QUELQUES IDEES D'ACTIVITES GLANEES AU CONTACT DES ENTREPRISES

Gérard KUNTZ
Irem de Strasbourg

Il est de bon ton, par les temps qui courent, de parler de PROFESSIONNALISATION de l'enseignement. Qu'on se rassure : éduquer et former constituent des tâches trop complexes pour n'en retenir que la composante immédiatement utilitaire. Mais la fréquentation des responsables d'entreprises dans le cadre d'un lycée technique, m'a rendu attentif à d'évidentes lacunes dans la conception, les méthodes et l'évaluation de l'enseignement français. Cet article les recense et esquisse, à travers quelques expériences récentes, un rééquilibrage tenant compte du nouvel environnement social et de l'évolution des élèves.

APPRENDRE A LIRE

Dans les entreprises de pointe, les techniciens et les ingénieurs passent un temps non négligeable à étudier les publications de leur domaine et des disciplines voisines. Ils en tirent des renseignements sur les évolutions, les tendances et les orientations de leurs propres activités : démarche vitale, car la routine s'avère mortelle dans les secteurs en rapide mutation. Extraire l'information scientifique et technique d'une revue, d'un livre, devient aujourd'hui une nécessité.

Où apprend-on cette démarche ? Nulle part dans l'enseignement secondaire. Les collègues universitaires que je fréquente à l'IREM, se désolent à juste titre de cette carence qui rend l'étudiant dépendant des seules informations dispensées par l'enseignant.

Dans toutes mes classes, je fais étudier certains chapitres par les élèves : ces notions ne feront l'objet d'aucun apport magistral en classe. La tâche des élèves consiste à prendre connaissance des notions dans le livre, à en extraire les définitions et les théorèmes et, à partir de là, à composer leur cours. Ce travail personnel, complété par une concertation en groupe s'accompagne d'une série d'exercices destinés à valider l'apprentissage. La correction des exercices en classe permet de s'assurer de la compréhension des notions et des méthodes : certaines feront l'objet d'explications et d'exercices complémentaires.

L'expérience, menée de la seconde à la terminale permet d'affirmer qu'après d'inévitables tâtonnements, les élèves tirent de cette pratique au moins autant de bénéfice que d'un exposé. Il découvrent l'apprentissage autonome. Il faut évidemment adapter à leurs capacités du moment, les chapitres proposés à leur sagacité : chapitres de révisions, notions prolongeant des connaissances des années antérieures, et, avec des classes éveillées et ouvertes des contenus présentant de réelles nouveautés.

Dans les disciplines technologiques, cette méthode est couramment utilisée : dès la seconde, les élèves étudient des dossiers où se mêlent l'apport théorique, l'information concernant le système étudié et les problèmes à résoudre. Il n'est pas rare qu'un sujet de BTS comporte ainsi plusieurs dizaines de pages... C'est ce type de travail qui attend les techniciens dans l'entreprise, quelques semaines plus tard.

TRAVAILLER EN EQUIPE.

J'entends d'ici les protestations encore une mode stérile, voire nuisible Les faibles, les ringards et les flemmards vont prendre la roue des meilleurs et se donner l'illusion du savoir. La solitude de l'élève devant la feuille blanche, il n'y a que cela de vrai !

Tournons-nous une fois encore vers l'entreprise, celle qui progresse et se développe. L'information y circule, l'expérience y est mise en commun. Les problèmes rencontrés par l'un sont examinés en équipe Tel projet en difficulté est remis sur les rails après concertation avec d'autres équipes. Parfois il faut remonter jusqu'au centre de recherche de l'entreprise pour maîtriser un sujet délicat et progresser.

Pourquoi les innombrables colloques scientifiques, sinon pour féconder par la concertation et la confrontation, la recherche individuelle ? Sait-on que le rayonnement fossile de l'univers fut découvert en 1965 par deux chercheurs en télécommunications, Penzias et Wilson, qui n'arrivaient pas à se débarrasser des parasites sur leurs lignes ? Une rencontre avec un astrophysicien revenant d'un colloque sur "l'univers standard" les mit sur la piste d'une solution fort éloignée de leurs recherches du moment... et leur valut le prix Nobel de physique ! (1 L'hôpital même, structure hiérarchisée s'il en est, traite les dossiers des malades au cours de réunions régulières où les cas difficiles sont évoqués, et bénéficient de toutes les compétences.

Il me paraît indispensable de compléter l'activité mathématique traditionnelle par le travail en groupe. Cette idée rencontre de fortes réticences parmi les élèves et les parents, obnubilés par l'examen individuel en temps limité. Ne parlons pas des concours dont nous sommes si friands. Il n'est pas simple de convaincre les intéressés qu'on va plus loin, plus vite en mettant les compétences en commun, et qu'on prépare mieux une épreuve individuelle de cette manière qu'en "séchant" tout seul de longues heures sur un problème. Le travail en groupe se nourrit évidemment de la réflexion individuelle qui le précéde et en assure l'efficacité, et appelle l'indispensable synthèse personnelle des activités communes.

Les IREM ont d'ailleurs reconnu la validité de cette démarche : le rallye mathématique encourage les binômes. Cette année, à Strasbourg, un des premiers prix de terminale revint à une curieuse équipe : un élève fourmillait d'idées mais les exprimait avec beaucoup de confusion (5/20 au bac blanc), l'autre, sans génie, savait mettre en forme ce qu'il avait compris (9/20 au même test). L'équipage de l'aveugle et du boiteux conduisit les deux compères très au-delà de leurs capacités individuelles ! 1+1 font souvent bien plus que 2. La thèse d'Isabelle Tenaud "Activités en groupes en terminale C", illustre l'efficacité du travail collectif, en complément de l'activité traditionnelle.

Chaque trimestre, un des contrôles effectués dans mes classes est réalisé par binômes d'élèves de force comparable ou de capacités complémentaires. Les résultats sont bien meilleurs que ceux des travaux individuels : le stress est ramené à de plus justes proportions, les erreurs de calculs si lourdes de conséquences sont éliminées, les idées de l'un enrichissent celles de l'autre. N'est-ce pas ainsi qu'on travaille dans l'entreprise ?

Une des épreuves majeures de l'examen du BTS consiste en un projet, un thème industriel, étudié en groupe de deux à quatre étudiants tout au long de l'année. La note est commune. Personne ne discute la validité d'une telle évaluation, ni les étudiants, ni les enseignants, ni surtout les responsables d'entreprise qui soulignent le caractère particulièrement formateur d'une telle démarche. Ne pourrait-on pas s'en inspirer pour introduire en mathématique une dose réaliste de travail en groupe, sur des problèmes d'une réelle ampleur et en leur accordant la durée ?

TRAVAILLER SUR DES PROBLEMES CONSISTANTS ET DANS LA DUREE.

L'industrie, par définition et par nécessité, pose tous les jours des problèmes différents qui font appel à des savoirs multiples. Ingénieurs et techniciens ont à rendre rapidement opérationnelles des connaissances de leur spécialité, mais aussi à aborder des domaines dont ils ignorent tout. Voici une entreprise pharmaceutique qui décide de fabriquer de l'insuline humaine par génie génétique. Seize de ses salariés, avec une formation initiale allant du CAP au BTS, sont invités à suivre une formation intensive en chimie et microbiologie, à s'initier à l'instrumentation et aux automates programmables, et à apprendre l'anglais en vue de stages aux Etats-Unis.

Les formations initiales des personnels sont la plupart du temps partielles. Il s'agit de mobiliser des outils intellectuels (les mathématiques, les langages...) pour s'initier rapidement aux notions essentielles des domaines inconnus et surtout d'ASSOCIER DES DEMARCHES, d'imaginer à partir de leur diversité un ordre de résolution des problèmes.

Où apprend-on à travailler ainsi ? Nulle part, sinon dans les sections de techniciens supérieurs. Nous déplorons tous le manque de souplesse d'esprit de beaucoup de nos élèves lorsqu'il s'agit simplement, au cours d'un problème, de passer, par exemple, d'un outil géométrique à une démarche analytique. Sont-ils seuls responsable de cette carence ? L'automobiliste auquel on apprendrait à conduire sur un circuit serait très mal à l'aise dans la circulation urbaine.

J'ai tenté, il y a quelques années, une expérience allant dans ce sens, dans une classe de seconde d'une honnête moyenne en lycée technique.

Avec des collègues de l'IREM, nous avions mis au point une série d'exercices autour de la notion de MILIEU D'UN SEGMENT. Il s'agissait pour les élèves, de mettre en œuvre toutes les méthodes à leur disposition à ce niveau pour exprimer cette propriété. Aucun exercice ne présentait de grande difficulté en soi : en revanche les changements de registres et de cadres, et l'ampleur du dossier en faisaient une tâche réellement ardue.

Le dossier a été proposé aux élèves VOLONTAIRES de la classe. Le travail s'est déroulé en dehors des horaires scolaires, par équipes, sur une durée de deux mois. Quatre séances en commun d'une heure, espacées de quinze jours ont été proposées aux participants. Au cours de la première, toutes les manières de traduire la notion étudiée ont été mises en évidence et résumées dans un tableau. Les trois autres séances proposaient une aide aux équipes en difficulté. La fréquentation aux quatre séances est éloquente : 29, 14, 3, 0. Au fur et à mesure que la maîtrise du projet progresse l'enseignant découvre sa délicieuse inutilité ! Des 29 élèves du départ, 20 ont achevé le travail : 6 dossiers ont été remis, caractérisés, selon des enseignants qui les ont étudiés , par leur bonne qualité et par une excellente rédaction (certains avaient utilisé un traitement de textes, ce qui rend la forme plus agréable). Le dossier d'exercices, et de larges extraits du travail remis par un groupe d'élèves sont proposés en annexe de cet article : chacun pourra juger sur pièces.

Même des élèves habituellement faibles ont abouti : ceux qui étaient lents, qui "stressaient" devant la feuille blanche avaient trouvé à exprimer des qualités recherchées dans le monde du travail. Pourquoi privilégier toujours la connaissance théorique en chapitres cloisonnés, la rapidité, le travail individuel, au détriment d'autres qualités, tout aussi indispensables dans la vie professionnelle et sociale, capacité d'associer, de mettre en œuvre par tâtonnements des compétences complémentaires, dans un travail collectif ?

Ce genre d'activités développe une attitude peu valorisée dans l'enseignement secondaire : un problème d'une certaine ampleur, qui présente de réelles difficultés fait passer le groupe de recherche par des phases d'hésitation, de perplexité, de doute. Il découvre la capacité humaine à raisonner faux, ou de façon approximative, mais l'erreur est inséparable de la recherche, elle peut être féconde. Le directeur de l'école Polytechnique disait au cours d'une émission de France Culture qu'un tiers de l'enseignement dispensé en ce haut lieu consistait à inculquer le DOUTE à des esprits formés à la certitude ! On comprend le profond malaise de nombreux enseignants lors de stages de formation : le professeur SAIT. Eux sont si peu habitués à ne pas savoir qu'ils préfèrent se taire plutôt que de se voir pris en défaut... On est loin des débats houleux entre Jacques Monod et François Jacob, passant des heures à l'Institut Pasteur à critiquer mutuellement leurs théories en voie d'élaboration pour en tester la solidité(2). C'est, toutes proportions gardées, l'état d'esprit qu'apportent les groupes de recherche de l'IREM qui travaillent il est vrai sur plusieurs années, avec un noyau de participants stable. Dans un tel climat, la formation continue des enseignants est assurée bien plus sûrement que par les stages courts qui reproduisent de façon caricaturale le schéma et l'ambiance d'une classe.

Lors du congrès de MATH EN JEANS à Strasbourg, j'ai interrogé plusieurs élèves sur les raisons de leur participation. Je m'attendais à trouver une majorité de "forts en thèmes", désireux d'améliorer leurs performances. J'en ai vu en effet, mais j'ai surtout rencontré des élèves peu à l'aise dans la structure scolaire, qui apprécient de faire des mathématiques dans un autre contexte, dans une autre ambiance. J'ai cru comprendre que pour eux, dans un tel climat, les mots "mathématiques" et "plaisir" pouvaient être associés, ce qui, on en conviendra, n'est pas courant dans les classes.

LES LECONS DE L'OPTION INFORMATIQUE.

J'ai la chance depuis plusieurs années de compléter mon enseignement des mathématiques par l'option informatique. J'y ai beaucoup appris sur les deux disciplines.

L'option informatique comporte un programme bien délimité et d'ampleur raisonnable : les notions qui y sont enseignées sont traitées de septembre à février-mars. On n'a donc pas en permanence le regard sur la montre. Des questions d'élèves peuvent être développées sans risque de ne pas achever le programme. Mais surtout, les quatre derniers mois de l'année sont consacrés à un thème, où les propositions précédentes sont mises en œuvre (réalisation collective après une recherche qui prend le temps nécessaire et sur un sujet d'une certaine ampleur) : certains élèves analysent un problème et proposent sa solution dans un programme informatique ; d'autres étudient un logiciel professionnel et en tirent des applications, d'autres encore appliquent les différents logiciels de mathématiques disponibles à leur cours de l'année. On voit se constituer des équipes ambitieuses, qu'il faut souvent freiner tant leur projet prend des allures démesurées... Ils se partagent le travail, se concertent, rectifient les erreurs (nombreuses et variées), interrogent l'enseignant qui les renvoie à la documentation, leur suggère une idée ou les met sur une piste. Ces séances de trois heures sont les seules que je connaisse où une majorité d'élèves renonce à la récréation, tant leur projet les passionne ! Quant aux résultats, ils sont souvent stupéfiants de qualité et d'ingéniosité : c'est la seule discipline où des élèves compliquent à loisir le problème à résoudre pour être plus près de la réalité.

Je me suis parfois surpris à rêver d'avoir les mêmes conditions de travail en mathématiques : un temps où seules les notions vraiment essentielles seraient enseignées à tous et approfondies. Puis deux à trois mois pour l'étude d'un problème ambitieux, qui mettrait en jeu ces savoirs, mais aussi de nombreux autres, que les élèves pourraient découvrir, au fil des besoins, dans les ouvrages du CDI.

Un tel enseignement serait-il au rabais ? Il convient de se rappeler qu'actuellement près de 50% des étudiants de première année sont invités à une remise à niveau pour insuffisance de capacité.

CONCLUSION

Je m'arrête là, car à poursuivre, je risque d'agacer. Il y a en effet tous ceux qui savent, et n'entendent pas changer les méthodes qui ont fait leurs preuves. Ceux-là, je n'ai aucune chance de les convaincre. Mais il y a tous ceux qui s'interrogent et qui, sans faire du passé table rase, sentent qu'il faut modifier les comportements, modestement mais avec détermination. J'ai essayé de dire ce que j'ai appris au contact des entreprises : après tout, c'est là que nos élèves exerceront majoritairement leurs talents. Alors pourquoi ne pas prendre en compte ce qui réussit dans cet univers ? Nos collègues de technologie ont adopté des méthodes d'enseignement et d'évaluation dont nous pourrions nous inspirer avec profit. Des expériences existent aussi en mathématiques : il faut les faire connaître. Elles enrichiront l'ensemble des lecteurs de "Repères" et ouvriront un débat que les réformes annoncées rendent indispensable.

(1) Steven Weinberg. *Les 3 premières minutes de l'univers* (Seuil)

(2) François Jacob. *La statue intérieure.* (Odile Jacob)

(3) Isabelle Tenaud. *Activités en groupe en terminale C.*

(4) A ma connaissance, il n'existe aucun ouvrage concernant le thème industriel en BTS. Cette absence me semble éloquente : la démarche reste empirique et ne bénéficie pas de la réflexion qui permettrait son "exportation" vers l'enseignement général.

ANNEXE 1

DOSSIER D'EXERCICES : Le milieu d'un segment

Bref historique :

Dans le cadre d'un groupe de l'IREM de Strasbourg, nous travaillons depuis plusieurs années sur les didacticiels "intelligents" de mathématiques. Nous cherchons à comprendre comment raisonne un expert ou un élève. Les hypothèses envisagées sont testées dans des classes. Il y a quelques années, nous avons exploré la capacité (caractéristique de l'expert), de regarder un objet mathématique sous ses divers aspects, de trouver des solutions différentes à un problème, en utilisant une palette d'instruments. Un préjugé tenace estime que l'élève moyen ne possède pas une souplesse d'esprit suffisante. Nous avons mis au point le dossier qui suit, pour tester dans une classe de seconde, les capacités REELLES des élèves. Le contexte était inhabituel cependant (temps non limité, travail en groupe). Une partie des exercices a été proposée aussi à une classe de troisième. Le dossier a été soumis en travaux dirigés à une autre classe de seconde. Les résultats sont dans l'ensemble un démenti au pessimisme de beaucoup.

Ce genre de travail suppose une expérimentation dans des conditions différentes, de multiples échanges et une réflexion commune prolongée : à cet égard, les groupes de recherche des IREM jouent un rôle irremplaçable.

On notera qu'il se situe dans le cadre plus vaste d'une recherche à la croisée des mathématiques et de l'informatique. Même si l'informatique n'a pas, pour l'instant, tenu les promesses optimistes et un peu mythiques faites à l'enseignement des mathématiques, elle a obligé les concepteurs de didacticiels à se poser des questions fondamentales que les pédagogues laissaient dans une ombre confortable, faite de flair, d'intuition et de dons naturels. L'apparition des rubriques "Méthodes", qui fleurissent dans les manuels d'élèves, sont une retombée directe de la recherche sur les heuristiques, indispensables pour échapper à l'explosion combinatoire en informatique.

A. Le partage en deux.

1 $\mathcal{C}$ est un cercle de centre I . V est un point de $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}'$ est un cercle de diamètre [IV] . Une droite passant par V coupe $\mathcal{C}'$ en A et $\mathcal{C}$ en R .

Montrez que A est le milieu de [VR] .

1bis) Les données sont les mêmes qu'en 1) .
h est l'homothétie de centre V et de rapport 2 .

a) Prouvez que $h(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$.

b) Soit A un point de $\mathcal{C}'$ et l'intersection de la droite (AV) avec $\mathcal{C}$.
Prouvez que $h(A) = R$. Qu'en concluez-vous ?

2 Soit ABCD un rectangle tel que AB = 2 AD .
On considère le point E , symétrique de A par rapport à D , et le point F , symétrique de A par rapport à B .

Montrez que C est le milieu de [EF] .

2 bis) Les données sont les mêmes qu'en 2) .

a) Prouvez que C est le barycentre de { (A,1) , (B,-1) , (D,-1) }
et aussi celui de { (A,1) , (D,-2) , (A,1) , (B,-2) } .

b) Prouvez que E est le barycentre de { (A,1) , (D,-2) }
et F celui de { (A,1) , (B,-2) } .

Qu'en concluez-vous ?

2 ter) Les données sont les mêmes qu'en 2) .
Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2 .

a) Quelles sont les images de B et D par h ?

b) Soit C' l'image de C par h .
Quelle est la nature du quadrilatère AFC'E ?

c) Prouvez que C est le centre du quadrilatère AFC'E .

Concluez.

3 Quatre points non alignés A , B , E , F sont tels que :

$$AB = 2\,EF$$

et

$$(AB) \;//\; (EF) .$$

Les droites (AE) et (BF) se coupent en C .

Démontrez que E est le milieu de [CA] et F celui de [CB] .

B. Et si l'on partageait en plus de deux ?

4 ABCD est un parallélogramme. Sur [AB] on place les points I et J tels que :

$$AI = IJ = JB .$$

Montrez que la droite (DI) coupe [AC] en un point P tel que : $AP = \frac{1}{4} AC$.

4 bis) Les hypothèses sont les mêmes qu'en 4) .

a) Déterminez le barycentre de $\{ (A,1) , (B,-1) , (C,1) \}$.

b) Déterminez un couple de cœfficients réels (a,b) tels que I soit le barycentre de $\{ (A,a) , (B,b) \}$.

c) Soit P le barycentre de $\{ (D,1) , (I,3) \}$. Montrez que P appartient à la droite (AC) . Exprimez AP en fonction de AC .

5 Marquez sur une droite les points A , I , J tels que $AJ = 3\,AI$. Marquez sur une autre droite passant par J des points B et K tels que B soit le milieu de [JK] .

Montrez que la droite (KI) coupe le segment [AB] en son milieu.

5 bis) Les hypothèses sont les mêmes qu'en 5) . Soit L le milieu de [IJ] .

1°) Soit h_1 l'homothétie de centre J qui transforme B en K .

a) Quel est le rapport de cette homothétie ?

b) Quelle est l'image de la droite (BL) par h_1 ?

c) Exprimez LB en fonction de IK .

2°) Soit h_2 l'homothétie de centre A et de rapport 1/2 . On appelle P l'image de B par h_2 . Calculez IP en fonction de LB , puis de IK .

3°) En déduire que la droite (KI) coupe le segment [AB] en son milieu.

5 ter) Les hypothèses sont celles de 5) .

1°) Démontrez que I est le barycentre de $\{ (A,2) , (J,1) \}$.

2°) Calculez a pour que K soit le barycentre de $\{ (B,2) , (J,a) \}$.

3°) On appelle P le barycentre de $\{ (I,3) , (K,1) \}$.

Démontrez que P est l'isobarycentre de A et B .

6 ABCD est un parallélogramme. K est le milieu du segment [BC], L celui de [AD]. Sur [AB], on place I et J tel que AI = IJ = JB.
Montrer que la droite (LI) coupe la droite (AC) en un point P tel que :

$$AP = \frac{1}{5}\ AC.$$

6 bis) 1°) Montrez que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si l'isobarycentre de A et C est le même que celui de B et D.

2°) ABCD est un parallélogramme. Soit Q le barycentre de { (A,4), (C,1) }. Montrez que Q est aussi le barycentre de { (A,3), (B,1), (D,1) }.

3°) Soit M le milieu de [AL]. Montrez que M, Q, B sont alignés.

4°) I et J sont deux points de [AB] tels que AI = IJ = JB.

a) Prouvez que I est le barycentre de { (A,2), (B,1) }.

b) Déduisez-en que Q est le barycentre de { (I,3), (L,2) }.

5°) a) Prouvez que Q est le point commun à (AC) et (IL).

b) Prouvez que $AQ = \frac{1}{5} AC$.

c) Déterminez $\frac{LQ}{LI}$.

7 ABCD est un parallélogramme et D' est le symétrique de D par rapport à A.
E et F sont définis par $AE = \frac{1}{3} AB$ et $CF = \frac{1}{3} CD$.
Démontrez que E est le milieu de [D'F].

7 bis) Mêmes données qu'en 7). h est l'homothétie de centre D' transformant A en D.

a) Quel en est le rapport ?

b) Quelle est l'image de la droite (AB) ?

c) Quelle est l'image de E ? Qu'en concluez-vous ?

7 ter) Mêmes données qu'en 7). Justifiez les affirmations suivantes :
F est le barycentre de { (C,2), (D,1) } et D' celui de { (A,2), (D,-1) }.
Soit X le barycentre de { (F,3), (D',3) }. Montrez que X est barycentre de { (A,1), (C,1), (D,-1), (A,2) }.
Quel est le barycentre de { (A,1), (C,1), (D,-1) }. Qu'en concluez-vous ?

Consignes aux élèves.

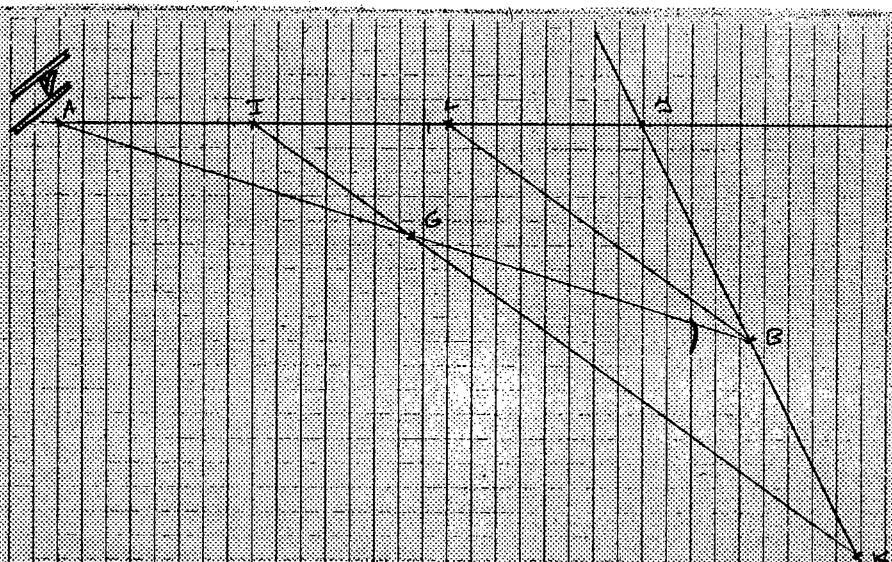
L'ensemble de ce travail a été placé sous le signe de la liberté et de l'initiative : la gestion du temps, l'organisation interne des groupes, la présentation du dossier ont été laissées à l'appréciation des élèves. L'exigence de qualité a été fortement soulignée : la correction du raisonnement et la clarté de la rédaction ont été particulièrement appréciées. Les solutions multiples des exercices pour lesquels aucune méthode n'était suggérée, ont été sollicitées. Une phrase pourrait résumer ces consignes : "Tendez vers l'excellence" ! Cet impératif a été largement entendu.

Brève analyse des dossiers.

Les dossiers remis par les élèves présentaient quelques lacunes : un nombre trop limité de solutions, certaines parties non traitées, des erreurs de raisonnement ici et là, une rédaction parfois floue ou incertaine. Certains travaux sentaient l'utilitaire : améliorer une moyenne n'est certes pas négligeable, mais ce n'était pas l'esprit du projet ! (A ce sujet, les titres proposés par les élèves sont révélateurs : exercices notés du troisième trimestre, synthèse de mathématiques, devoir sur les milieux, dossier de mathématiques ou simplement mathématiques, les mots sont lourds de sens !)

Le dossier dont nous publions la seconde partie, présente de nombreuses qualités : travail complet, raisonnement solide, rédaction claire, solutions diverses, qui utilisent l'ensemble des outils dont dispose un élève de seconde. Une relecture attentive et critique aurait éliminé les imperfections qui subsistent. L'usage d'un traitement de textes aurait facilité les corrections. L'ensemble du travail étant d'une ampleur trop importante dans le cadre de la revue "Repères" (22 pages), nous avons choisi de n'en présenter que les dernières parties : le reste du dossier peut être obtenu à l'Irem de Strasbourg. Tel qu'il est, il nous paraît une œuvre collective de bonne tenue, le résultat d'une expérience préparée avec soin, et menée à terme avec sérieux et un évident plaisir.

ANNEXE 2



1ère méthode : utilisation du théorème de la droite des milieux

Soit L le milieu de [I, Y]

* Dans le triangle IYK

- L milieu de [IY]
- B milieu de [YK]

$\Big\} \xRightarrow{th}$ $\boxed{\text{(LB) est // à (IK)}}$

or, nous savons que G est sur (IK). Donc nous avons : $\boxed{\text{(IG) // (LB)}}$

* Dans le triangle ABL :

- I milieu de AL
- (IG) // (LB)

$\Big\} \xrightarrow[\text{réciproque th}]{}$ G milieu de [AB]

2ème méthode : utilisation des homotéthies

Posons : h_1 (Y, k)

$B \longmapsto K$

$L \longmapsto I$

$[LB] \longmapsto [IK]$

Nous savons que : $k = \frac{IK}{LB} = \frac{JF}{JB} = 2$

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{IK} = 2\vec{LB}}$ $((IK) // (LB))$

Nous avons donc : $h_1(J, 2)$: $B \longrightarrow K$

$L \longrightarrow I$

$(LB) \longrightarrow (IK)$

Posons $h_2(A, \frac{1}{2})$: $B \longrightarrow P$

$L \longrightarrow I$

$LB \longrightarrow IP$ $\Leftrightarrow \boxed{\vec{LB} = 2\vec{IP}}$

or, nous savons que $\vec{IK} = 2\vec{LB}$ et $\vec{LB} = 2\vec{IP}$,
ce qui équivaut à : $2 \times 2\vec{IP} = \vec{IK}$

$4\vec{IP} = \vec{IK}$

$\boxed{\vec{IP} = \frac{1}{4}\vec{IK}}$

Donc, $P \in (IK)$.

D'après $h_2(A, \frac{1}{2})$, nous savons que :

$\frac{AB}{AP} = \frac{AL}{AI} = 2$ $\Rightarrow$ Donc, $\boxed{\vec{AB} = 2\vec{AP}}$ $(P \in AB)$

$\Rightarrow$ P milieu de [AB]

P est donc le point d'intersection de [IK) et [AB]. $\Rightarrow$ Donc, $P = G$. $\Rightarrow$ G milieu de [AB]

3ème méthode : utilisation des ~~homoth~~ barycentres

Cherchons quels coefficients affecter à A et B pour que I soit barycentre de A(a) et B(b)

Nous savons que : $3\vec{AI} = \vec{AJ}$

$\Leftrightarrow 3\vec{AI} = \vec{AI} + \vec{IJ}$

$\Leftrightarrow 2\vec{AI} + \vec{JI} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \boxed{2\vec{IA} + \vec{IJ} = \vec{0}}$

Si I barycentre de A(a) et B(b), on a la relation : $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

donc, ici, I barycentre de A(2) et J(1)

Même chose pour K.

Posons K barycentre de Y(y) et B(b)

Nous savons que $2\overrightarrow{YB} = \overrightarrow{YK}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{YK} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{YK}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{YK} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-\overrightarrow{YK} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}}$$

Donc K barycentre de Y(-1) et B(2).

Posons : P barycentre de I(3) et K(1).

D'après les résultats précédents et la règle des barycentres partiels, nous avons :

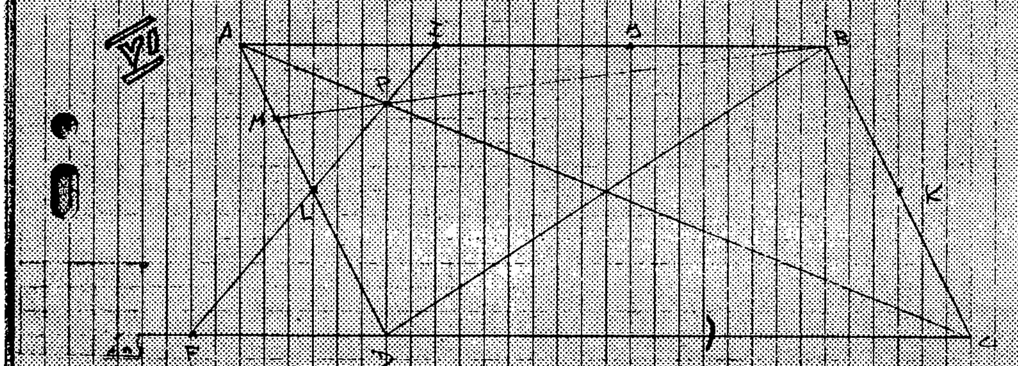
$$\overrightarrow{OP} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OY}}{a+b+y}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 0\overrightarrow{OY}}{2+2}$$ Prenons O en A

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{2\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{2}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$$



Posons F symetrique de I par rapport à L.
(AIDF) est donc un //gr (L milieu de [AD] et aussi de [IF]). I, P, L, F sont donc alignes.

__1er méthode : utilisation des homothéties__

Posons $h(P, k)$: $I \longmapsto F$
$A \longmapsto C$
$[AI] \longmapsto [CF]$

Nous savons que :

$$k = \frac{CF}{AI} = \frac{CP}{AP} = \frac{FP}{PI}$$

or $\vec{CF} = \vec{CD} + \vec{DF}$
$= 3\vec{AI} + \vec{AI}$
$\boxed{= 4\vec{AI}}$ donc $k = \frac{4AI}{AI} = \boxed{4}$

Donc $h(P, 4)$: $I \longmapsto F$
$A \longmapsto C$
$(AI) \longmapsto (CF)$

Donc, nous savons que $\frac{CP}{PA} = 4$

$$\frac{CP}{PA} = 4 \iff 4\vec{PA} = \vec{CP}$$
$$\iff 4\vec{PA} = \vec{CA} + \vec{AP}$$
$$\iff 5\vec{PA} = \vec{CA}$$
$$\iff 5\vec{AP} = \vec{AC}$$
$$\iff \boxed{\vec{AP} = \frac{1}{5}\vec{AC}}$$

2ème méthode : utilisation du théorème de Thalès

* Dans le triangle (PCF) :

- A est sur (PC)
- I est sur (PF)
- (AI) // (FC)

$$\Rightarrow \frac{CP}{PA} = \frac{FP}{PI} = \frac{FC}{AI}$$

or $\vec{FC} = \vec{FD} + \vec{CD}$

$= \vec{AI} + 3\vec{AI}$

$\boxed{= 4\vec{AI}}$

Donc $\frac{CP}{PA} = \frac{FP}{PI} = \frac{FC}{AI} = 4$

$$\frac{CP}{PA} = 4 \iff \vec{CP} = 4\vec{PA}$$
$$\iff \vec{CA} + \vec{AP} = 4\vec{PA}$$
$$\iff 5\vec{PA} = \vec{AC}$$
$$\iff \boxed{\vec{AP} = \frac{1}{5}\vec{AC}}$$

3ème méthode : utilisation des barycentre

1) L'isobarycentre de deux points se trouve en leurs milieux. Si les deux isobarycentre de ABCD AC et BD sont un même point, ABCD sera un //gr, car AC et BD étant ses médianes, elles se coupent en leur milieux.

2) D'après la définition du barycentre, le barycentre Q de A(4) et C(1) est tel que :

$$a\vec{QA} + c\,\vec{QC} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 4\vec{QA} + \vec{QC} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 4\vec{QA} + \vec{QA} + \vec{AC} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 5\vec{QA} = \vec{CA}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{AQ} = \frac{1}{5}\vec{AC}}$$

Soit V l'isobarycentre de B et D. Par définition, V est milieu de AC et BD.
Soit Z le barycentre de V(2) et A(3), donc de A(3), B(1), D(1) : règle des barycentres partiels
Z est tel que :

$$a\vec{ZA} + v\vec{ZV} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 3\vec{ZA} + 2\vec{ZV} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 3\vec{ZA} = 2\vec{VZ}$$
$$\Leftrightarrow 3\vec{ZA} = 2\vec{VA} + 2\vec{AZ}$$
$$\Leftrightarrow 5\vec{ZA} = \vec{CA} \qquad (2\vec{VA} = \vec{CA})$$
$$\Leftrightarrow 5\vec{AZ} = \vec{AC}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{AZ} = \frac{1}{5}\vec{AC}}$$
$$\vec{AQ} = \frac{1}{5}\vec{AC}$$

donc Q est aussi le barycentre de A(3), B(1), D(1)

3) Nous avons la relation :

$5\vec{AQ} = \vec{AC}$

Introduisons le point M dans les calculs :

$5\vec{AQ} = \vec{AC}$

$\Rightarrow 4\vec{AQ} + \vec{AM} + \vec{MQ} = \vec{AM} + \vec{MC}$

$\Leftrightarrow 4\vec{AM} + 4\vec{MQ} + \vec{MQ} = \vec{MC}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + 5\vec{MQ} = \vec{MB} + \vec{BC}$

$\Leftrightarrow \boxed{5\vec{MQ} = \vec{MB}}$

Ce résultat est de la forme $\vec{AB} = k\vec{AC}$, donc les points M, Q, B sont alignés.

4) a) Transformons la formule :

$3\vec{AI} = \vec{AB}$ pour obt[illegible] une formule de la forme $a\vec{IA} + b\vec{IB} = \vec{0}$.

$3\vec{AI} = \vec{AB}$

$\Leftrightarrow 3\vec{AI} = \vec{AI} + \vec{IB}$

$\Leftrightarrow 2\vec{AI} + \vec{BI} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \boxed{2\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}}$

Donc, I barycentre de A(2) et B(1), car nous reconnaissons la formule du barycentre.

b) Nous savons que :

L barycentre de A(1), D(1)

I barycentre de A(2), B(1).

D'après la règle des barycentres partiels, Y étant barycentre de I(3) et L(2), nous avons :

$\vec{OY} = \dfrac{3\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}}{3+1+1}$; prenons O en A.

$$\vec{AY} = \frac{3\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AD}}{5}$$

$$\vec{AY} = \frac{\vec{AB} + \vec{AD}}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\vec{AY} = \frac{1}{5}\vec{AC}} \\ \text{or } \vec{AQ} = \frac{1}{5}\vec{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow$$ donc Q est également le barycentre de I(3) et L(2).

Q barycentre de I(3) et L(2) signifie

$$3\vec{QI} + 2\vec{QL} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{QI} + 2\vec{QI} + 2\vec{IL} = \vec{0}$$

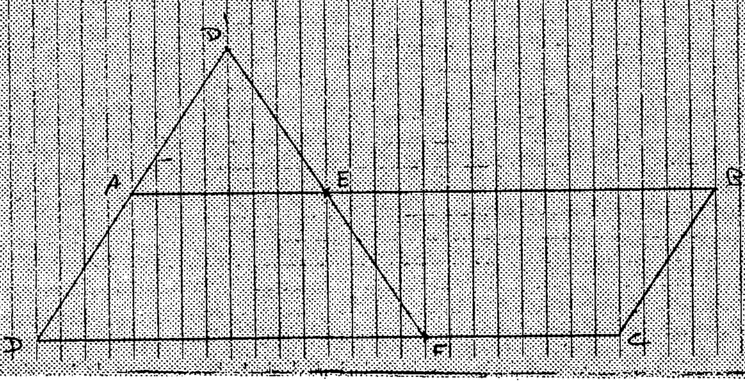
$$\Leftrightarrow 5\vec{QI} = -2\vec{IL}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{IQ} = \frac{2}{5}\vec{IL}}$$

Nous avons les relations suivantes

$$\left.\begin{array}{lll}\vec{AQ} = \frac{1}{5}\vec{AC} & \Leftrightarrow & Q \in (AC) \\ \vec{IQ} = \frac{2}{5}\vec{IL} & \Leftrightarrow & Q \in (IL)\end{array}\right\} \boxed{Q = P}$$

$$\boxed{\text{Donc } \vec{AP} = \frac{1}{5}\vec{AC}}$$



1ère méthode : utilisation du théorème de la droite des milieux

* Dans le triangle (DD', F) :
- A milieu de D'
- (AE) // (DF)

$\left.\begin{array}{l}\text{A milieu de D'} \\ (AE) // (DF)\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{réciproque du th}]{} E$ milieu de $[D'F]$

2ème méthode : utilisation des homothéties.

Posons $h(D', 2) : A \longmapsto D$
$(AE) \longmapsto (DF)$.

or E est sur (AE), F est donc son image sur (DF), et l'on a $\vec{D'F} = 2\vec{EF}$

$\Leftrightarrow \vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{D'F}$

$\Leftrightarrow$ E milieu de $[D'F]$.

3ème méthode : utilisation des barycentres

Nous avons $CF = \frac{1}{3} CD$.

$\Leftrightarrow 3\vec{CF} = \vec{CF} + \vec{FD}$

$\Leftrightarrow 2\vec{CF} + \vec{DF} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \boxed{2\vec{FC} + \vec{FD} = \vec{0}}$

Nous reconnaissons les formules du barycentre.
ici, F barycentre de C(2) et D(1)

Nous avons $\vec{D'A} = \vec{AD'}$

$\Leftrightarrow \vec{DD'} + \vec{D'A} = \vec{AD'}$

$\Leftrightarrow \vec{DD'} + 2\vec{D'A} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \boxed{-\vec{D'D} + 2\vec{D'A} = \vec{0}}$

ici, D' est le barycentre de D(-1) et A(2)

Posons : x barycentre de (F, 3) et (D', 3).
Les deux points étant affectés des mêmes coefficients, x est leur isobarycentre et donc leur milieu. $\boxed{\overrightarrow{D'x} = \overrightarrow{xF}}$

Posons : G barycentre de A(1), C(1), D(-1) et A(2).
D'après la définition du barycentre, nous avons la relation :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a\overrightarrow{OA} + c\overrightarrow{OC} + d\overrightarrow{OD}}{a+b+c}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}}{3}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC}}{3}$$ (prenons O en A)

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{DC}}{3}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}$$

Démontrons que x = G.
Nous savons que x barycentre de F(3), D'(3).
Nous avons également :

$$① \begin{cases} \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \\ 2\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DD'} \\ \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD'} \end{cases}$$

Nous avons donc la relation :

$$\boxed{3\overrightarrow{xF} + 3\overrightarrow{xD'} = \vec{0}}$$

Transformons cette formule grâce à (1).

$3\vec{XF} + 3\vec{XD'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\vec{XB}+3\vec{BC}+3\vec{CF}+3\vec{XD}+3\vec{DA}+3\vec{AD'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\vec{XB}+3\vec{BC}+3(\frac{1}{3}\vec{BA})+3\vec{XD}+3\vec{DA}+3\vec{AD'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\vec{XB}+\vec{BA}+3\vec{XA}+3\vec{AD}+3\cancel{\vec{DA}}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\vec{XB}+\vec{BA}+3\vec{XA}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\vec{XB}+\vec{BA}+3\vec{XB}+3\vec{BA}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\vec{XB}+4\vec{BA}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\vec{AB}=6\vec{XB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB}=\frac{3}{2}\vec{XB}$

$\Leftrightarrow \vec{XB}=\frac{2}{3}\vec{AB}$

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{AX}=\frac{1}{3}\vec{AB}}$

or, $\vec{AG}=\frac{1}{3}\vec{AB}$, donc $\boxed{G=X}$

D'après les hypothèse, nous savons que

$\vec{AE}=\frac{1}{3}\vec{AC}$, or, $\vec{AX}=\frac{1}{3}\vec{AB}$

donc, $\boxed{E=X}$

or X est le milieu de [D'F], donc E est aussi le milieu de [D'F]

<u>4ème méthode : utilisation du théorème de Chasles</u>

$\boxed{\frac{1}{2}\vec{D'F}} = \frac{1}{2}(\vec{D'A}+\vec{AC}+\vec{CF})$

$= \frac{1}{2}(\vec{BC}+\vec{AC}+\vec{EA})$

$= \frac{1}{2}(\vec{BC}+\vec{EC})$

$= \frac{1}{2}\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{EB}+\frac{1}{2}\vec{BC}$

$= \vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{EB}$

$= \vec{BC}+\vec{AE}$

$= \vec{D'A}+\vec{AE} = \boxed{\vec{D'E}}$ ⇒ E milieu de [D'F]