

LA REPRESENTATION DES CORPS RONDS

Luis Carlos PAIS
J. NAUDEILLO
B. PELOUZET
Irem de Montpellier

L'objectif principal de cet article est de faire une analyse de la représentation des corps ronds : cylindre, sphère et cône. Nous aborderons plus particulièrement la représentation du cylindre. Nous observerons d'abord un certain nombre de dessins proposés par les manuels scolaires. Nous analyserons ensuite des représentations faites par des élèves du premier cycle avant tout apprentissage. Nous comparerons les dessins des manuels scolaires et ceux des élèves. Dans la représentation des corps ronds, l'ellipse joue un rôle fondamental. Parmi les différentes méthodes pour tracer cette courbe, nous avons expérimenté, auprès des élèves, l'usage d'un pochoir trace-ellipse. Nous présenterons quelques réalisations des élèves à ce propos. Nos observations n'ont pas pour objectif d'énoncer des affirmations trop générales qui dépasseraient les limites de nos expériences. Nous signalons finalement que ce travail de recherche a été entrepris en col-

laboration avec le Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie de Montpellier. Ce groupe est dirigé par Gérard Audibert et constitué par une douzaine d'enseignants.

I - Le dessin du cylindre dans les manuels scolaires

Nous avons analysé une collection de 37 dessins du cylindre. Ces dessins ont été reproduits des pages de 11 manuels scolaires de 5^{ème} qui sont actuellement utilisés dans les collèges français. Dans ces livres, nous avons rencontré trois types de pages : des activités préparatoires, de cours et les pages d'exercices. Les dessins que nous avons analysés ont été retirés des pages de cours. Ces pages présentent normalement des définitions, des propriétés, théorèmes et formules. Dans cette collection de des-

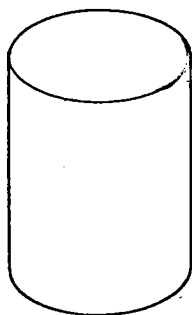


Fig. 1

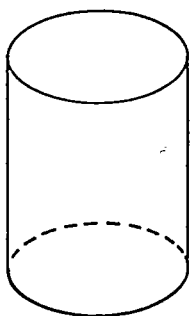


Fig. 2

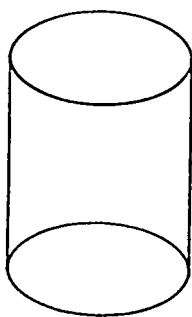


Fig. 3

sins, nous avons analysé les points suivants : l'équilibre des figures, l'usage des pointillés, le tracé des ellipses, la perspective utilisée dans les dessins et les règles de représentations.

Tous les dessins analysés illustrent le concept de cylindre de révolution. Certaines de ces figures présentent des éléments d'équilibre ; ce sont celles qui sont fréquemment utilisées dans l'enseignement. Les éléments d'équilibre sont les suivants : il y a deux génératrices représentées par deux segments verticaux de même longueur et symétriques par rapport à l'axe de symétrie du cylindre. Les axes des ellipses sont toujours aussi parallèles aux bords de la page. Trois sur quatre des dessins présentent ces conditions. Nous disons que ces trois critères définissent une configuration du cylindre. Nous adoptons le terme "configuration" au sens défini par Audibert G. [1] :

"Une configuration ou dessin fondamental est un dessin qui illustre un concept ou une propriété importante, qui respecte de fortes contraintes d'équilibre et qui est socialement reconnu".

En ce qui concerne l'usage des pointillés dans la représentation du cylindre, on peut observer d'abord que 75% des dessins utilisent ce type de trait. L'usage le plus fréquent en est fait pour dessiner un arc d'ellipse représentant la partie cachée du cercle de base inférieure. Mais les pointillés sont aussi utilisés pour représenter certains rayons, diamètres ou l'axe du cylindre. Les pointillés sont le plus souvent employés pour représenter des éléments cachés. Mais on trouve aussi des pointillés représentant des éléments apparents comme certains diamètres, rayons ou double flèches.

LA REPRÉSENTATION DES CORPS ROUNDS

L'ellipse est utilisée dans la représentation du cylindre de tous les manuels scolaires analysés. Dans presque la totalité des figures, l'ellipse est tracée à l'aide d'instruments de dessin. Mais seulement deux sur les onze manuels font référence à une méthode de tracé d'ellipses. Un de ces manuels dit qu'on peut trouver dans le commerce des pochoirs pour tracer des ellipses. Un second livre décrit une méthode de tracé d'ellipses par 12 points. Les 9 autres manuels ne font aucun commentaire sur le tracé des ellipses.

Parmi les onze manuels analysés, nous n'avons trouvé que cinq qui font quelques références à la représentation du cylindre. Les figures 1, 2 et 3 illustrent les trois dessins les plus fréquents dans les livres. La quasi totalité des représentations sont réalisées selon une perspective cavalière avec un angle de fuite de 90° ⁽¹⁾. Le rapport de réduction entre les axes des ellipses est

approximativement égal à $1/2$. Les représentations du cylindre qui ne sont pas réalisées dans cette perspective, comme celui illustré par la figure 4, sont rarement rencontrés.

Un mélange de perspectives peut être observé en certains dessins du cylindre. Il est possible d'identifier dans ces dessins deux perspectives différentes dans une seule représentation. La figure 5 illustre ce mélange de perspectives. Dans ce dessin, le cylindre est représenté par une perspective cavalière avec un angle de fuite 90° (voir note à la fin de cet article) qui est donc différente de celle utilisée dans la représentation du plan interceptant le cylindre. Le mélange de perspectives constitue à la fois un problème de solution difficile qui consiste à concilier la lisibilité et l'exactitude de la perspective. Cette conciliation n'est pas toujours évidente dans la représentation des corps ronds.

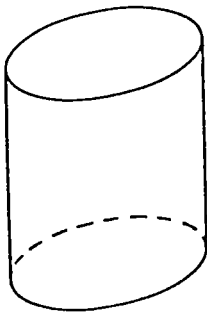


Fig. 4

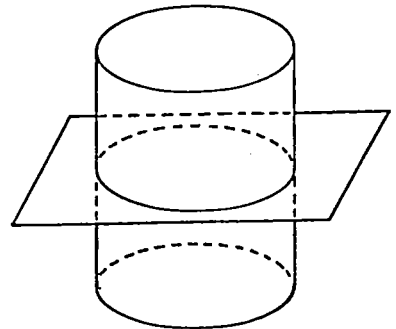


Fig. 5

(1) Dans une projection cylindrique oblique, nous obtenons un angle de fuite de 90° lorsque le plan de projection est dans une position verticale et la direction de projection est dans un plan qui est simultanément vertical et perpendiculaire au plan de projection. Pour une étude plus détaillée de ces notions, nous renvoyons au livre de Audibert G. (1990), pages 66 à 69.

II - Le dessin du cylindre chez l'élève

Pour observer la représentation du cylindre chez l'élève, nous avons proposé en classe de 5^{ème} un problème faisant intervenir les concepts de cylindre de révolution et d'une section verticale. L'énoncé de ce problème que nous appellerons "problème de la fourme" (*) est le suivant :

"Une fourme de Lozère, cylindrique, a un diamètre de 10 cm et une hauteur de 8 cm. On peut repérer le centre de la face supérieure. Nous l'appellerons C.

On partage cette fourme en deux par un coup de couteau vertical.

1. *Dessine la section obtenue si le coup de couteau passe par le centre C.*
2. *A quelle distance de C faut-il couper pour que la section soit carrée ?*

Dans la résolution de ce problème, les élèves ont réalisé un nombre important de dessins parmi lesquels nous avons séparé ceux représentant exclusivement le cylindre de révolution. Nous avons analysé de cette façon une collection de 56 dessins du cylindre. Nous utiliserons le terme "ovale" plutôt que "ellipse" pour caractériser la courbe aplatie tracée à main levée par l'élève pour représenter le cercle de base du cylindre. Cela parce que la notion d'ellipse est déjà le résultat d'un travail géométrique. De façon qualitative, la représentation d'un cercle en perspective est un ovale. On peut distinguer cinq classes de représentations du cylindre que nous appelons demi-ovale, ovale avec pointillés, ovale en trait continu, segment et cercle. Décrivons ces classes de dessins.

Nous plaçons dans une première classe les dessins constitués d'un ovale, de deux segments et d'un demi-ovale. L'ovale représente le cercle de base supérieure. Ses axes sont parallèles aux bords de la feuille. Les segments représentent deux génératrices et constituent une partie du contour apparent. Ils sont parallèles aux bords de la feuille. Le demi-ovale représente la partie apparente du cercle de base inférieure. La figure 1 illustre un dessin de cette classe. Nous dirons qu'il s'agit de la classe *demi-ovale*.

Nous plaçons dans une seconde classe les dessins constitués d'un ovale en trait continu, de deux segments et d'un ovale moitié en trait continu et moitié en trait pointillé. L'ovale en trait continu représente le cercle de base supérieur. Ses axes sont parallèles aux bords de la feuille. Les segments représentent deux génératrices et constituent une partie du contour apparent. Ils sont parallèles aux bords de la feuille. L'ovale avec pointillés représente le cercle de base inférieur. La figure 2 illustre un dessin de cette classe. Nous dirons qu'il s'agit de la classe *ovale avec pointillés*.

Nous plaçons dans une troisième classe les dessins composés de deux ovales en trait continu et de deux segments. Ces ovales représentent les cercles de base du cylindre. Les axes de ces ovales sont parallèles aux bords de la feuille. Les segments représentent deux génératrices et constituent une partie du contour apparent. Ils sont parallèles aux bords de la feuille. La figure 3 illustre un dessin de cette classe. Nous dirons qu'il s'agit de la classe *ovale en trait continu*.

Nous plaçons dans une quatrième

(*) Une *fourme* est un fromage au lait de vache à pâte ferme, chauffée et pressée, se présentant sous forme de cylindre et fabriqué dans les régions du centre de la France (cf. "Petit Robert").

LA REPRÉSENTATION DES CORPS ROUNDS

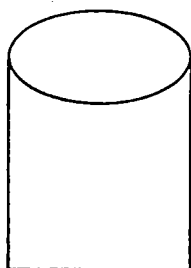


Fig. 6

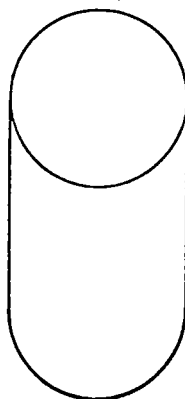


Fig. 7

classe les dessins constitués d'un ovale, de deux segments verticaux et d'un segment horizontal. L'ovale représente le cercle de base supérieur. Ses axes sont parallèles aux bords de la feuille. Les deux segments verticaux représentent deux génératrices et le segment horizontal représente le cercle de base inférieur. Ces trois segments constituent aussi une partie du contour apparent. La figure 6 illustre un dessin de cette classe. Nous dirons qu'il s'agit de la classe *segment*.

Nous plaçons dans une cinquième classe les dessins constitués d'un cercle, de deux segments et d'un demi-cercle. Le cercle représente le cercle de base supérieure. Les segments sont parallèles aux bords latéraux de la feuille. Ils représentent deux génératrices et une partie du contour apparent. Le demi-cercle représente la partie apparente du cercle de base inférieure. La figure 7 illustre un dessin de cette classe. Nous dirons qu'il s'agit de la classe *cercle*.

Les dessins de la classe *demi-ovale* sont plus nombreux que ceux de la *classe ovale avec pointillés* et ceux de la *classe ovale en trait continu*. Les dessins de la classe *cercle* sont aussi nombreux que ceux de la classe *demi-ovale*. Si l'élève réalise un dessin de la classe *demi-ovale*, nous pensons qu'il veut dessiner seulement la partie apparente de l'objet. L'aspect matériel de l'objet joue un rôle important dans la représentation de l'élève. Il ne maîtrise pas encore l'usage des pointillés.

Il nous semble que le trait horizontal des dessins de la classe *segment* provient d'une difficulté de coordination entre la vue de face et la représentation du cylindre par une perspective cavalière avec un angle de fuite de 90° et un rapport de réduction $1/2$.

Dans une représentation du cylindre par une perspective cavalière avec un angle de fuite de 90° et un rapport de réduction 1, nous avons un dessin comme

celui de la figure 7. Donc les représentations de la classe *cercle* ne sont pas contradictoires du point de vue technique. L'élève n'a pas, bien sûr, perception de ce fait. D'autre part, nous observons que tous les cercles sont tracés au compas et que tous les élèves qui ont réalisé un dessin de la classe *cercle* ont réalisé simultanément dans leurs brouillons au moins une autre représentation du cylindre à main levée représentant le cercle de base supérieure par un ovale. Nous estimons donc que les élèves ont une certaine intuition de la bonne représentation. Cependant, pour présenter un dessin précis, ils utilisent le compas qui est le seul instrument de dessin à leur disposition. Nous croyons que cette attitude des élèves montre le besoin d'un instrument de dessin pour tracer des ellipses. Nous résumons ces observations par une hypothèse d'enseignement :

L'élève voulant réaliser un dessin pré-

cis du cylindre en utilisant un instrument de dessin, représente le cercle de base supérieure par un cercle tracé au compas. L'absence d'un instrument lui permettant de dessiner des ellipses se fait sentir.

III - L'usage d'un pochoir trace-ellipse

Le pochoir trace-ellipse est une plaque plastique perforée et utilisée comme instrument de dessin pour reproduire des ellipses. La figure 8 reproduit à l'échelle réduite un pochoir permettant de tracer 41 ellipses ayant les grands axes mesurant de 3 à 105 millimètres.

Nous avons expérimenté en classe de 5^{ème} et 4^{ème} l'utilisation d'un pochoir trace-

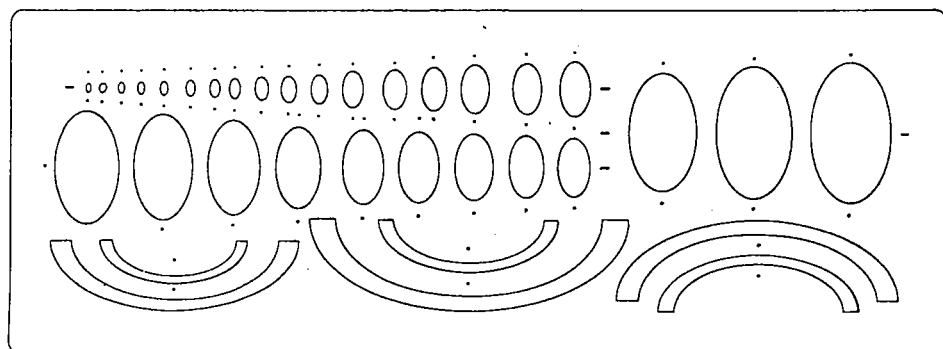


Fig. 8

LA REPRESENTATION DES CORPS RONDS

ellipse. Chaque élève avait à sa disposition un pochoir à 35° et une maquette de cylindre en carton. Nous avons proposé les trois activités suivantes :

1 — Tracer cinq ellipses quelconques en utilisant le pochoir à votre disposition.

2 — Tracer trois ellipses avec votre pochoir ayant les grands axes respectivement égaux à 2,5 cm, 4,6 cm et 8,8 cm.

3 — Dessiner le cylindre formé par la maquette que tu as devant toi. Dans ce dessin, les cercles de base du cylindre seront représentés par des ellipses choisies dans le pochoir.

La première activité permet un contact initial de l'élève avec le nouvel instrument. La seconde amène le problème des mesures des axes. Il faut que l'élève utilise simultanément la règle et le pochoir une fois que les mesures ne sont pas marquées sur la plaque. L'objectif de la troisième activité est simplement de permettre à l'élève de représenter le cylindre en utilisant le pochoir. Nous avons observé que la manipulation du pochoir par l'élève ne présente pas de difficultés immédiates. L'instrument présente deux restrictions qui nous paraissent les principales : dans une plaque, le rapport entre les axes des ellipses sont tous fixés. D'autre part, il faut prévoir une tolérance d'approximation dans les mesures des axes. Ces restrictions ne sont pas trop significatives au niveau du premier cycle. Les élèves ont fait des bons dessins du cylindre du point de vue de la coordination graphique des traits. Ils ont considéré le pochoir comme un instrument "pratique" et "utile". Le pochoir semble offrir des possibilités d'utilisation dans le

premier cycle. Mais nous croyons qu'il faut multiplier les expériences.

IV - Des conclusions

Nous avons rencontré trois dessins de base représentant le cylindre dans les manuels scolaires. La différence essentielle entre ces trois dessins provient de la représentation du cercle de base inférieure. Ce cercle peut être représenté par une demi-ellipse, une ellipse moitié pointillée ou encore par une ellipse en trait continu.

Parmi les dessins réalisés par les élèves, on observe l'existence de cinq représentations différentes : les trois qui ressemblent à celles rencontrées dans les manuels scolaires et deux autres qui montrent quelques difficultés des élèves. La première consiste dans la représentation du cercle de base inférieure par un segment horizontal. Il s'agit, pour la seconde, de la représentation du cercle de base supérieure par un cercle tracé au compas. Il nous faut prendre en compte ces deux représentations spontanées non prévues par les manuels. Le dessin joue un rôle très important dans la recherche de résolution du problème proposé aux élèves. Nous estimons qu'il y a une corrélation entre les représentations des élèves et la nature matérielle du problème proposé.

Il y a dans les manuels scolaires la présence effective de dessins qui peuvent être considérés comme des configurations de cylindre. Ces dessins sont illustrés par les figures 1 et 2. Les commentaires qui sont placés à côté des figures font référence se

lement aux éléments conceptuels représentés. Il n'y a pas d'explications sur le dessin lui-même. De façon générale, il n'y a pas de règles de représentation suffisamment claires et explicites sur la réalisation ou la lecture du dessin.

V - Quelques exercices sur les corps ronds

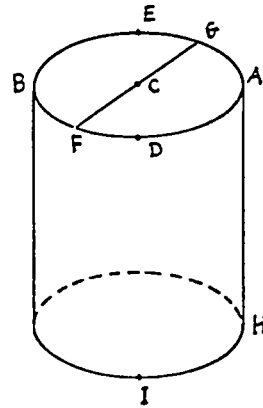
L'objectif principal des exercices présentés ici est de permettre à l'élève l'utilisation du dessin comme un outil de recherche de solution. Nous estimons que cette pratique de représentation devra contribuer pour la construction des concepts de corps ronds chez l'élève.

Ces problèmes ont été proposés en classes de 5^{ème}, 4^{ème} et 3^{ème}. Nous pensons que les solutions portant exclusivement sur la réalisation d'un dessin doivent être acceptées. Ces solutions plus expérimentales constituent un passage très important de la connaissance intuitive des élèves vers des solutions plus théoriques comme par exemple les réponses en utilisant des théorèmes ou propriétés géométriques. Nous rencontrons de cette façon les trois aspects de la géométrie qui ont été l'objet d'analyse de Gonseth F. [3] : l'intuitif, l'expérimental et le rationnel. La géométrie élémentaire serait-elle la rencontre de ces trois aspects ?

1 — Problème de la fourme (énoncé déjà présenté dans le paragraphe 2).

2 — Le dessin ci-dessous représente un cylindre de diamètre 7 cm et hauteur 8 cm. Les lettres sur le dessin représen-

tent des points de ce cylindre. Le centre de la face supérieure est repéré par C. Quelles sont les longueurs réelles des segments : $[AB]$, $[AH]$, $[AD]$, $[DE]$, $[BH]$, $[EI]$, $[DI]$ et $[FG]$?



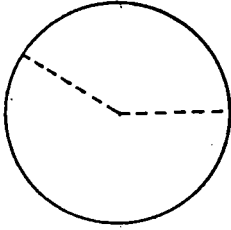
3 — Un ballon flottant sur l'eau a un diamètre de 48 cm. Il est enfoncé de $\frac{1}{6}$ de sa hauteur. Le contact avec la surface de l'eau est un cercle. Quel est le rayon de ce cercle ?

4 — Un verre a la forme d'un tronc de cône. La base inférieure est un cercle de diamètre 5 cm et la base supérieure est un cercle de diamètre 15 cm. La hauteur est de 14 cm. Un prisme droit a pour base un triangle équilatéral de côté 8,7 cm. La hauteur de ce prisme est 7 cm. Il est posé verticalement sur une table. Peut-on cacher complètement ce prisme en retournant le verre sur lui ?

5 — Un disque en carton de 15 cm de rayon est découpé en deux morceaux comme le montre la figure ci-dessous. On fabrique deux chapeaux de clown (en forme conique) à partir des deux morceaux de disque. Un des deux chapeaux

LA REPRESENTATION DES CORPS RONDS

doit avoir une hauteur de 12 cm. Quelle est la hauteur de l'autre chapeau ?



6 — On fabrique un chapeau de clown (de forme conique) à partir d'un demi-disque en carton de 10 cm de rayon. Quels seront le rayon de base et la hauteur de ce chapeau ?

7 — Imaginons un verre parfaitement conique de 9 cm de hauteur. Le bord du verre est un cercle de 5 cm de diamètre. Il est rempli d'un liquide jusqu'à un tiers de sa hauteur. Quelle est l'aire de la surface supérieure de ce liquide ?

8 — Sur une sphère de 10 cm de rayon on pose un cône creux ayant 10 cm de diamètre de base et 20 cm de hauteur. Démontrer que le volume du solide

ainsi formé est strictement inférieur à $1500 \pi \text{ cm}^3$.

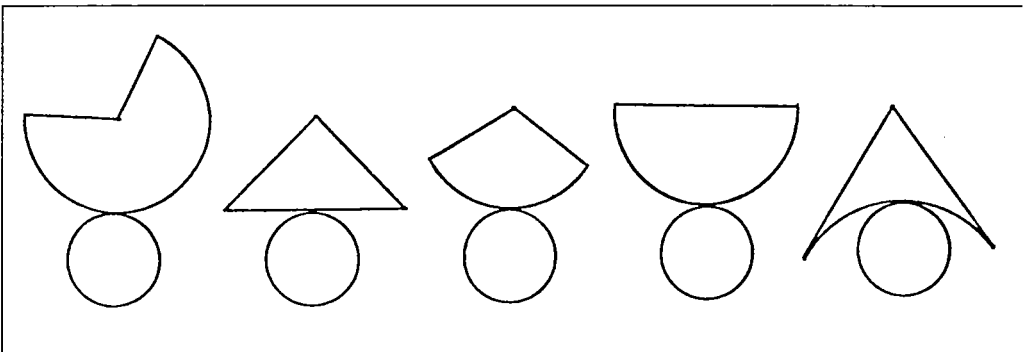
9 — Un cube de 10 cm d'arête est posé sur une table. On le recouvre d'un cône qui repose aussi sur la table. Le diamètre du cercle de base est une fois et demie plus grand que la diagonale d'une face du cube.

Quelle est la plus petite hauteur possible pour le cône ?

10 — Dans un cube en matière transparente de 10 cm de côté est inscrit un cône. La base circulaire du cône est inscrite dans une face du cube. Le centre de la face opposée à cette face est le sommet du cône. Faites un dessin montrant comment est ce cube ?

11 — Un cône a une hauteur de 4 cm et le rayon du cercle de base est 2 cm. On partage ce cône par un plan parallèle au plan de base de telle sorte que les volumes des deux parties obtenues soient égaux. A quelle hauteur de la base le cône a été coupé ?

12. Parmi les dessins ci-dessous, repère par une croix (x) celui qui correspond à un patron de cône de révolution.



BIBLIOGRAPHIE

[1] AUDIBERT G. 1989 - *La géométrie dans l'enseignement*. Voir dans le présent numéro de la revue Repères-Irem page 21, 32 pages.

[2] AUDIBERT G. 1990 - *La perspective cavalière*. Publication N°75 de l'AP-MEP, 208 pages.

[3] GONSETH F. 1945 - *La géométrie et le problème de l'espace*, 6 volumes, éditions Griffon, Neuchâtel.