (d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques), ou : Défense et illustration d'une littérature comme une autre [1].

Cet article voudrait rendre compte d'une tentative de démarche, alors qu'il n'est sans doute qu'une prise de position : selon que l'on se place d'un point de vue volontariste ou expérimental, on pourrait la qualifier de "mise en conformité" d'une pratique pédagogique et de certains principes "personnels" sur une nécessaire "*introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des sciences*" [2], ou de "mise à l'épreuve du réel" de certains présupposés sur la possibilité et l'opportunité d'un enseignement appuyé sur les textes historiques [3]. Encore faut-il préciser qu'au rythme où vont les choses, cette "expérience", menée en 1988 dans une première scientifique, n'a plus guère valeur d'échange, si tant est qu'elle en ait jamais eu... Cela importe peu en définitive ; de démarche il n'y eut que par le moteur le plus certain : le bon plaisir. Le lecteur est donc invité à prendre ce texte pour ce qu'il est, en dernière instance : une occasion de lire des mathématiques et d'en parler ; gageons seulement que cela donne l'envie d'en transmettre.

(1) Ou : commune (quoiqu')autre !

(2) Nécessité affirmée en particulier au sein de la Commission inter-IREM d'Epistémologie et d'Histoire des Mathématiques.

(3) "Appuyé sur" plutôt qu'"assisté par" : il s'agit ici de questions de fondement et non pas de recette ; c'est toute la différence qu'il y a entre le fonds de sauce et le sachet-minute.

En l'occurence, je parlerai "d'autre chose" que de choses inscrites dans le droit fil, puisqu'il va s'agir de la résolution des équations du troisième degré, qui sont en général écartées des programmes du secondaire et négligées ailleurs, alors que – ou peut-être parce que ? – les problèmes qu'elles expriment ont constitué un obstacle résistant (depuis les Babyloniens jusqu'aux algébristes italiens du Cinquecento), et qu'elles ont conduit à l'émergence des nombres imaginaires puis à la résolution trigonométrique des équations. En somme, je plaiderai pour la (re-)lecture moderne des classiques, en manifestant au passage que la mathématique a aussi sa littérature – en l'occurence un texte d'Euler que je qualifierais volontiers de lumineux, selon un point de vue que je tenterai de défendre.

Ce travail du texte, proposé en première scientifique comme recherche, et comme prolongement d'un travail plus "classique" – "on" ne peut ou on ne saurait innover à jet continu, et, refrain connu, programme oblige –, fut lancé dans le temps même où j'abordais la trigonométrie : on trouvera donc, à la suite, un texte de devoir proposé aux mêmes élèves dans la continuité de ce travail ; ce texte est un classique du genre, mais il prend une toute autre signification lorsqu'il est précédé ou accompagné de la lecture d'un fragment de la *Géométrie* de Descartes, dans lequel le problème de la trisection de l'angle est mis en rapport avec la question des équations du troisième degré, et dont la *clarté* et la *distinction* ne vont pas de soi, comme nombre d'*idées* qui nous viennent de lui.

(Paren*)thèses*.
Commettre ou transmettre ? Transposer ou composer ?
Ou : ratiocinations idéologico-maniaques. À esquiver si l'on veut entrer dans le vif et suivre le fil ; et dans ce cas, aller à la section suivante : ***De l'art de la fresque.***

Peut-être faut-il revenir sur les principes et les présupposés évoqués plus haut, bien qu'ils aient déjà fait l'objet de quelques remarques dans les publications du cercle caennais d'histoire des sciences [(4)] ou d'un article dans le Bulletin inter-IREM consacré à l'enseignement des mathématiques à l'Université [(5)] ? Au demeurant, ayant déjà donné ici sur ce motif [(6)], je n'ajouterai que quelques touches.

Tout d'abord, il me – il nous – semble qu'il y a quelque bizarrerie dans le fait que les disciplines littéraires incluent un enseignement de leur histoire (histoire littéraire, histoire des idées, etc.) tandis que les disciplines scientifiques sont le plus souvent "oublieuses" de leur passé, comme si seule comptait la parole du dernier à par-

(4) Rappelons que l'histoire des sciences à Caen repose essentiellement sur les activités de formation et de recherche d'une équipe de l'IREM de Basse-Normandie, d'une part (publications : *Les Cahiers de la Perspective*, et bientôt, *Analectes*, rééditions intégrales critiques, et *Lectures*, recueils thématiques de textes), et d'autre part, sur les cycles annuels de conférences du Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen, association de type "loi de 1901" (publications : *La science à l'âge baroque*, diffusée par l'IREM, et *Scholies*, actes du Séminaire, diffusés par le SIHS).

(5) *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, principes et réalisations*, Commission inter-IREM Université (CI2U), 1990, Diff. IREM de Lyon.

(6) "*La perspective en 1^{re} scientifique : une certaine suite dans les idées*", in *Repères-IREM* n°7, avril 1992.

ler : il paraît légitime, pour le moins, de s'interroger sur cet effet de modernité propre à la science, surtout lorsqu'il s'agit de transmission des savoirs, c'est-à-dire d'élaboration d'une compréhension individuée du monde, et non d'élaboration de savoirs nouveaux.

D'autres, qui sur ce point voient juste, parlent de "*savoir savant*" et de "*savoir enseigné*", mais à vouloir en analyser la seule transposition de l'un à l'autre, on court le risque, par une étude parcellisée et locale, de perdre de vue non pas tant les contenus que leur cohérence, et d'oublier ce qui fait le sens même de toute démarche d'appropriation des savoirs : le rapport (*ratio*) individuel au monde, dont ne peuvent être évacués ni le réseau des interactions, ni la genèse collective. Non pas pour entretenir je-ne-sais-quelle illusion pédagogique héritée de l'épistémologie génétique, mais pour penser une cohérence possible des savoirs à enseigner (la culture ?), et rompre avec la spirale d'un enseignement cellulaire, mortifère pour le sens et les contenus, à l'image de cette spécialisation universitaire qui menace la recherche de sclérose par cloisonnement. Bref, l'écart est grand qui va de l'Académie au Concert [7], du cabinet de curiosités à la confrontation des disciplines, et la voie est étroite qui serpente entre scepticisme et dogmatisme (proverbes séparatistes caennais). À tout prendre et quitte à risquer le "*contresens*", je préfère l'affrontement des situations "*à mains nues*" [8], à l'instrumentalisation qui se profile derrière certaines "*boîtes à outils*", nées de la perversion, par quelques épigones, de quelques idées maîtresses.

Autant dire que le maître-mot de notre démarche sera "formation", auquel nous attachons les épithètes de "continue" et de "mutuelle" et le génitif "des maîtres". "*Enseignants et aussi chercheurs*", écrivions-nous en 1982 [9], entendant par là qu'il y avait nécessité à rappeler qu'un enseignant [10] est avant tout un intellectuel, et sauf erreur, un étudiant, diplômé de l'Université, avant que d'être un professeur, c'est-à-dire d'un maître "à penser", au sens actif du verbe ("mettre à penser" ou "en pensée" plutôt que "maître à pensée"). Faut-il en dire plus pour justifier les épithètes ? Sans parler même du vœu pieux sur la "nécessaire mise en situation de recherche" de... "nos" élèves [11]. Nécessaire aux escholiers, la recherche ? Seulement ? L'on plaisante souvent sur l'immaturité perpétuelle de l'enseignant, qui ne serait après tout qu'un écolâtre attardé de la religion cathédrale. Ne pourrait-on renverser l'aphorisme ? Et affirmer que l'aventure intellectuelle est peut-être victime d'un autre lieu commun : la seule véritable école serait celle dite "de la vie", comme si la pensée n'était pas la vie même – vie humaine, s'entend –, ou comme si l'école était hors d'atteinte des "choses de la vie".

Mais encore, quid de l'histoire des mathématiques ? D'aucuns, zélotes pressés, ou plutôt pompiers incendiaires, appellent de leurs vœux et recommandent l'introduc-

(7) Cf. *Opera matematica*, in *La science à l'âge baroque* n°2, IREM de B.-N.

(8) "*Postface*" à *La transposition didactique* d'Y. Chevallard, 2e éd., Paris, 1991, p. 205.

(9) In "*Enseigner quand même*", n°11-12 de la revue *Esprit*, nov.-déc. 1982, pp. 170-173.

(10) Cet enseignant fût-il du secondaire, ce que soulignait l'adverbe "*aussi*", concession mais aussi provocation rendue nécessaire en ces temps de SMIG culturel.

(11) Le possessif est douteux, voire méprisant, caché qu'il est derrière la sollicitude de l'adulte. Malheur à celui qui condescend : le mépris fonctionne souvent en miroir. Au temps pour moi (autant aussi d'ailleurs).

tion immédiate de l'histoire des sciences dans l'enseignement des susdites. Je vous laisse imaginer la révolution dans les salles de professeurs : après Bourbaki, Montucla [12], le monde à l'envers ! Sans parler de la demande massive de formation – après tout, elle serait créatrice d'emplois ou de nouvelles structures, refrain connu des irémiques ! –, je me contenterai d'objecter le risque de multiplication des niveaux de langage. Les mathématiques dites modernes étaient censées, de l'avis de certains, avoir une vertu démocratique en usant d'une langue compréhensible de tous ; on sait ce qu'il en fut ; encore faudrait-il faire la part du théorétique et du politique dans cette affaire. Que dire alors d'une réforme qui, sauf à se contenter d'un verni historiciste, proposerait d'intercaler un écran supplémentaire, celui des langues quasi-étrangères que sont le français ancien ou les traductions littérales ou approximatives de langues mortes ou archaïques ? Et que penser d'une introduction historique qui se contenterait d'un coup de vernis rétrospectif sur des textes présentés *de facto* comme dépassés ?

On voit par là que l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement, et singulièrement de la littérature scientifique du passé, si elle est souhaitable dans son principe, est à manier avec des pincettes, et qu'en tout état de cause, elle ne se décrète pas. Compte-tenu de ce que la question centrale, à notre sens, est celle du devenir de la culture dans l'enseignement, il est urgent de ne pas se presser : cinquante années de réformes à marche forcée méritent réflexion, et il serait bienvenu que le pire soit derrière nous.

(12) J.-E. MONTUCLA, auteur d'une *Histoire des Mathématiques* en 4 volumes, Paris, 1799-1802. Rééd. à la Lib. Blanchard, Paris, 1968.

Mais alors, où veux-tu en venir, avec tes imprécations ? À cette idée très simple qu'une formation laisse des traces. Et qu'un enseignant qui aurait baigné dans une culture scientifique faite pour partie de l'histoire de sa discipline proposerait peut-être l'eau du bain avec le bébé (*postulatum*). C'est à peu près le pari que nous faisions il y a plus de vingt ans, où nous déclarions travailler pour le siècle, écartant toute idée d'applicabilité "pédagogique" immédiate de ces "nouvelles" connaissances en histoire des mathématiques, acquises par auto-formation ou par formation mutuelle, et préférant au bout de la route, l'inévitable plaisir du sens à l'improbable désir de grand soir. De là sont nés, bien des années plus tard, quelques petits matins où j'ai retrouvé, plus souvent qu'à son tour, la joie d'enseigner. Que chacun trouve des plaisirs si peu innocents où bon lui semble, me paraît être la voie étroite par où passera la seule réforme de l'enseignement qui vaille, et qui suppose une revalorisation d'un genre un tantinet oublié : peut-être faudrait-il revoir à la hausse l'idée que chacun, maître et étudiant, se fait de soi-même et de l'autre ; ce qui ne se décrète pas plus qu'un enseignement d'un genre qui reste à inventer, mais s'encourage pourvu qu'on en ait la volonté et le courage politiques.

Il est deux usages du mot "composer". L'un fait d'abandons, l'autre évoquant l'harmonie. Plus les instruments sont variés et affûtés, plus le concert sera coloré ; plus l'on dispose de discours, plus il est loisible de les croiser pour composer un cours. Faut-il en dire plus ? Alors parlons de la palette : plus un maître dispose de teintes, plus sa touche sera riche.

Fin des (paren)thèses. Fi de l'idéologique. Foin des ratiocinations. Au choix.

De l'art de la fresque.

Je commencerai par un bref panorama de la question : une courte "histoire" des méthodes algorithmiques ou préalgébriques et de l'algèbre classique (13) ; je cède ainsi à la manie de la fresque historique, telle que je la pratique souvent, mais depuis peu, en cours de mathématiques : c'est une des premières conséquences du travail de formation évoqué plus haut ; mais cet exposé n'a pas tant ici la fonction de rappeler le contexte historique, que de situer l'environnement oral dans lequel j'ai proposé un travail de lecture commentée sur un texte d'Euler, et de préciser ce que le cercle caennais entend par "enseignement culturel" d'une discipline scientifique. Puis je présenterai ce texte de Léonard Euler, et un questionnaire à traiter par écrit, tels que je les ai distribués à 36 élèves d'une classe de 1re 'S' du Lycée Malherbe de Caen, après un travail systématique sur la factorisation des polynômes (division euclidienne, "théorème" fondamental, homogénéité et triangle "de Pascal", formule du binôme, etc.), la résolution des équations et des systèmes quadratiques ; ce travail était appuyé lui-même sur le troisième livre de la *Géométrie* de Descartes (1637), que j'ai souvent exploité, et sur une série de textes, allant des Babyloniens à Al-Kwarizmi, en passant par Euclide et Brahmagupta : cet ensemble d'extraits, dont certains se trouvent dans *Mathématiques au fil des âges* (14) mais aussi dans divers manuels ou brochures irémiques, est conçu comme une fiche d'exercices et je l'ai utilisé plusieurs fois, avec des variantes, dans diverses classes de seconde et de premières scientifique ou littéraire.

Un degré à gravir, ou un obstacle à franchir ?

S'il fallait résumer une aussi longue histoire, elle-même réduite à une ascension par degrés, voici ce qu'on pourrait en dire, après avoir tenté de définir ce que sont l'algèbre et ses méthodes. Il est clair que "réduction", vision positive d'un progrès supposé et vision rétrospective d'une telle élaboration en termes modernes de degrés et d'équations sont autant de bonnes raisons de ne pas prendre ce qui suit à la lettre : mais faut-il s'interdire de parler (la réécriture se donnant ici pour but de témoigner, non de prétendre à une quelconque valeur historique), sous le prétexte qu'on serait conscient des limites de l'entreprise ? Il en va de l'histoire des sciences comme du reste lorsqu'on l'enseigne : il faut brosser à grands traits avant d'y procéder par touches et retouches, voire d'y commettre quelques repentirs. Je revendique le droit à la simplification, pourvu qu'on me crédite d'un certain penchant pour le doute et la nuance : je conseillerai volontiers la pratique de l'une et des autres en présence des étudiants ; l'histoire, de ce point de vue, fourmille d'exemples de ce qu'il est un temps pour l'heuristique et un temps pour la synthèse.

(13) Pour plus de détails, je renvoie à l'ouvrage d'A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Paris, éd. du Seuil, 1986 (coll. Points-Sciences n°S49, rééd. d'un ouvrage de 1982), et à diverses publications, en particulier des IREM, que l'on trouvera en bibliographie.

(14) IREM, Groupe Épistémologie et Histoire (J. Dhombres, A. Dahan-Dalmedico, R. Bkouche, C. Houzel, M. Guillemot *et alii*) : *Mathématiques au fil des âges, Textes choisis et commentés*, Éd. Gauthier-Villars, Paris, 1987.

Où et quand commence l'algèbre ? Ou plutôt, à quelle époque et en quels lieux peut-on situer les premiers indices de méthodes que nous pensons relever d'une science nommée "algèbre" ? Rappelons que celle-ci doit son nom à un ouvrage du IX^e siècle, l'*al-Mukhta sar fi hisab al-Jabr wa-l-Muqabala* du savant Muhammad Al-Khwarizmi (780-850), dont le patronyme donna lui-même "algorithme" [15] ? Mais comment dater sans d'abord définir ce que l'on entend par "algèbre" ? Ou du moins par cette algèbre dite "classique", celle des équations et non pas celle des structures ? Encore s'agit-il de dégager une forme, et non pas une collection. Trois critères paraissent caractériser, *a posteriori*, la démarche algébrique pré-structurale : une volonté classificatoire, qui commence avec la capacité à reconnaître une certaine similitude entre divers problèmes ; le recours à des procédés systématiques de résolution de ces classes de problèmes : algorithmes, ou formules, venu le temps du symbolisme ; et enfin, non le moindre, mais sûrement le dernier chronologiquement, le symbolisme littéral et opératoire, qui permet tout à la fois d'exprimer la généralité et d'opérer de façon économique et "mécanique" (adjectif que je préciserai d'un point de vue historique, une lecture rapide de Descartes ayant souvent conduit au contresens). Encore ne s'agit-il ici que de la superstructure, car on sait que l'algèbre fut longtemps considéré comme une arithmétique générale, point de vue qui envisage les méthodes algébriques comme le cadre efficient pour l'extension des nombres aux irrationnels.

Selon que l'on analyse la mathématique du passé suivant l'un de ces critères ou, plus restrictivement, au travers de leur conjonction, on parlera de méthodes "pré-algébriques" chez les Babyloniens, qui ont su reconnaître certains types de problèmes, user de quantités négatives et d'un système sexagésimal très élaboré, et proposer des algorithmes de résolution des "équations affines et quadratiques" ; on a pu avancer l'expression "d'algèbre géométrique" [16] en parlant de la méthode "d'application des aires" et de certaines propositions géométriques des *Éléments* I, II et VI d'Euclide qui se traduisent aujourd'hui par telle identité remarquable ou par telle résolution d'une équation quadratique conduisant par exemple au nombre d'or ; mais je préfère parler à ce propos d'une certaine rhétorique géométrique proposant des algorithmes de construction fondés sur des équivalences d'aires ; on relèvera chez Diophante d'Alexandrie (ca. 325-410) une algèbre "syncopée" qui est le premier exemple de notation symbolique et la division de l'arithmétique en problèmes déterminés et indéterminés ; on situera la naissance de l'algèbre en Inde, puisque le *Brahmasphutasiddhanta* de Brahmagupta (598- après 665) comporte algorithmes et inconnues littérales, et inclut l'usage de "nombres" négatifs ; ou l'on préférera attribuer l'invention d'une arithmétique générale à Viète ou Harriot, avant-courriers de Descartes ou Wallis.

Du coup l'on oubliera, par exemple et entre autres choses, que les Chinois pratiquèrent, très tôt et avant la lettre, l'algorithme dit "de Hörner", que les "abacistes" italiens mirent l'imaginaire dans la berge-

(15) On procédait, au Moyen-Âge européen où la langue des doctes était le latin, selon la manière d'*Algorismus*.

(16) Cette expression, qui fit avancer l'analyse en son temps, mais qui est finalement assez mal venue, est due à H.-G. Zeuthen, et fut reprise par P. Tannery.

rie, alors même que les négatifs n'étaient pas de la fratrie, ou que les "cossistes" anglo-saxons innovèrent en matière de notations (17) : on aura compris que l'histoire qui m'intéresse n'est pas seulement affaire de dates ou de "coupables", mais plutôt de genèse et de problématiques. À noter que tous ces épisodes furent évoqués en cours et que quelques-uns furent illustrés par des exercices dont les énoncés étaient transcrits ou adaptés de textes anciens connus (18).

Ce qui ressort de ce tour d'horizon, c'est, outre la lente et inégale maturation, la diversité des approches : les Égyptiens, par exemple, n'usent que de fractions "unaires" et s'en tiennent aux problèmes linéaires ou quadratiques simples, tandis qu'en Mésopotamie l'emploi des fractions sexagésimales et les algorithmes, numériques plus que géométriques, manifestent un art plus élaboré du calcul ; l'arithmétique domine chez les uns (Babyloniens ou Hindous) tandis qu'elle cède la place ou se subordonne à la géométrie chez les autres (en Grèce puis dans le monde arabo-islamique).

Ce dernier point de vue, hérité de la tradition grecque essentiellement, a engagé les premiers géomètres arabo-musulmans dans la voie de la synthèse : l'Inde, sans doute en partie héritière de la Mésopotamie, leur apportait un certain art du calcul, tandis que la Grèce avait initié une étude systématique de la grandeur par les voies déductive et constructive de la géométrie. C'est ainsi qu'on peut lire cette conjonction chez Al-'Khwarizmi, qui propose une classification des équations quadratiques fondée sur la position des termes de divers degrés résultant de leur réduction (19), et une résolution quasi-systématique fondée sur la construction géométrique des grandeurs solutions ; en particulier, il signale l'existence de deux racines (*gizr*) dans le cas où le nombre des carrés (*mal*) des choses (*say*) – soit "a", le coefficient de x^2 –, et le nombre des données (*dirham*) – soit "c", le terme constant –, sont dans le même membre et opposés au nombre "b" des choses, après réduction ($ax^2 + c = bx$, $a, b, c > 0$). Comme on le voit, les questions d'existence et d'unicité ne sont peut-être pas d'une actualité très ancienne : il suffit de relire Euclide, Descartes et bien d'autres, pour s'en convaincre rapidement ; il convient de se souvenir, quand on enseigne, de ce que beaucoup d'idées, qui semblent "aujourd'hui si naturelles"... à celui qui les a assimilées, ne s'imposent pas en un jour.

La redécouverte progressive par le Moyen-Âge occidental d'un héritage grec

(17) L'inconnue, nommée "*radix*" "*census*" ou "*causa*", devient "*cosa*" en italien et "*coss*" en allemand. En Italie, les livres d'algèbre se nommeront *Liber de Abaci* (livre de l'abaque, du calcul).

(18) Pour quelques textes : *Mathématiques au fil des âges*, Commission inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques, Paris, éd. Gauthier-Villars, 1987 ; *Équations du 1er, du 2ème, du 3ème, du 4ème degré*, quatre fascicules de l'IREM de Toulouse, 1979 à 1982.

(19) Pour le second degré, a, b, et c étant des grandeurs positives, cette classification s'écrirait aujourd'hui : 1°) $ax^2 = bx$ (une solution, 0 n'étant pas mesure d'une grandeur), 2°) $ax^2 = c$ (une seule solution), 3°) $bx = c$ (qui résulte de la "disparition" éventuelle des termes du second degré après réduction), 4°) $ax^2 + bx = c$ (une seule solution), 5°) $ax^2 + c = bx$ (deux racines), 6°) $bx + c = ax^2$ (qui n'a qu'une racine). L'équation $ax^2 + bx + c = 0$, particulière pour nous dès lors que a, b et c sont positifs, n'a aucun sens pour un algébriste intéressé à trouver des grandeurs que nous savons être mesurées par des nombres positifs et qui écartera d'emblée l'idée qu'une somme de quantités puisse être nulle.

conservé et transmis par l'Orient byzantin ou musulman, et largement développé par les savants arabes ou persans, va marquer du même sceau géométrique les recherches des géomètres européens, abacistes italiens et cossistes allemands, devenus "algébristes" dès lors que Léonard de Pise eut ramené, à la fin du XII^e siècle, l'*al-jabr* de ses voyages au Maghreb.

On notera que plusieurs usages relevés plus haut chez les Babyloniens ou les Hindous, voire chez certains algébristes arabes du X^e au XII^e siècle, se trouveront "perdus" à des degrés divers, du fait de l'attachement, d'origine géométrique, à l'homogénéité (alors que l'on voit les Babyloniens retrancher une grandeur linéaire d'une aire (20)), et à la considération de grandeurs, qui exclut la prise en compte du négatif, voire même du déficit : c'est ainsi que les opérations de "jabr" et de "muqabala" d'Al-Khwarizmi reviennent à mettre en balance deux sommes de quantités positives par compensation des déficits et par suppression de quantités égales dans les deux plateaux de l'équation. Malgré la redécouverte, par Regiomontanus en 1464, des *Arithmétiques* de Diophante, qui va provoquer un regain d'intérêt pour une algorithmique purement arithmétique, et la publication à Rome et en arabe, en 1594 de *L'exposé d'Euclide* de Nasir Al-Din Al-Tusi, ouvrage dans lequel est affirmée la possibilité de nombrer tout rapport, ce caractère géométrique s'affirmera en particulier à la fin du XVI^e siècle chez François Viète (1540-1603), très attaché à la loi d'homogénéité, et dont *L'art analytic* et les *Zététiques* incluent de nombreux problèmes diophantiens résolus par la voie géométrico-algébrique, ce qui leur fait perdre leur caractère arithmétique ; la notation littérale de Viète, dont les constantes désignent, à l'évidence, des grandeurs positives, et dont les expressions littérales sont homogènes, est à cet égard significative.

Cette approche géométrique s'infléchira cependant avec Descartes, chez lequel ces pratiques perdurent dans un premier temps seulement de sa *Géométrie* – un temps pédagogique –, puisqu'il affirmera que le choix d'une grandeur quelconque pour unité permet de *rapporter d'autant mieux* les grandeurs *aux nombres* (21), et qu'il ramènera les problèmes de construction géométrique à la résolution d'équations numériques ou paramétriques, dont l'ordre reste néanmoins gouverné par la problématique des lieux (22). L'algébrisation de la géométrie, pour cause de nouvelle analyse, avait commencé, qui devait conduire à l'analyse infinitésimale.

On voit par là que les premières manifestations d'une démarche de type algébrique ne se décrivent pas en termes de degrés à franchir, et qu'une échelle de Richter des séismes algébriques est chose un tantinet expéditive.

Des problèmes que nous qualifions aujourd'hui du troisième degré ont été traités très tôt : on en trouve sur les tablettes babylonniennes, du type "$x^3 = a$" ou

(20) Cf. les *Textes Mathématiques Babyloniens* transcrits et traduits par F. Thureau-Dangin, Leiden (E. J. Brill), 1938. Par exemple : "*J'ai additionné le septième du flanc et la surface : vingt-sept. Le front est trente soixantièmes. Que sont le flanc et la surface ? Le flanc est quarante-deux, la surface vingt et un*" (Bibl. Strasbourg, n°362).

(21) *La Géométrie*, Livre I, p. 297, II. 19-20.

(22) Descartes parle de "genres", qui résultent de sa résolution systématique du problème de Pappus dit "à n droites" ; le premier genre recouvre nos degrés 1 et 2 (problème à trois et quatre droites), le second les degrés 3 et 4 (5 et 6 droites), et ainsi de suite.

"$x^2(x + 1) = a$" ou quadratocubique (équation du second degré d'inconnue x^3), et aussi, sous une forme géométrique, chez les Grecs ; il n'est qu'à évoquer le problème délien de la duplication du cube [(23)], qui conduisit à de multiples recherches sur l'insertion de deux moyens proportionnelles entre deux grandeurs : c'est, par exemple, la considération de la cissoïde, par Dioclès (II[e] siècle av. J.-C.). Il n'en reste pas moins vrai que la résolution systématique des équations quadratiques pouvait encourager à chercher un algorithme général pour résoudre les problèmes faisant intervenir des grandeurs cubiques.

Sans parler de l'analyse diophantienne, qui pousse très loin la considération des degrés et qui a influencé la deuxième génération de savants arabes, mais qui n'a pas pour objet la résolution d'équations déterminées du troisième degré, on peut noter que des mathématiciens comme Al-Mahani ou Ibn Al-Haytham (965-1093, connu en occident sous le nom d'Alhazen), ont traduit certains problèmes géométriques de l'antiquité grecque sous une forme numérique et algébrique : en particulier, le fameux problème d'Archimède de division de la sphère en deux calottes de rapport des volumes donné, par un plan qu'il faut déterminer de position, revient, chez Al-Mahani, à chercher un nombre dont le cube augmenté d'un nombre donné égale son carré ; s'il ne parvient pas, et pour cause [(24)], à construire une telle grandeur à la règle et au compas, en revanche Alhazen et Al-Khazin parviendront par des voies distinctes au résultat qu'Eutocius d'Ascalon (ca. 500 ap. J.-C.) avait déjà indiqué : cette grandeur s'obtient par intersection de deux coniques, une parabole et une hyperbole, et, fort de ce résultat, Alhazen ira même jusqu'à résoudre un problème d'optique d'expression biquadratique à l'aide d'un cercle et d'une hyperbole. Enfin, Al-Biruni (973-1048) est conduit à des équations cubiques pour la détermination des cordes de certains angles ($20°$ et $80°$), et Omar Khayyam rédige, autour de 1070, un grand traité des équations cubiques d'inconnue numérique ou quantitative, le *Resala*, dans lequel il classe 14 types canoniques, qu'il résoud par intersection de deux coniques bien adaptées, tout en formulant le souhait que l'un de ceux "qui viendront" réalisera la résolution "par radicaux" de ces équations. La science arabe verra d'ailleurs deux des siens proposer des procédés de résolution numérique par approximations, suivant ce qu'on peut appeler les premiers algorithmes récurrents d'approximations successives : ce sont Sharaf Al-Din Al-Tusi, au XII[e] siècle, et Al-Kashi († 1429). Mais c'est au XVI[e] siècle, en Italie, que se déclarèrent les *neveux* d'Al-Khayyam.

C'est Girolamo Cardano (1501-1576), en 1545, qui vendit la mèche allumée vers 1535 par Niccolo Fontana de Brescia, dit Tartaglia ("le bègue", 1499-1557) et même en 1500 par Scipione del Ferro (1465-1526), tous deux auteurs de solutions "par radicaux" de certaines "équations du troisième degré". En effet, Cardan publia son *Ars magna* en 1545, et y inséra des formules de résolution des équations cubiques, après en avoir obtenu l'essentiel de Tartaglia, en 1539 et non sans avoir juré un secret qu'il ne sut pas tenir ; ces formules avaient permis à Tartaglia de répondre vic-

(23) La légende veut que ce problème de la duplication du cube soit apparu à l'occasion de l'édification, à Délos, d'un autel de volume double de l'autel déjà existant.

(24) Mais cela nous est facile à dire, depuis que Wantzel a démontré la non-constructibilité des solutions d'une équation du troisième degré, en... 1843.

torieusement au défi lancé par un certain Antonio Maria Fior, persuadé que la solution particulière de son ami Scipione del Ferro était indépassable. Bien que Cardan reconnût sa dette à Tartaglia, celui-ci crut bon de s'expliquer sur cette trahison qui lui ôtait les moyens de défendre un poste indispensable à sa subsistance, en consacrant à cette question un chapitre de ses *Quesiti et Inventioni diverse* de 1554. La fameuse formule de Cardan devrait donc revenir à Ferro ou Tartaglia, mais il faut reconnaître au médecin et astrologue qu'il donna une classification complète des équations cubiques (si l'on excepte le cas $ax^3 + bx + c = 0$, avec a, b, et c positifs, qui n'a pas lieu d'être dès lors que l'on considère des grandeurs positives), qu'il montre comment l'on peut "supprimer" le terme du second degré de l'équation "générale", qu'il s'interroge sur le nombre des solutions d'une telle équation, et qu'il traite aussi d'une équation du quatrième degré dont l'équation résolvante est du troisième degré et dont il attribue la solution à l'un de ses élèves, Ludovico Ferrari (1522-1565).

Il reste que le point de départ, qu'il soit de Cardan ou d'un autre, est bien d'origine "géométrique" au sens de l'algèbre géométrique des Anciens, qui énonçait par exemple qu'un carré construit sur une ligne composée de deux grandeurs est la somme de deux carrés construits sur ces deux grandeurs et de deux rectangles produits par ces deux grandeurs ; Cardan écrira de même qu'un cube construit sur une telle ligne est composé de deux cubes, de trois parallélépipèdes oblongs et de trois parallélépipèdes plats, idée qu'il exprime d'ailleurs en une énigmatique figure plane, que l'on peut comprendre comme une coupe du cube ou comme un diagramme représentant les quatre termes du développement cubique réduit du binome, en une sorte d'algèbre figurée. Quiconque a tenté de lire ces textes de Cardan – non superficiellement, s'entend –, comprendra pourquoi je ne les ai pas utilisés à des fins pédagogiques : il m'a suffi déjà d'avoir à les commenter dans des stages de formation...

Rappelons la formule de Cardan, sous sa forme moderne.

L'équation $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$ étant ramenée à $x^3 + px + q = 0$, on a :

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}$$

formule qui ne donne une solution réelle immédiate à l'équation qu'à la condition que : $27q^2 + 4p^3 \geq 0$.

Si l'on voit Cardan se risquer à écrire des radicaux portant sur des quantités négatives, il n'ira pas jusqu'à manipuler de tels monstres au point de chercher d'éventuelles racines cubiques de nombres imaginaires qui lui eussent permis de trouver l'une des trois racines dans le cas dit "irréductible". En effet, l'ironie veut que l'algorithme de Cardan conduise à extraire les racines cubiques de deux nombres complexes conjugués, précisément dans le cas où il y a trois racines réelles à une équation ; et sans cette singularité et la nécessité qu'il y avait de tourner la difficulté – sachant que les solutions existaient, suivant la bonne vieille habitude qui consiste à analyser des problèmes dont on connaît par avance le résultat –, nul doute que les algébristes italiens se seraient détournés d'objets rencontrés au hasard des calculs. C'est à la hardiesse de Raffaele Bombelli (1526-1572) que l'on doit, outre un exposé systématique sur la résolution des équations cubiques et biquadratiques, la seconde innovation en matière de "formule de Cardan" : son *Ars magna* de 1572 livre le secret dans le cas irréductible ; il suffit de trouver deux nombres complexes conjugués dont les cubes soient les deux quantités imaginaires conjuguées (nommées binome et apotome) pour qu'on puisse "extraire" les racines cubiques de ces quantités, racines dont la somme sera réelle.

L'histoire est loin d'être finie, qui nous conduit à Galois, mais où serait le suspense si l'on ne tirait pas à la ligne pour faire durer le feuilleton ! En l'occurrence, seul le premier épisode nous intéressait, qui restera ici sans postérité, pour céder la place à de bons auteurs.

Quelques bonnes feuilles

Pourquoi relire Euler ? J'y reviendrai. Lisons d'abord.

1^re^ S4. Lycée Malherbe. Année 1988-1989.

Devoir par groupes à rendre le samedi 15 octobre 1988.

Lisez attentivement le texte ci-dessous, le crayon à la main, avant de répondre aux questions qui le suivent. Il s'agit d'un extrait des *Elemens d'algebre* de Léonard Euler, Livre 1 (*De l'analyse déterminée*), Section quatrième (*Des Equations algébriques, et de la résolution de ces Equations*), Chapitre XII, p. 623 dans l'édition française de l'an III (1794), avec des notes de Bernoulli et Lagrange. À noter que l'orthographe de l'époque a été respectée, que "xx" signifie "x^2", que le caractère "&" est ce que l'on appelle une "esperluette" et signifie "et", et que les notes [1], [2], etc., renvoient à mes propres commentaires qui suivent le texte.

De la Regle de CARDAN ou de SCIPION FERREO.

734.

Lorsqu'on a chassé les fractions d'une équation du troisième degré, suivant la maniere enseignée [1], & qu'aucun des diviseurs du dernier terme ne se trouve être une racine de l'équation, c'est une marque certaine, non-seulement que l'équation n'a pas de racine en nombres entiers, mais qu'une racine fractionnaire même ne peut avoir lieu ; c'est ce que nous allons prouver.

Soit l'équation $x^3 - axx + bx - c = 0$, où a, b, c, signifient des nombres entiers ; si on vouloit supposer, par exemple, $x = \frac{3}{2}$, on auroit $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$; or le premier terme a seul ici 8 pour dénominateur ; tous les autres sont, ou des nombres entiers, ou divisés seulement par 4 ou par 2, & ne peuvent par conséquent faire 0 avec le premier terme : la même chose a lieu pour toute autre fraction.

735.

Comme donc dans ces cas les racines de l'équation ne sont ni des nombres entiers, ni des fractions, elles sont irrationnelles, ou même, ce qui arrive souvent, imaginaires [2]. Or, la maniere de les exprimer alors & de déterminer les signes radicaux qui les affectent, fait un point très-important, & qui mérite d'être expliqué ici avec soin. On attribue cette méthode, qu'on nomme *la regle de Cardan*, à *Cardan*, ou plutôt à *Scipion Ferreo*, qui ont vécu il y a quelques siecles (*) [3].

736.

Il faut, pour entrer dans l'esprit de cette regle, considérer d'abord avec attention la nature d'un cube, dont la racine est un binome [4].

Soit $a + b$ cette racine, le cube en est $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, & nous voyons qu'il est composé des cubes des deux termes du binome, & outre cela de deux termes moyens, $3aab + 3abb$, qui ont le facteur commun $3ab$, lequel multiplie l'autre facteur $a + b$, c'est-à-dire que ces deux termes contiennent le triple produit des deux termes du binome multiplié par la somme de ces termes.

737.

Qu'on suppose maintenant $x = a + b$, & qu'on prenne de part & d'autre le cube, on a $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. Or puisque $a + b = x$, on aura l'équation du troisieme degré, $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$ ou $x^3 = 3abx + a^3 + b^3$, dont nous savons qu'une des racines est $x = a + b$. Toutes les fois donc qu'il se présente une telle équation, nous pouvons en assigner une racine [5].

Soit par exemple, $a = 2$ & $b = 3$, on aura l'équation $x^3 = 18x + 35$, que nous savons avec certitude avoir $x = 5$ pour racine.

738.

Que de plus on suppose à présent $a^3 = p$ & $b^3 = q$, on aura $a = \sqrt[3]{p}$ & $b = \sqrt[3]{q}$, par conséquent $ab = \sqrt[3]{pq}$; lors donc que l'on rencontre une équation du troisieme degré de la forme : $x^3 = 3x.\sqrt[3]{pq} + p + q$, on sait qu'une des racines est $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Or on peut toujours déterminer p & q, de maniere que tant $3\sqrt[3]{pq}$ que $p + q$ soient des quantités égales à un nombre donné ; ainsi on est toujours en état de résoudre une équation du troisieme degré, de l'espece dont nous parlons.

739.

Soit proposée en général l'équation $x^3 = fx + g$; il s'agira ici de comparer f avec $3\sqrt[3]{pq}$, & g avec $p + q$; c'est-à-dire qu'il faudra déterminer p & q de manière que $3\sqrt[3]{pq}$ devienne égal à f, & que $p + q$ devienne égal à g ; car nous savons alors qu'une des racines de notre équation sera $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

740.

Nous avons donc à résoudre ces deux équations, I.) $3\sqrt[3]{pq} = f$, & II.) $p + q = g$. La première donne $\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3}$, & $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{27}f^3$, & $4pq = \frac{4}{27}f^3$. La seconde équation étant quarrée, donne $pp + 2pq + qq = gg$; si l'on en soustrait $4pq = \frac{4}{27}f^3$, on a $pp - 2pq + qq = gg - \frac{4}{27}f^3$, & prenant la racine quarrée de part et d'autre, on a $p - q = \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}$. Or puisque $p + q = g$, on a $2p = g + \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}$, & $2q = g - \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}$, par conséquent $p = \frac{g + \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}$ & $q = \frac{g - \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}$.

741.

Toutes les fois donc qu'on a une équation du troisieme degré de la forme $x^3 = fx + g$, quels que soient les nombres f & g, on a toujours pour une des racines ;

c'est-à-dire une quantité irrationnelle, qui renferme non-seulement le signe radical

$$x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}}$$

quarré, mais aussi le signe de la racine cubique ; & c'est cette formule qu'on nomme proprement la *regle de Cardan*.

742.

Appliquons-la à quelques exemples, pour en mieux faire comprendre l'usage.

Soit $x^3 = 6x + 9$, on aura $f = 6$ & $g = 9$; ainsi $gg = 81$, $f^3 = 216$, & $\frac{4}{27}f^3 = 32$; puis $gg - \frac{4}{27}f^3 = 49$, & $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = 7$. Donc une des racines de l'équation donnée est $x = x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$.

743.

Soit proposée cette autre équation $x^3 = 3x + 2$; on aura $f = 3$ & $g = 2$; par conséquent $gg = 4$, $f^3 = 27$, & $\frac{4}{27}f^3 = 4$; ce qui nous donne $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = 0$; d'où il s'ensuit qu'une des racines est $x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2$.

744.

Il arrive souvent cependant que, quoiqu'une telle équation ait une racine rationnelle, on ne peut trouver cette racine par la regle dont nous nous occupons.

Soit donnée l'équation $x^3 = 6x + 40$, où $x = 4$ est une des racines. Nous avons ici $f = 6$ & $g = 40$, de plus $gg = 1600$ & $\frac{4}{27}f^3 = 32$; ainsi $gg - \frac{4}{27}f^3 = 1568$, & $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = \sqrt{1568} = \sqrt{4.4.49.2} = 28\sqrt{2}$; par conséquent une des racines $x = \sqrt[3]{\frac{40+28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40-28\sqrt{2}}{2}}$, ou $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$; & cette quantité est réellement $= 4$, quoiqu'à la premiere inspection on ne s'en doute pas. En effet le cube de $2+\sqrt{2}$ étant $20 + 14\sqrt{2}$, on a réciproquement la racine cubique de $20 + 14\sqrt{2}$ égale à $2 + \sqrt{2}$; de même $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$; donc notre racine $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$ (*) [6].

745.

On pourrait objecter à cette règle, qu'elle ne s'étend pas à toutes les équations du troisieme degré, parce que le quarré de x ne s'y rencontre point, c'est-à-dire que le second terme manque dans l'équation. Mais nous remarquerons que toute équation complette peut se transformer en une autre où le second terme manque, après quoi l'on peut par conséquent appliquer la regle.

Soit pour le prouver, l'équation complete $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$. Si l'on prend ici le tiers du coefficient 6 du second terme, & qu'on fasse $x - 2 = y$, on aura $x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$, & $x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$; par conséquent

$$\begin{array}{rlllll} x^3 = & y3 & +6yy & +12y & +8 \\ -6xx = & & -6yy & -24y & -24 \\ +11x = & & & +11y & +22 \\ -6 = & & & & -6 \\ \hline x^3 - 6xx + 11x - 6 = & y^3 & & -\ y. & \end{array}$$

On a donc l'équation $y^3 - y = 0$, dont la résolution est manifeste, puisqu'on voit sur le champ qu'elle est le produit des facteurs $y(yy - 1) = y(y + 1)(y - 1) = 0$. Si l'on fait maintenant chacun de ces facteurs $= 0$, on a I.) $\begin{cases} y = 0, \\ x = 2, \end{cases}$ II.) $\begin{cases} y = -1, \\ x = 1, \end{cases}$ III.) $\begin{cases} y = 1, \\ x = 3, \end{cases}$ c'est-à-dire, les trois racines trouvées déjà plus haut.

746.

Soit donnée à présent l'équation générale du troisieme degré,

$x^3 + axx + bx + c = 0$, de laquelle il s'agisse d'éliminer le second terme.

On ajoutera pour cet effet à x le tiers du coefficient du second terme, en conservant le même signe, & on écrira pour cette somme une nouvelle lettre, par exemple, y ; de sorte qu'on aura $x + \frac{1}{3}a = y$, & $x = y - \frac{1}{3}a$, d'où résulte le calcul suivant : $x = y - \frac{1}{3}a$, $xx = yy - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}aa$, & $x^3 = y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3$; par conséquent

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 - ayy + \frac{1}{3}ayy - \frac{1}{27}a^3 \\ axx = & \quad + ayy - \frac{2}{3}aay + \frac{1}{9}a^3 \\ bx = & \qquad\qquad + by - \frac{1}{3}ab \\ c = & +c \\ \hline \end{array}$$

$$y^3 - (\tfrac{1}{3}aa - b)y + \tfrac{2}{27}a^3 - \tfrac{1}{3}ab + c = 0,$$

équation dans laquelle le second terme manque.

747.

Nous sommes en état, moyennant cette transformation, de trouver les racines de toutes les équations du troisieme degré ; l'exemple qui suit en fournira une preuve.

L'équation proposée est $x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0$.

Il s'agit d'abord de chasser le second terme ; on fera pour cet effet $x - 2 = y$, & on aura $x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$, & $x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$; donc

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx = & \quad - 6yy - 24y - 24 \\ +13x = & \qquad\quad + 13y + 26 \\ -12 = & \qquad\qquad\quad - 12 \\ \hline & y^3 \quad + y \quad - 2 = 0, \text{ ou } y^3 = -y + 2. \end{array}$$

Si on compare cette équation avec la formule $x^3 = fx + g$, on a $f = -1$, $g = 2$; donc $gg = 4$, & $\frac{4}{27}f^3 = -\frac{4}{27}$; de plus $gg - \frac{4}{27}f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$, & $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$; par conséquent $y = \sqrt[3]{\left(\frac{2 + \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{2 - \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)}$, ou

$$y = \sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{21}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2\sqrt{21}}{9}} = \sqrt[3]{\frac{9+2\sqrt{21}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{9-2\sqrt{21}}{9}} = \sqrt[3]{\frac{27+6\sqrt{21}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{27-6\sqrt{21}}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{27+6\sqrt{21}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{27-6\sqrt{21}} \,:$$

& il reste à substituer cette valeur dans $x = y + 2$.

748.

Nous sommes parvenus dans la solution de cet exemple, à une quantité doublement irrationnelle ; mais il ne faut pas en conclure sur le champ que la racine est irrationnelle, parce qu'il pourrait arriver par un heureux hasard, que les binomes $27 \pm 6\sqrt{21}$ fussent des cubes effectifs ; & c'est aussi ce qui a lieu ici ; car le cube de $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ étant $\frac{216+48\sqrt{21}}{8} = 27 + 6\sqrt{21}$, il suit que la racine cubique de $27 + 6\sqrt{21}$ est $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$, & que la racine cubique de $27 - 6\sqrt{21}$ est $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$. Cela fait donc que la valeur trouvée pour y, devient $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Or puisque $y = 1$, nous avons $x = 3$ pour une des racines de l'équation proposée, & les deux autres se trouveront en divisant l'équation par $x - 3$.

$$\begin{array}{lllll}
x-3) & x^3 & -6xx & +13x & -12 \ (xx-3x+4 \\
 & x^3 & -3xx & & \\
 & & -3xx & +13x & -12 \\
 & & -3xx & +9x & \\
\hline
 & & & 4x & -12 \\
 & & & 4x & -12 \\
\hline
 & & & & 0.
\end{array}$$

Et en égalant à 0 le quotient $xx - 3x + 4$; l'on a $xx = 3x - 4$, & $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$. Ce sont les deux racines en question, mais elles sont imaginaires [7].

749.

C'est par hasard, comme nous l'avons remarqué, qu'on a pu, dans l'exemple précédent, extraire la racine cubique des binomes trouvés, & ce cas n'a lieu que lorsque l'équation a une racine rationnelle, & que par conséquent on emploie avec plus de facilité, pour trouver cette racine, les regles du Chapitre précédent. Mais quand aucune racine rationnelle n'a lieu, il n'est pas possible au contraire d'exprimer autrement la racine qu'on trouve, qu'en suivant la regle de Cardan ; de sorte qu'il est impossible alors d'appliquer des réductions. Par exemple, dans l'équation $x^3 = 6x + 4$, on a $f = 6$ & $g = 4$; de sorte que $x = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}$, ce qui ne peut s'exprimer d'une manière différente [8] (*) [9].

NOTES :

[1] Euler fait ici référence à une méthode décrite dans un chapitre précédent. Partant de l'équation $\frac{a}{A}x^3 + \frac{b}{B}x^2 + \frac{c}{C}x + \frac{d}{D} = 0$, où a, b, c et d, A, B, C et D sont des entiers tels que a et A, b et B, &c., soient premiers entre eux, on commence par multiplier les deux membres de l'équation par $\frac{A}{a}$, ce qui donne une équation unitaire (c'est-à-dire dont le terme de plus haut degré a pour coefficient 1) :
$x^3 + \frac{Ab}{aB}x^2 + \frac{Ac}{aC}x + \frac{Ad}{aD} = 0$. Puis on cherche le plus petit commun multiple de aB, aC et aD, qui est aussi le plus petit commun multiple de B, C, et D, multiplié par a. Soit M ce nombre entier ; posons $x = \frac{y}{M}$ l'équation devient :
$\frac{y^3}{M^3} + \frac{Ab}{aBM^2}y^2 + \frac{Ac}{aCM}y + \frac{Ad}{aD} = 0$. Il ne reste plus qu'à multiplier les deux membres par M^3 pour obtenir une équation, d'inconnue y, à coefficients entiers : $y^3 + \frac{AbM}{aB}y^2 + \frac{AcM^2}{aC}y + \frac{AdM^3}{aD} = 0$; en effet M est divisible par Ba, par Ca et par Da.
Exemple : $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{23}{3} = 0$ devient : $x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{23}{2} = 0$ en multipliant par $\frac{3}{2}$; le PPCM de 2 et 4 est 4 : posons $x = \frac{y}{4}$, l'équation devient : $\frac{1}{64}y^3 - \frac{1}{64}y^2 + \frac{9}{16}y - \frac{23}{2} = 0$, et en multipliant par 64 : $y^3 - y^2 + 36y - 736 = 0$;

[2] Les "racines" - ou solutions - imaginaires d'une équation sont celles qui résultent des formules de résolution du second degré lorsque son discriminant est négatif : elles font intervenir de nouveaux objets assez étranges, les racines carrées de nombres négatifs (d'un discriminant négatif, par exemple), que l'on appelle "imaginaires purs". Elles sont appelées imaginaires depuis le XVI^e siècle et encore aujourd'hui, bien que l'on ait inventé l'expression de "nombres complexes", pour désigner l'ensemble des nombres réels ou imaginaires qui résultent de la combinaison des nombres réels et des nombres imaginaires purs.

[3] L'astérisque appelle une note de bas de page qui indique :
"(*) L'histoire de cette regle, découverte dans le même temps par *Tartaglia*, se lit avec autant d'intérêt que de fruit dans l'*Histoire des Mathématiques*, par M. *de Montucla*."

[4] Un binôme est une expression algébrique, somme de deux termes comme a + b, et dire que la racine d'un cube est un binôme, c'est dire que ce cube est de la forme

$(a+b)^3$, comme le montre la suite du texte. Ce mot était à l'origine couplé avec "apotome", qui désigne la différence "a – b".

[5] En assigner une racine veut dire : en découvrir et en exhiber une racine.

[6] L'astérisque appelle une note de bas de page qui indique :
"(*) On n'a pas pour l'extraction de la racine cubique de ces binomes, des regles générales comme pour l'extraction de la racine quarrée : celle que différens Auteurs ont données ramenent toujours à une équation mixte du troisieme degré semblable à la proposée. Au reste, quand l'extraction de la racine cubique est possible, la somme des deux radicaux qui représentent la racine de l'équation, devient toujours rationnelle, de sorte qu'on peut la trouver immédiatement par la méthode indiquée à l'article 722."

[7] On a donc ici un exemple de racine imaginaire (voir la note [2]), contenant "la racine" de (– 7).

[8] En fait Euler sait très bien que la formule de Cardan donne ici aussi une solution réelle, car les nombres imaginaires $2+2\sqrt{-1}$ et $2-2\sqrt{-1}$ peuvent être considérés comme les cubes de $\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{-1}$ et de $\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{-1}$, et donc $x=\sqrt{3}+1$ est solution. Mais cela suppose d'être familiarisé avec les nombres appelés complexes. Dans ce cas, vous ne pourrez donc pas résoudre l'équation par le méthode de Cardan.

[9] L'astérisque appelle une note de bas de page qui indique :
"(*) On a dans cet exemple $\frac{4}{27}f^3$ plus petit que gg, ce qui est la cas très connu sous le nom du *cas irréductible du troisieme degré*, & qui est d'autant plus remarquable, qu'alors toutes les trois racines sont toujours réelles. On ne peut dans ce cas faire usage de la formule de Cardan, qu'en y appliquant des méthodes d'approximation, par exemple, en la transformant en une série infinie. M. *Lambert* a donné dans l'ouvrage cité à l'article 40, des tables particulières qui servent à trouver facilement les valeurs numériques des racines des équations du troisieme degré, tant dans le cas irréductible que dans les autres cas. On peut aussi employer pour cet usage les tables ordinaires des sinus. Voyez l'*Astronomie sphérique* de M. *Mauduit*, imprimée à Paris en 1765.

Au reste, il ne faut pas chercher dans cet Ouvrage de M. *Euler*, tout ce qu'il y avoit à dire sur les résolutions, soit directes, soit approchées, des équations. Il avoit à traiter encore trop d'objets curieux & importans, pour s'appesantir sur ces matieres ; mais qu'on consulte l'*Histoire des Mathématiques*, l'*Algebre* de M. *Clairaut*, le *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, & les derniers volumes des Mémoires des Académies des Sciences de Paris & de Berlin, on y trouvera à peu près tout ce qu'on fait aujourd'hui sur la résolution des équations."

Le premier point que je voudrais souligner touche au problème de l'heuristique : une méthode générale est-elle une bonne méthode ? Dit autrement : un marteau-pilon convient-il pour écraser une mouche ? Ou encore : l'acquisition d'une méthode générale doit-elle se faire au détriment d'anciennes recettes particulières, qui ont fait la preuve de leur efficacité ? Euler semble répondre non, en s'attaquant d'abord au cas particulier des équations unitaires à coefficients entiers (ou rationnels, qui s'y ramènent), dont les solutions entières ou rationnelles éventuelles peuvent se trouver parmi les diviseurs du terme constant de l'équation. On voit que la "recette" n'est pas ici de cuisine ordinaire ; il reste que l'ordre d'exposition met en évidence un souci d'efficience qui ne retire rien à la généralité de la méthode de Cardan : il induit même que l'essentiel est l'obtention d'un résultat, et que la sobriété, voire la beauté des moyens, est un autre genre de loi générale, qui peut prévaloir en mathématiques, devenant une fin au même titre que l'obligation de résultat.

Ceux qui ont vu des générations de jeunes gens ou de jeunes filles, par une sorte de réflexe pavlovien, se saisir du discriminant pour résoudre "$5x^2 + 3x = 0$" ou "$9x^2 - 4 = 0$" apprécieront les paragraphes 734 et 735 d'Euler : ils valent le détour... Non pas que la généralité d'une méthode n'ait à s'exercer dans les cas où elle est le moins indispensable ; bien au contraire, c'est ainsi qu'elle fait la preuve de son universelle efficience ! Et d'ailleurs, pour appliquer la règle de Cardan, Euler prend des exemples à coefficients entiers et possédant au moins une solution entière ; au passage, il met en évidence que la formule donne des expressions en apparence irrationnelles, preuve s'il en était besoin, que la recherche directe de solutions rationnelles reste d'actualité ; on notera au passage qu'il revient deux fois sur cette question au travers de deux exemples numériques (§§ 741 et 748) ; *bis repetita placent* assez en pédagogie. Où l'on voit que les plus grands n'ont pas craint de se contredire ou de se répéter pour se faire entendre.

Après la mise en évidence de l'universalité d'un algorithme, il est bon de rappeler l'élégance et l'économie du geste, et Euler donne ici une leçon qui peut être profitable, et dont la généralisation traverse d'autres classes de problèmes et de démarches, ce qui tend à prouver que la généralisation, en matière de pédagogie comme en matière de théorie scientifique, est affaire relative : ce peut être, par exemple, l'occasion d'un rappel ou d'un premier exposé sur les rapports entre coefficients et racines ; ce fut pour moi le prétexte aux deux, puisque j'avais évoqué la question à deux reprises, avec le produit des racines d'un trinôme du second degré, et avec les remarques de Descartes sur le développement du produit d'un nombre quelconque de binômes du type "$x - a$", à partir desquelles il induit le théorème fondamental de l'algèbre et sa fameuse règle d'alternance des signes.

Un autre aspect du texte me paraît intéressant : c'est le rôle qu'Euler fait jouer aux lettres. Qui n'a pas rencontré cette difficulté qu'il y a à faire prendre la lettre pour ce qu'elle n'est pas en géométrie ? Le premier temps de l'écriture cartésienne que j'évoquais plus haut ("a" désigne une grandeur, mesurée par un nombre positif), voire, chez Viète, la loi d'homogénéité ("a^2 ou ab" désignent une surface, ce qui amène Descartes à écrire certaines expressions "générales" sous la forme "$x^3 + ax^2 + b^2x + c^3$"), ne pourraient-ils être un premier moment pédagogique ? Majuscules et minuscules désignent des objets ou des grandeurs "objectives". Ne peut-on en user ainsi en calcul algébrique, avant d'en étendre l'usage aux quantités négatives ? On a vu que les classifications des "équations du second degré" par Al-Khwarizmi ou "du troisième degré" par Cardan et Bombelli relevaient du préjugé géométrique, et on voit ici qu'Euler, s'il "n'en est plus à ce stade" – comme diraient d'aucuns qui condescendent autant avec leurs maîtres qu'avec "leurs" élèves –, a "néanmoins" le souci pédagogique de sérier les problèmes, et d'éviter d'interposer l'obstacle de la lettre comme symbole d'un réel de signe quelconque, lorsqu'il veut illustrer numériquement une démarche réputée générale : écrivant l'équation réduite "$x^3 = fx + g$", il donne pour exemple d'application "$x^3 = 6x + 9$", "$x^3 = 3x + 2$" et "$x^3 = 6x + 40$", et ce n'est que dans un second temps, à l'occasion de la réduction d'équations non lacunaires, qu'il est conduit à traiter le cas où "$g = 0$", avec l'équation "$y^3 = y$", ou le cas "$f = -1$ & $g = 2$", avec l'équation "$y^3 = -y + 2$".

Enfin, pour m'en tenir seulement à ces quelques aspects du texte, je voudrais souligner l'intérêt du paragraphe 749 et de la note historique de Lagrange : elle met en évidence une certaine réserve d'Euler, qui fait semblant de ne pas savoir poursuivre, là où Lagrange ne peut résister à en dire en peu plus, sans pour autant vendre complétement la mèche. Pour ma part, j'ai tellement peu resisté que je donne en note [8] une rapide idée de ce que l'on peut aller plus loin et de jusqu'où l'on peut aller. Sacrilège ? Certes non : on aura compris que cette note est restée lettre morte pour la majeure partie de ceux à qui je la destinais. Mais il vaut mieux un horizon bouché que pas d'horizon du tout ; on l'aura compris : telle serait plutôt mon épistémologie spontanée.

De quoi méditer

Voici maintenant le questionnaire qui accompagnait ce texte et ses commentaires :

En termes modernes, il s'agit ici de résoudre l'équation générale du troisième degré $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

QUESTION N°1 :

Soit $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, une équation du troisième degré dont les coefficients a, b, et c sont entiers. Supposons qu'elle ait des racines, x', x'', et x''' ; on aura alors : $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x')(x - x'')(x - x''')$.

Identifier les coefficients de ces deux polynômes ; quel est le produit des racines de l'équation ? En déduire une méthode pour déterminer les solutions d'une équation du troisième degré à coefficients entiers et unitaire (c'est-à-dire telle que le coefficient de x^3 soit 1), lorsque l'on sait que ces racines sont entières. Appliquer cette méthode à :

a) $x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0$, puis à b) $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$.

Expliquer alors ce qu'Euler veut dire dans les paragraphes 734 & 735 et en tirer des conséquences pour la méthode précédente.

QUESTION N°2 :

En vous inspirant de la méthode exposée par Euler (§§ 745-746), expliquez comment vous procéderiez pour ramener cette équation à l'équation générale, sans terme du second degré, $x^3 + px + q = 0$. Appliquez votre procédé aux exemples proposés dans la question n°1, pour les transformer en équations sans termes du second degré.

QUESTION N°3 :

Toujours en vous inspirant de cette méthode (§§ 735-741), donner, en fonction de p et q, une formule de type *"Cardan"* qui permette de résoudre l'équation générale $x^3 + px + q = 0$, et indiquer la condition que doivent vérifier p et q pour que l'on puisse l'appliquer. Résoudre alors l'équation : $x^3 - x^2 - 2x - 12 = 0$, par la méthode dite *"de Cardan"*. Peut-on résoudre, par cette méthode et la formule de Cardan, les équations proposées dans la question n°1 ?

Analytically correct

Corriger est un passage obligé. Non pas dire la loi sans appel, mais penser aussi par écrit devant les étudiants – je n'aime guère le "nom" "apprenants" –, et commenter par oral pour mettre en évidence la diversité des pistes et des formulations.

1^{re} S4. Lycée Malherbe. Année 1988-1989.

Corrigé du devoir d'algèbre du 15-10-88.

Il s'agissait d'expliquer une partie d'un texte d'Euler, et de transposer en termes modernes la méthode de Cardan qui s'y trouve exposée. Ce corrigé va au-delà du minimum exigé, car il apporte des informations complémentaires : lisez-le attentivement pour compléter votre culture sur cette question des équations du troisième degré.

RÉPONSE POSSIBLE À LA QUESTION N°1 :

Soit $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, une équation du troisième degré dont les coefficients a, b, et c sont entiers. Supposons qu'elle ait des racines, x', x'', et x''' ; on aura alors : $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x')(x \; x'')(x \; x''')$. D'où l'on tire, par identification : $(x' + x'' + x''') = - a$; $x'x'' + x''x''' + x'''x' = b$; $x'x''x''' = - c$. On retrouve ici l'idée, déjà rencontrée pour le second degré ($x' + x'' = - S$ et $x'x'' = P$ dans l'équation $x^2 + Sx + P = 0$), qu'il y a des relations entre coefficients et racines d'une équation polynômiale. Cette idée est de fait générale : qu'il vous suffise de développer maintenant : $(x - x')(x - x'')(x - x''')(x - x'''')$, et d'identifier le résultat à $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, pour observer comment s'établissent ces relations au degré 4, et pour tenter une généralisation au degré n.

Il résulte de ce que $x'x''x''' = -c$ une méthode pour déterminer les solutions d'une équation du troisième degré à coefficients entiers, unitaire et dont on sait que ses racines sont entières. En effet, si 'c' est un entier relatif (*i-e* : positif ou négatif, *i-e* encore : élément de Z), ainsi que x', x'' et x''', la relation entre crochets signifie que $|x'|$, $|x''|$ et $|x'''|$ sont des diviseurs de $|c|$. Or un diviseur 'd', entier naturel (*i-e* : positif, *i-e* encore : élément de N), d'un autre entier naturel 'n', est nécessairement produit composé de facteurs premiers diviseurs de 'n', élevés chacun à une puissance inférieure ou égale à celle qu'il supporte dans la décomposition en facteurs premiers de 'n'. Prenons un exemple : quels sont les diviseurs de 36 ? La division en facteurs premiers de 36 est : 36 = 2.18 = 2.2.9 = 2.2.3.3 ; les diviseurs de 36 sont donc : 1, 2, 3, 2.2 = 4, 2.3 = 6, 3.3 = 9, 2.2.3 = 12, 2.3.3 = 18 et 2.2.3.3 = 36. De même un diviseur de 360 = 2.2.2.3.3.5 n'est divisible que par un entier divisible au plus par $2^3 = 8$ comme puissance de 2, par $3^2 = 9$ comme puissance de 3, et par 5^1 comme puissance de 5 ; par exemple, 360 est divisible par 2.2.3.5 = 60, mais pas par 2.3.3.3 = 54 ni par 2.2.3.5.5 = 300. Il faut donc chercher les racines d'une telle équation parmi les diviseurs de $|c|$.

Appliquons cette méthode à : $P(x) = x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0$. Les diviseurs de 64 = 2.2.2.2.2.2 sont : 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64. Il faut donc tester ces nombres et leurs opposés dans le polynôme P(x) :

$P(1) = 1 - 14 + 56 - 64 = -21$; $P(-1) = -135$; 1 et -1 ne sont pas racines ;

$P(2) = 8 - 56 + 112 - 64 = 0$; 2 est racine. On pourrait s'en contenter, diviser P(x) par (x – 2), ce qui donne $(x^2 - 12x + 32)$ dont les racines sont 4 et 8. Mais on peut poursuivre les tests, puisque les autres racines sont sûrement entières :

$P(-2) = -240$; – 2 n'est pas racine ; $P(4) = 64 - 224 + 224 - 64 = 0$; – 4 l'est ;

$P(-4) = -576$; – 4 n'est pas racine ; enfin :

$P(8) = 512 - 896 + 448 - 64 = 0$; 8 est la troisième racine cherchée ; inutile d'aller plus loin : $P(x) = (x - 2)(x - 4)(x - 8)$.

De même pour $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$. Les diviseurs de 36 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.

$P(1) = 1 - 11 + 36 - 36 = -10$; 1 n'est pas racine ;

$P(-1) = -1 - 11 - 36 - 36 = -84$; - 1 n'est pas racine ;

$P(2) = 8 - 44 + 72 - 36 = 0$; 2 est racine (et l'on aurait alors :

$P(x) = (x - 2)(x^2 - 9x + 18)$, donc 3 et 6, racines de $x^2 - 9x + 18 = 0$, sont les deux autres racines, comme on va le voir par le calcul direct) ;

$P(-2) = -8 - 44 - 72 - 36 = -160$; - 2 n'est pas racine ;

$P(3) = 27 - 99 + 108 - 36 = 0$; 3 est racine ; –3, 4 et –4 ne le sont pas ; mais $P(6) = 216 - 396 + 216 - 36 = 0$; 6 est la troisième racine cherchée.

Dans l'hypothèse où l'on ne sait pas quelle est la nature des racines d'une équation du troisième degré, unitaire, à coefficients entiers, on peut donc chercher une éventuelle racine entière parmi le stock des diviseurs entiers naturels, ou de leurs opposés, du terme constant de l'équation, pris en valeur absolue (ce que nous avons fait dans les deux exemples précédents).

Si aucun de ces diviseurs (1 et $|c|$ compris), ni l'un de leurs opposés (-1 et $-|c|$ compris) n'est racine de l'équation, celle-ci n'aura pas de racines rationnelles (*i-e* : entières ou fractionnaires), c'est en tout cas ce qu'exprime Euler dans le §734 et que nous allons développer. Supposons que $\frac{n}{p}$ soit racine de l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, où 'a', 'b' et 'c' sont des entiers relatifs, 'n' et 'p' étant deux entiers relatifs non nuls et premiers entre eux (*i.e* : sans diviseurs communs). Alors :
$\frac{n^3}{p^3} + a\frac{n^2}{p^2} + b\frac{n}{p} + c = 0.$

Multiplions par p^3 : $n^3 + an^2p + bnp^2 + cp^3 = 0$. 'p' n'a pas de diviseur commun avec 'n', donc p^3 n'en a pas non plus avec 'n' ; dès lors l'égalité d'entiers $n(n^2 + anp + bp^2) = -cp^3$ ne se peut que si 'n' divise 'c'. Dans ce cas on aura, avec $c = nd$ et 'd' entier, l'équation : $n^2 + anp + bp^2 + dp^3 = 0$. Soit : $p(an + bp + dp^2) = -n^2$, ce qui impliquerait que 'p' divise 'n', et contredirait l'hypothèse que 'n' et 'p' sont premiers entre eux. C'est ce qu'Euler expose sur l'exemple où $\frac{3}{2}$ est donné comme solution éventuelle de l'équation : $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$; on aurait $27 - 18a + 12b - 8c = 0$, donc : $3(9 - 2a + 4b) = 8c$, ce qui n'est possible, en nombres entiers, que si 3 divise c ; dans ce cas $c = 3d$, et : $9 - 2a + 4b - 8d = 0$, donc $9 = 2(a - 2b + 4d)$, ce qui est impossible en entiers, 9 n'étant pas pair (*i.e* n'étant pas divisible par 2).

Le paragraphe 735 exprime la conséquence logique de cette assertion : si les solutions d'une telle équation ne sont pas diviseurs de $|c|$, elles ne sont pas entières, ni même fractionnaires puisque l'équation est à coefficients entiers ; elles sont donc irrationnelles (*i.e* : elles ne peuvent s'écrire comme rapports d'entiers), voire même imaginaires (au sens où on ne peut extraire la racine carrée d'un nombre négatif, et comme le montre un exemple ultérieur).

RÉPONSE POSSIBLE À LA QUESTION N°2 :

Pour ramener l'équation générale : $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, à la forme tout aussi générale mais sans terme du second degré, $x^3 + px + q = 0$, il suffit de procéder à une translation sur l'inconnue, procédé déjà connu pour transformer une équation du second degré en sa forme canonique (dans laquelle il n'y a plus de terme du premier degré). Ici on pose : $x = y - \frac{a}{3}$, et l'on obtient : $y^3 + (b - \frac{a^2}{3})y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$. Appliquée aux exemples proposés dans la question n°1, cette méthode donne les équations :

a) $y^3 - \frac{28}{3}y - \frac{160}{27} = 0$ et b) $y^3 - \frac{13}{3}y - \frac{70}{27} = 0$.

RÉPONSE A LA QUESTION N°3 :

Euler donne la formule de Cardan pour l'équation générale $x^3 = fx + g$. Pour l'équation $x^3 + px + q = 0$, il suffit donc de poser : $f = -p$ et $g = -q$. La formule devient :

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}$$

formule qui ne donne une solution réelle immédiate à l'équation qu'à la condition que : $27q^2 + 4p^3 \geq 0$.

Pour résoudre alors l'équation : $x^3 - x^2 - 2x - 12 = 0$, on peut appliquer cette formule, après avoir transformé l'équation ; cela fournit $y = \frac{8}{3}$, donc : $x = y + \frac{1}{3} = 3$. Les équations proposées dans la question n°1 ne peuvent être résolues par cette formule avec les seuls moyens dont vous disposez, car leurs transformées par translation ne vérifient pas la condition de positivité : $27q^2 + 4p^3 \geq 0$. On est alors dans le cas qu'Euler qualifie de *"cas irréductible"*. Le recours aux nombres imaginaires permettrait de calculer l'une des trois racines réelles, puis la factorisation du polynôme conduirait aux deux autres racines réelles que l'on est en droit d'attendre dans ce cas, et que l'on a découvertes (2, 4 & 8 pour la première ; 2, 3 & 6 pour la seconde).

Ce corrigé, de même d'ailleurs que l'énoncé, résulte à l'évidence d'un discours préalable, dont on a tenté de restituer plus haut les grandes lignes. Il apparaît en particulier que je ne me suis pas privé d'annoncer la survenue prochaine des nombres complexes : il me semble bénéfique d'entretenir ainsi une vision d'une mathématique non achevée avec le programme que l'on est censé "boucler", et de lever le voile sur le futur immédiat pour entretenir la curiosité ; en outre, un interdit comme "racine de – 1" vaut plus si l'on évoque son dépassement possible dans un domaine plus étendu, ou si l'on se pose la question de sa transgression éventuelle, que s'il est asséné sans discussion comme un absolu. De surcroît enfin, la "nécessité" d'introduire les complexes apparaît dans son contexte historique, et non plus dans une pseudo-explication du type : "il est tout de même agaçant de ne pas pouvoir résoudre les équations du second degré de discriminant négatif !", comme si, historiquement, une mouche platonicienne avait piqué je ne sais quel algébriste du XVI^e siècle, alors qu'il appert que c'est le pragmatisme de géomètres désireux d'exhiber une grandeur positive – voire une "fausse" racine – connue d'avance comme solution d'un problème du troisième degré, à l'aide d'une formule apparemment réfractaire dans le cas donné pour être "irréductible", qui les a conduits à "imaginer" de construire, par analogie, un calcul sur des objets *a priori* inacceptables.

De ce point de vue, la démarche d'Euler m'a paru assez didactique, les notes y tenant lieu de digression et d'ouverture, destinées qu'elles sont aux esprits curieux. Ces jeunes esprits (rescapés ?), plus nombreux qu'on ne le croit, qu'il ne faudrait pas sous-alimenter sous le fallacieux prétexte d'une démocratisation exigeant une révision à la baisse. C'est dire si la variante est possible en matière d'enseignement, acte dont je me plais à dire qu'il relève de l'intime, n'en déplaise aux théoriciens en chambre. Ce que j'illustrerai par un second énoncé, alternatif du précédent, proposé la même année par un collègue dans une première scientifique d'un autre lycée de Caen, sur le même texte que je lui avais communiqué, et qu'il distribua avec les mêmes remarques en notes :

1re S4. Lycée Fresnel. Année 1988-1989.

Devoir d'étude du 7-11-88.

QUESTION 1 :

On donne l'équation (E) : $\frac{2}{3}x^3 + x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{1}{4} = 0$.

1°) En suivant la méthode décrite dans la note [1], déterminez M, u, v et w, entiers tels que l'équation (E) soit équivalente à : $y = Mx$, et $y^3 + uy^2 + vy + w = 0$.

QUESTION 2 :

Soit $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, une équation du troisième degré dont on suppose qu'elle a trois racines (réelles) x_1, x_2 et x_3 ; alors, pour tout x
$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

2°) Exprimer a, b et c, en fonction de x_1, x_2 et x_3.

3°) Si l'on suppose que a, b et c, x_1, x_2 et x_3 sont entiers, déduisez d'une des égalités précédentes et de la lecture des paragraphes 734 et 735 une méthode de recherche des racines x_1, x_2 et x_3.

4°) Appliquez cette méthode à la résolution de :

a) $x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0$, puis de b) $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$.

Expliquez alors ce qu'Euler veut dire dans les paragraphes 734 et 735.

QUESTION 3 :

5°) Après avoir lu attentivement les §§745-747, et en vous inspirant de la méthode décrite par Euler, transformez l'équation : $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ en l'équation sans terme du second degré : $y^3 + py + q = 0$; vous préciserez le changement d'inconnue effectué et les expressions de p et q en fonction de a, b, et c.

6°) Appliquez ce procédé de transformation aux équations proposées dans la question 2.

QUESTION 4 :

Il s'agit dans cette question de mettre au point une méthode générale de résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

7°) En adaptant la méthode décrite dans les paragraphes 736 à 741, établissez une formule de type "*Cardan*" donnant, en fonction de p et q, une racine de l'équation $x^3 + px + q = 0$. Au cours des calculs, vous indiquerez quelle condition doivent vérifier p et q pour que les calculs puissent être poursuivis.

8°) Résoudre l'équation $x^3 - x^2 - 2x - 12 = 0$ en appliquant successivement la transformation décrite à la question 3 puis la formule trouvée au 6°).

9°) La "*formule de Cardan*" permet-elle de résoudre les équations proposées à la question 2, 4°) ? La condition sur p et q mise en évidence au 6°) est-elle nécessaire à la résolution d'une équation du troisième degré ?

Ce devoir fut là aussi suivi d'un corrigé (à chaque devoir, son droit) que nous laissons le soin au lecteur d'imaginer, l'essentiel étant ici de montrer que deux lectures successives d'un même texte peuvent conduire à affiner un questionnaire, et à en lever les ambiguïtés, l'ordre et le découpage du questionnement tenant de surcroît à des préoccupations, à des progressions, à des classes et à des temps différents.

De la formule de Cardan à la trisection de l'angle

Je donne ici ce qui, dans la Géométrie, relève de la question de la trisection, y compris quelques pages qui précèdent le texte distribué aux élèves et qui ne leur ont pas été données. Le texte de Descartes consacré stricto sensu à la trisection était reproduit en fac-similé, et accompagné d'une note et d'une transcription assez fidèle (sections signalées d'un trait). Les quelques pages et figures supplémentaires de Descartes que je propose ici (sections signalées d'un trait double), permettront au lecteur qui le souhaite, de comprendre le lien que notre géomètre établit entre la question de la résolution des équations du troisième et du quatrième degré (c'est-à-dire des problèmes, qu'il appelle, avec les Anciens, les problèmes solides), et la question de la trisection de l'angle : j'ai explicité ce lien oralement en classe.

Disons dès maintenant que j'ai préféré garder l'orthographe originale, pour la Géométrie comme pour le texte d'Euler bien que la langue en soit plus ancienne et donc plus "surprenante" pour un béotien, et cela pour les mêmes raisons de fond : culture générale oblige. Cette affirmation péremptoire devrait se suffire à elle-même si elle n'avait pas justement un petit air de suffisance. J'ajouterai donc que, si l'on risque ainsi de renforcer la dysorthographie ambiante, l'on peut aussi faire la preuve par la négative d'une nécessaire stabilisation de la langue écrite ; la vérité en matière d'orthographe, c'est-à-dire les confins du dogmatisme et du pragmatisme, se situe sans doute entre théorie et pratique.

En revanche, certaines modifications typographiques du texte original avaient pour but de rendre la lecture du texte plus aisée sans le trahir, et ce sont d'ailleurs celles que j'adopte en général pour l'édition critique de textes mathématiques de cette époque, sauf pour les notations mathématiques proprement dites, que j'aurais conservées pour une édition "savante", en les assortissant de notes. Cela dit, dans ce cas particulier, il est une notation propre à Descartes que je n'ai pas modifiée parce qu'elle m'apparaît comme salutaire d'un point de vue didactique : Descartes use d'une astérisque pour indiquer "la présence d'un manque", c'est-à-dire pour remplacer les termes lacunaires dans un développement polynômial ordonné par rapport à l'une des variables. Comme j'avais eu l'occasion, en étudiant pour partie avec les élèves le troisième livre de la *Géométrie*, consacré en particulier à la factorisation des polynômes et à la résolution des équations, de montrer que les choix de Descartes en matière de disposition des calculs étaient particulièrement heureux, j'ai pensé trouver là un prolongement pertinent de la leçon cartésienne.

1re S4. Lycée Malherbe. Année 1988-1989.

Un Extrait de la *Géométrie* de René Descartes (1637).

Notes : comme vous pouvez le voir sur le fac-similé distribué avec ce texte, l'orthographe de l'imprimé original a été conservée dans l'ensemble ; c'est ainsi que 'a' peut-être rencontré pour 'à' ; que l'on écrivait 'reigle' pour 'règle', etc.

Dans les équations, je n'ai pas supprimé les astérisques '*' qui indiquent l'absence d'un terme dans une équation, ni la notation 'zz' pour z^2, comme dans l'équation du second degré : zz = * + 4, où le terme "en z" est de coefficient nul. Ces notations ne sont d'ailleurs pas systématiques.

En revanche, j'ai modifié d'autres signes graphiques ou orthographiques :

1°) le symbole d'égalité dont use Descartes n'est pas celui que nous utilisons de nos jours : c'est, dans l'extrait et l'édition choisis, la diphtongue 'œ' imprimée à l'envers ; je l'ai systématiquement remplacée par le signe '=', plus familier ;

2°) j'ai remplacé la notation de la racine cubique ($\sqrt{C.+4}$, par exemple) par la notation moderne ($\sqrt[3]{4}$) ;

3°) les points '.' qui signifient '±' dans certaines équations ou formules ont été de même remplacés ;

4°) les imprimeurs de cette époque échangent parfois, suivant un usage hérité du latin, les 'u' et les 'v', les 'i' et les 'j' ; j'ai préféré la graphie moderne ;

5°) même chose pour certains 's' qui sont imprimés sous la forme d'un symbole ressemblant au 'f', avec seulement une demi-barre horizontale placée à gauche (25) ;

6°) le ';' sert parfois d'abréviation, comme dans 'quelq;', pour 'quelque' ; je l'ai remplacé, de même que les lettres tildées qui tiennent lieu de l'une des lettres 'm' ou 'n' comme dans 'equatiõ, ou d'une double lettre comme dans 'inconũe' ;

7°) les intertitres de Descartes, ici en italiques, étaient en marge du texte original, en regard du paragraphe concerné.

(25) Au passage – cette note ne figurant pas dans l'énoncé original –, je signale que de grandes maisons d'éditions de livres scolaires – deux au moins, pour être précis – se sont données le ridicule de saisir en pseudo-fac-similé des textes français anciens, et, ce faisant, de soi-disant conserver les graphies d'origine pour faire plus authentique : c'est ainsi qu'on nous sert du Descartes ou du Euler "à l'ancienne" avec des "f" en lieu et place de certains "s", ce qui montre que l'on peut-être rédacteur de livre scolaire, éditeur ou relecteur, et pour finir imprimeur, sans avoir la

Quelques pages en prime pour les lecteurs de *Repères* :

[p. 389.]

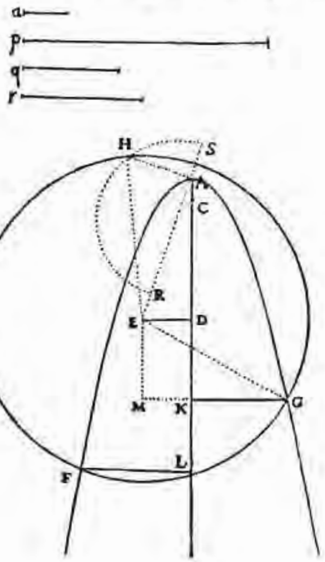
[...] *Façon generale pour construire tous les problesmes solides, réduits a une Equation de trois ou quatre dimensions.*

Or quand on est assuré, que le Problesme proposé est solide, soit que l'Equation par laquelle on le cherche monte au quarré de quarré, soit qu'elle ne monte que jusques au cube, on peut tousjours en trouver la racine par l'une des trois sections coniques, laquelle que ce soit ou mesme par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puisse estre ; en ne se servant au reste que de lignes droites, & de cercles. Mais je me contenteray icy de [p. 390] donner une reigle generale pour les trouver toutes par le moyen d'une Parabole, a cause qu'elle est en quelque façon la plus simple.

Premierement il faut oster le second terme de l'Equation proposée, s'il n'est desja nul, & ainsi la reduire à telle forme, $z^3 = * \pm apz \pm aaq$, si la quantité inconnuè n'a que trois dimensions ; ou bien à telle $z^4 = * \pm apzz \pm aaqz \pm a^3r$, si elle en a quatre ; ou bien en prenant a pour l'unité, à telle, $z^3 = * \pm pz \pm q$, & à telle $z^4 = * \pm pzz \pm qz \pm r$.

[p. 391]

Aprés cela supposant que la Parabole FAG est desja descrite, & que son aissieu [26] est ACDKL, & que son costé droit [27] est a, ou 1, dont AC est la moitié, & enfin que le point C est au dedans de cete Parabole, & que A en est le sommet ; Il faut faire $CD = \frac{1}{2}p$, & la prendre du mesme costé, qu'est le point A au regard du point C, s'il y a + p en l'Equation ; mais s'il y a −p il faut la prendre de l'autre coste.



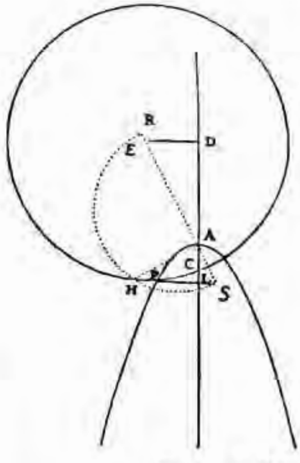
Figure, p. 390

moindre idée de ce que fut l'histoire de l'imprimerie, et manquer à ce point de discernement que l'on ne puisse voir la différence entre un "f" et un autre symbole, préférant, pour faire cultivé, y voir une confusion d'origine latine semblable à celle des "u-v" ou des "i-j" ; sans parler de l'étymologie, qui aurait dû leur éviter de prendre des "vetfies" pour une "sorme poffible" de... vessies. À moins qu'ils n'aient cru à une "consufion" de certaines "fissiantes" ?

(26) *I.-e.* son axe.

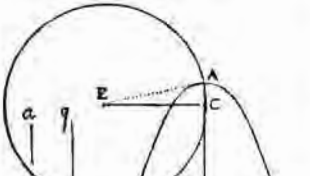
(27) Le côté droit, pour Descartes, et suivant la définition d'Apollonius de Perge, est une grandeur donnée, qui est en fait la distance du foyer à la directrice et que nous appelons aujourd'hui "paramètre". L'équation de la parabole de paramètre "a" est $y^2 = 2a.x$, et si A est le sommet de cette parabole, dans l'exemple de Descartes, C en est le foyer.

Et du point D, ou bien, si la quantité p estoit nulle, du point C il faut eslever une ligne a angles droits jusques a E, en sorte qu'elle soit esgale a $\frac{1}{2}$q. Et enfin du centre E il faut descrire le cercle FG, dont [p. 392] le demidiametre soit AE, si l'Equation n'est que cubique, en sorte que la quantité r soit nulle.

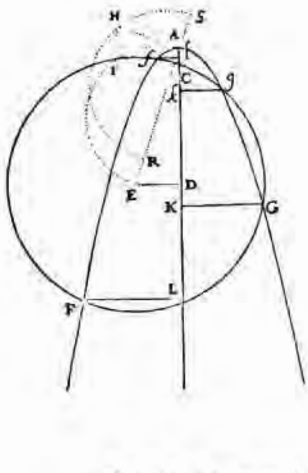


Figure, p. 391

Mais quand il y a + r il faut dans cete ligne AE prolongée, prendre d'un costé AR esgale à r, & de l'autre AS esgale au costé droit de la Parabole qui est 1, & ayant descrit un cercle dont le diametre soit RS, il faut faire AH perpendiculaire sur AE, laquelle AH rencontre ce cercle RHS au point H, qui est celuy par où l'autre cercle FHG doit passer. Et quand il y a − r il faut après avoir ainsi trouvé la ligne AH, inscrire AI, qui luy soit esgale, dans un autre cercle, dont AE soit le diametre, & lors c'est par le point I, [p. 393] que doit passer FIG le premier cercle cherché. Or ce cercle FG peut coupper, ou toucher la Parabole en 1, ou 2, ou 3, ou 4 poins, desquels tirant des perpendiculaires sur l'aissieu, on a toutes les racines de l'Equation tant vrayes, que fausses. A sçavoir si la quantité q est marquée du signe +, les vrayes racines seront celles de ces perpendiculaires, qui se trouveront du mesme costé de la parabole, que E le centre du cercle, comme FL ; & les autres, comme GK, seront fausses : Mais au contraire si cete quantité q est marquée du signe − les vrayes seront celles de l'autre costé ; & les fausses, ou moindres que rien seront du costé ou est E le centre du cercle. Et enfin si ce cercle ne couppe, ny ne touche la Parabole en aucun point, cela tesmoigne qu'il n'y a aucune racine ny vraye ny fausse en l'Equation, & qu'elles sont toutes imaginaires. En sorte que cete reigle est la plus generale, & la plus accomplie qu'il soit possible de souhaiter.

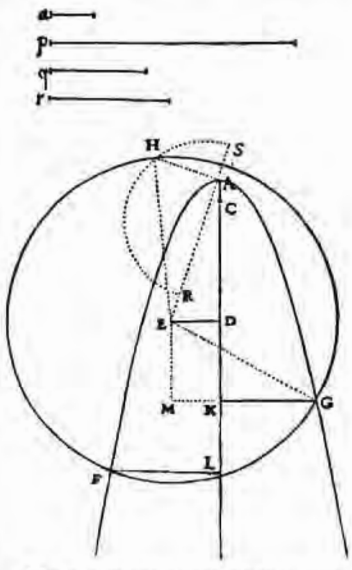


Première figure, p. 392

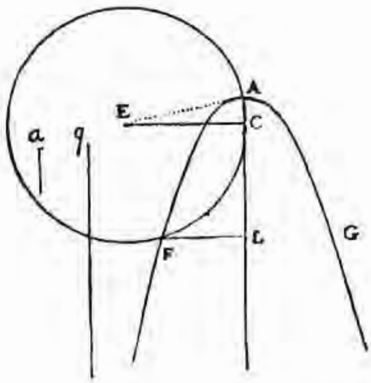


Seconde figure, p. 392

Et la demonstration en est fort aysée. Car si la ligne GK, trouvée par cete construction, se nomme z, AK sera zz, a cause de la Parabole, en laquelle GK doit estre moyene proportionelle, entre AK, & le costé droit qui est 1. puis si de AK j'oste AC, qui est $\frac{1}{2}$, & CD qui est $\frac{1}{2}$p, il reste DK, ou EM, qui est $zz - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, dont le quarré est $z^4 - pzz - zz + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$, & a cause que DE, ou KM est $\frac{1}{2}$q, la toute GM est $z + \frac{1}{2}q$, dont le quarré est $zz + qz + \frac{1}{4}qq$, & assemblant ces deux quarrés, on a $z^4 - pz[z] + qz + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$, [p. 394] pour le quarré de la ligne GE, a cause qu'elle est la baze du triangle rectangle EMG.



Figure, p. 394



Figure, p. 395

Mais a cause que cete mesme ligne GE est le demi-diametre du cercle FG, elle se peut encore expliquer en d'autres termes, a sçavoir ED estant $\frac{1}{2}$q, & AD estant $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, EA est $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}}$ a cause de l'angle droit ADE, puis HA estant moyene proportionelle entre AS qui est 1 & AR qui est r, elle est $\sqrt{r}$, & à cause de l'angle droit EAH, le quarré de HE, ou EG est $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$; sibienque il y a Equation [p. 395] entre cete somme & la precedente, ce qui est le mesme que $z^4 = * \, pzz - qz + r$, & par consequent la ligne trouvée GK qui a esté nommée z est la racine de cete Equation, ainsi qu'il falloit demonstrer. Et si vous appliqués ce mesme calcul a tous les autres cas de cete reigle, en changeant les signes + & – selon l'occasion, vous y trouverés vostre conte en mesme sorte, sans qu'il soit besoin que je m'y areste.

L'invention de deux moyenes proportionelles.

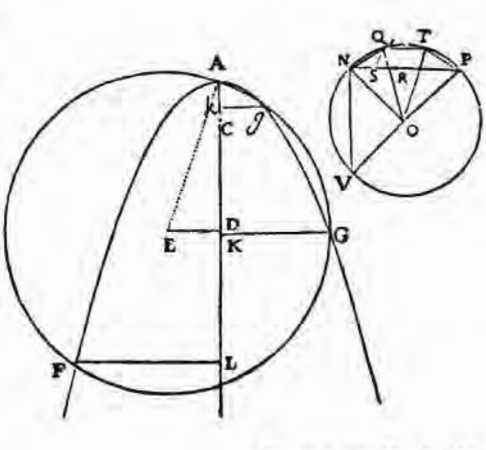
Si on veut donc suivant cete reigle trouver deux moyennes proportionelles entre les lignes a & q ; chascun sçait que posant z pour l'une, comme a est à z, ainsi z à $\frac{zz}{a}$, & $\frac{zz}{a}$ à $\frac{z^3}{aa}$; de façon qu'il y a Equation entre q & $\frac{z^3}{aa}$, c'est a dire, $z^3 = * * aaq$. Et la parabole FAG estant [p. 396] descrite, avec la partie de son aissieu AC qui est $\frac{1}{2}$ a la moitié du costé droit ; il faut du point C eslever la perpendiculaire CE esgale à $\frac{1}{2}$q, & du centre E, par A, descrivant le cercle AF, on trouve FL, & LA, pour les deux moyennes cherchées.

Et maintenant la suite du texte distribué aux élèves :

La façon de diviser un angle en trois.

Tout de mesme si on veut diviser l'angle NOP, ou bien l'arc, ou portion de cercle NQTP, en trois parties esgales ; faisant NO = 1, pour le rayon du cercle, & NP = q, pour la subtendue de l'arc donné, & NQ = z, pour la subtendue du tiers de cet arc ; l'Equation vient, $z^3 = * 3z - q$. Car ayant tiré les lignes NQ, OQ, OT ; & faisant QS parallele a TO, on voit que comme NO est a NQ, ainsi NQ a QR, & QR a RS ; en sorte [p. 397] que NO estant 1, & NQ estant z, QR est zz, & RS est z^3 : Et a cause qu'il s'en faut seulement RS, ou z^3, que la ligne NP, qui est q, ne soit triple de NQ, qui est z, ou à $q = 3z - z^3$ oubien, $z^3 = * 3z - q$.

Puis la Parabole FAG estant descrite, & CA la moitié de son costé droit principal estant $\frac{1}{2}$, si on prent CD = $\frac{3}{2}$, & la perpendiculaire DE = $\frac{1}{2}$q, & que du centre E, par A, on descrive le cercle FAgG, il couppe cete Parabole aux trois poins F, g, & G, sans conter le point A qui en est le sommet. Ce qui monstre qu'il y a trois racines en cete Equation, à sçavoir les deux GK, & gk, qui sont vrayes ; & la troisiesme qui est fausse, à sçavoir FL. Et de ces deux vrayes c'est gk la plus petite qu'il faut prendre pour la ligne NQ qui estoit cherchée.



Figure, pp. 396 & 399

Car l'autre GK, est esgale à NV, la subtendue de la troisiesme partie de l'arc NVP, qui avec l'autre arc NQP acheve le cercle. Et la fausse FL est esgale a ces deux ensemble QN & NV, ainsi qu'il est aysé a voir par le calcul.

Que tous les problesmes solides se peuvent reduire a ces deux constructions.

Il seroit superflus que je m'arestasse a donner icy d'autres exemples ; car tous les Problesmes qui ne sont que solides se peuvent reduire a tel point, qu'on n'a aucun besoin de cete reigle pour les construire, sinon entant qu'elle sert a trouver deux moyennes proportionelles, oubien a diviser un angle en trois parties esgales. Ainsi que vous connoistrés en considerant, que leurs difficultés peuvent tousjours estre comprises en des Equations, qui ne montent que jusque au quarré de quarré, ou au cube : Et que toutes celles qui montent au quarré de quarré, se reduisent au quarré, par le moyen de quelques autres, qui ne [p. 398] montent que jusques au cube : Et enfin qu'on peut oster le second terme de celles-cy. En sorte qu'il n'y a point [d'équation du troisième degré] qui ne se puisse réduire a quelqu'une de ces trois formes.

$$z^3 = * - pz + q.$$
$$z^3 = * + pz + q.$$
$$z^3 = * + pz - q.$$

Or si on a $z^3 = * - pz + q$, la reigle dont Cardan attribue l'invention a un nommé Scipio Ferreus, nous apprent que la racine est,

$$\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} .$$

Comme aussy lorsqu'on a $z^3 = + pz + q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme est plus grand que le cube du tiers de la quantité connuè du penultiesme, une pareille reigle nous apprent que la racine est,

$$\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} .$$

D'où il paroist qu'on peut construire tous les Problesmes, dont les difficultés se reduisent a l'une de ces deux formes, sans avoir besoin des sections coniques pour autre chose, que pour tirer les racines cubiques de quelques quantités données, c'est a dire, pour trouver deux moyennes proportionelles entre ces quantités & l'unité.

Puis si on a $z^3 = * + pz + q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme ne soit point plus grand que le cube du tiers de la quantité connuè du penultiesme, en supposant le cercle NQPV, dont le demidiametre NO soit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, c'est a dire la moyenne proportionelle entre le tiers de la quantité donnée p & l'unité ; supposant aussy la ligne NP inscrite dans ce cercle qui soit $\frac{3q}{p}$, [p. 399] c'est a dire qui soit à l'autre quantité donnée q comme l'unité est au tiers de p ; il ne faut que diviser chascun des deux arcs NQP & NVP en trois parties esgales, & on aura NQ, la subtendue du tiers de l'un, & NV la subtendue du tiers de l'autre, qui jointes ensemble composeront la racine cherchée.

Enfin si on a $z^3 = * \, pz - q$, en supposant derechef le cercle NQPV, dont le rayon NO soit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & l'inscrite NP soit $\frac{3p}{q}$, NQ la subtenduè du tiers de l'arc NQP sera l'une des racines cherchées, & NV la subtendue du tiers de l'autre arc sera l'autre. Au moins si le quarré de la moitié du dernier terme, n'est point plus grand, que le cube du tiers de la quantité connuè du penutiesme, car s'il estoit plus grand, la ligne NP ne pourroit estre inscrite dans le cercle, a cause quelle seroit plus longue que son diametre : Ce qui seroit cause que les deux vrayes ra- [p. 400] cines de cete Equation ne seroient qu'imaginaires, & qu'il ny en auroit de reelles que la fausse, qui suivant la reigle de Cardan seroit,

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}.$$

La façon d'exprimer la valeur de toutes les racines des Equations cubiques : & en suite de toutes celles qui ne montent que jusques au quarré de quarré.

Au reste il est a remarquer que cete façon d'exprimer la valeur des racines par le rapport qu'elles ont aux costés de certains cubes dont il n'y a'que le contenu qu'on connoisse, n'est en rien plus intelligible, ny plus simple, que de les exprimer par le rapport qu'elles ont aux subtenuès de certains arcs, ou portions de cercles, dont le triple est donné. En sorte que toutes celles des Equations cubiques qui ne peuvent estre exprimées par les reigles de Cardan, le peuvent estre autant ou plus clairement par la façon icy proposée.

Car si par exemple, on pense connoistre la racine de cete Equation, $z^3 = * - qz + p$, a cause qu'on sçait qu'elle est composée de deux lignes, dont l'une est le costé d'un cube, duquel le contenu est $\frac{1}{2}q$, adjousté au costé d'un quarré, duquel derechef le contenu est $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$; Et l'autre est le costé d'un autre cuble, dont le contenu est la difference, qui est entre $\frac{1}{2}q$, & le costé de ce quarré dont le contenu est $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, qui est tout ce qu'on en apprent par la reigle de Cardan.

Il ny a point de doute qu'on ne connoisse autant ou plus distinctement la racine de celle cy, $z^3 = * + qz - p$, en la considerant inscrite dans un cercle, dont le demidiametre est $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & sçachant qu'elle y est la subtenduè d'un arc dont le triple a pour sa subtendue $\frac{3q}{p}$. Mesme ces ter- [p. 401] mes sont beaucoup moins embarassés que les autres, & ils se trouveront beaucoup plus cours si on veut user de quelque chiffre particulier pour exprimer ces subtenduës, ainsi qu'on fait du chiffre $\sqrt[3]{}$ [Descartes écrit : $\sqrt{C.}$] pour exprimer le costé des cubes.

Et on peut aussy en suite de cecy exprimer les racines de toutes les Equations qui montent jusques au quarré de quarré, par les reigles cy dessus expliquées. En sorte que je ne sçache rien de plus a desirer en cete matiere. Car enfin la nature de ces racines ne permet pas qu'on les exprime en termes plus simples, ny qu'on les determine par aucune construction qui soit ensemble plus generale & plus facile. [...]

Et maintenant, l'énoncé du devoir.

Un classique de l'algèbre classique

L'énoncé qui suit, au demeurant très classique puisqu'il en existe des versions fort proches dans certains manuels de première, permettra à chacun de juger du degré modeste de hardiesse atteint dans cette affaire : à tel niveau de décalage historique, certains textes deviennent difficilement exploitables. Outre le fait que Descartes en prend à son aise avec les *neveux* auxquels il confie le soin d'éclairer ce qui n'est pas toujours aussi lumineux qu'il l'affirme ou de compléter ce qui peut l'être, il apparaît qu'une certaine culture géométrique manque ici à l'honnête homme pour comprendre les enjeux et la démarche. Je fis, bien sûr une explication de texte, qui devait compléter les quelques idées développées par les étudiants dans leurs réponses à la dernière question, qui étaient – au mieux et ce n'était déjà pas si mal –, de la paraphrase. Mais il me parut intéressant de montrer que cette fameuse "géométrie analytique" dont Descartes serait l'inventeur, relève plus de la géométrisation des problèmes, que de la représentation algébrique des courbes : il ne s'agit pas tant ici de savoir "étudier et représenter une fonction", que d'analyser un problème, de le traduire, puis de reconnaître une courbe sous un certain type d'équation à deux variables, ou de construire une grandeur définie par une certaine équation à une variable et à plusieurs paramètres. Le renversement de la problématique vaut d'être signalé, même si l'on pense, à tort ou à raison, que la pratique de l'algèbre est nécessaire comme peuvent l'être les gammes au musicien.

De ce point de vue, je conseillerai vivement la lecture conjointe de ce passage et des premières pages de la *Géométrie*, où il traduit en termes analytiques les opérations sur les grandeurs, car ces textes manifestent clairement que l'on fait un mauvais procès à son auteur, ou qu'on lui tresse en vain des couronnes, c'est selon, lorsqu'on lui fait dire restrictivement que l'algèbre repose l'esprit par son caractère mécanique. J'opterai assez volontiers, pour ma part, pour un enseignement dialectique de l'algèbre et de la géométrie, d'autant qu'il semble que l'enseignement de la géométrie analytique soit passé à la trappe de façon subreptice dans le sillage de celui de la géométrie des figures. Je me souviens par exemple, commentant devant cette classe les premiers paragraphes de la *Géométrie*, avoir longuement expliqué les raisons pour lesquelles certaine moyenne et certaine progression sont dites géométriques : leurs propres souvenirs de la géométrie du triangle avaient tout à y gagner.

1^{re} S4. Lycée Malherbe. Année 1988-1989.

Texte du devoir d'algèbre du 18-12-88.

A) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos 3y = \cos t$, où y est l'inconnue et t un réel donné.

B) Exprimer $\cos 3y$ en fonction de $Y = \cos y$.

C) En déduire les solutions de l'équation (E_0) : $Y^3 - \frac{3}{4}Y - \frac{\cos t}{4} = 0$, où Y est l'inconnue et t un réel donné.

D) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) : $X^3 - \frac{3}{4}u^2X - \frac{u^3 \cos t}{4} = 0$, où t et u sont deux réels donnés, u non nul, et X est l'inconnue. (Se ramener à E_0).

E) Soit maintenant l'équation générale du troisième degré (E_3) :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Montrer qu'il existe un réel x_0, que l'on déterminera, tel que le changement d'inconnue $x = x_0 + X$ conduise à l'équation (E_2) $X^3 + pX + q = 0$. Préciser p et q en fonction de a, b, c et d.

F) Montrer qu'à la condition que $4p^3 + 27q^2 \leq 0$, on peut transformer (E_2) sous la forme (E_1). Déduire de la résolution de (E_1), celle de (E_2), puis de (E_3).

G) Application : résoudre par cette méthode l'équation :

$$\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0.$$

H) Donner, à partir de ce problème et du texte de Descartes qui vous a été distribué, une interprétation géométrique de cette résolution de l'équation du troisième degré.

La dernière question, qui suggérait en réponse une paraphrase du passage de Descartes consacré à la trisection, ne fut traitée, on s'en doute, que par quelques élèves ; encore ceux-ci sont-ils venus me relancer à plusieurs reprises aux inter-cours pour comprendre ce qui leur était demandé, tant est inhabituelle pour eux la pratique du commentaire de texte dès lors qu'elle est exigée hors des sentiers battus. Mais pour ces quelques-uns, la leçon a porté, je crois, qui leur a fait toucher du doigt, ou plutôt de l'esprit, 1°) que l'on écrivait aussi des mathématiques du temps de Molière, et que la géométrie, c'est-à-dire la mesure du Monde et de ses figures, autant que le calcul, était à la base des préoccupations d'un penseur par ailleurs philosophe, et 2°) qu'une équation n'est après tout qu'une représentation d'un problème.

Épilogue

Faut-il épiloguer ? Ces textes ne parlent plus d'eux-mêmes, mais peut-être est-ce faute de les laisser parler. Nul doute que je les préfère à tout autre donneur de leçons, et que cette fâcheuse passion peut conduire à la péroraison. Aussi me tairai-je après avoir entrouvert la boîte de Pandore, en espérant que la curiosité est un malin plaisir plus qu'un vilain défaut.

POUR NE PAS PERDRE LE FIL
Sources

DESCARTES, R. : *La Geometrie*. Plusieurs rééditions accessibles :
in Œuvres de Descartes, publiées par Ch. Adam et P. Tannery, tome VI, *Discours de la Méthode et Essais*, nouvelle Éd. du CNRS, Lib. Vrin, Paris, 1982.
in The Geometry of René Descartes, fac-similé de l'Éd. de 1637, trad. anglaise de D. E. Smith et M. L. Latham, Dover Publications, New-York, 1954.
in Discours de la Méthode, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, Éd. du *Corpus des Œuvres de Philosophie de Langue française*, Éd. Fayard, Paris, 1986.

EULER, L. : *Élémens d'Algebre*. Pas de réédition récente en français. On en trouvera de larges extraits dans *Lectures*, recueils thématiques de textes mathématiques, avec introduction, commentaires et exercices, à paraître à l'IREM de B.-N. édition utilisée ici :
Élémens d'Algebre par Léonard Euler, traduits de l'allemand (par Bernoulli), *avec des notes et des additions* (de Lagrange), 2e édition française en deux volumes, 1°) *De l'Analyse déterminée & 2°) De l'Analyse indéterminée, A Lyon, Chez Bruyset ainé & Cie, L'an IIIe de l'Ère Républicaine* (1795), dont la première édition parut en 1784, sous les auspices de d'Alembert.

Bibliographie secondaire facilement accessible

AYMES, J. : *Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle)*, Publication de l'APMEP n°70, Paris, 1990.

CHABERT, J.-L., BARBIN, É., GUILLEMOT, M., MICHEL-PAJUS, A., BOROWCZYK, J., DJEBBAR, A. et MARTZLOFF, J.-C. : *Histoire d'Algorithmes. Du caillou à la puce*, éditions Belin, Collection "*Regards sur la science*", Paris, 1994.

COSTABEL, P. : *Notes fugitives sur l'équation du troisième degré dans la mathématique occidentale du XVIe au XVIIIe siècle*, in *Revue d'Histoire des Sciences*, 1985, tome XXXVIII-2.

COUSQUER, É. : *Histoire du Concept de Nombre*, IREM de Lille, mai 1992.

DAHAN-DALMEDICO, A. et PEIFFER, J. : *Une histoire des mathématiques Routes et Dédales*, Éd. du Seuil, coll. *Points-Sciences* n°S49, Paris, 1986.

IREM, Groupe Épistémologie et Histoire : *Mathématiques au fil des âges, Textes choisis et commentés par* J. Dhombres, A. Dahan-Dalmedico, R. Bkouche, C. Houzel, M. Guillemot *et alii*, Éd. Gauthier-Villars, Paris, 1987.

IREM (Commission inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques) : *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Éditions Ellipses, Paris, 1993. En particulier les chapitres IV, XII et XIII.

IREM de Toulouse (Groupe d'Histoire des Mathématiques, J. Cassinet, M. Spiesser *et alii*) : *Équations du premier degré, du second degré, du troisième degré & du quatrième degré*, quatre fascicules, IREM de Toulouse, (resp.) 1982, 1979, 1980 & 1982.

ITARD, J. : *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*, Brochure de l'APMEP, Bibliothèque d'information sur l'enseignement mathématique, n°2, Paris, 1969.