
UN PARCOURS DE MODÉLISATION AU LYCÉE¹

Raphaël ROSSIGNOL²

IREMI de Grenoble

Iulia TUNARU³

IREMI de Grenoble

Résumé. La modélisation mathématique est un objectif d'enseignement officiel dans l'enseignement secondaire, en France, mais sa mise en œuvre est beaucoup moins cadrée que celle d'autres compétences mathématiques. L'objectif de cet article est de présenter un travail réalisé par le groupe « Analyse et modélisation au lycée » de l'IREMI de Grenoble. D'un point de vue théorique, celui-ci s'inscrit dans le cadre développé par Blum et ses collaborateurs (Niss et Blum, 2020) qui ont introduit la notion de *cycle de modélisation*. Concrètement, notre travail consiste en une suite cohérente d'activités formant un *parcours de modélisation*. Nous détaillons notre vision de la modélisation, de son enseignement, la notion de parcours et un exemple particulier de parcours autour de notions de géométrie et d'optimisation.

Mots-clés. Cycle de modélisation, géométrie, optimisation, lycée, empilement, pavage, volume, aire.

Introduction

L'application des mathématiques à une problématique extra-mathématique nécessite en général la construction d'un modèle mathématique. Or ceci est souvent loin d'être facile à faire et à enseigner, comme en témoignent les résultats des élèves aux évaluations PISA — qui contiennent souvent des exercices « en contexte réel », même s'ils ne sont pas forcément des exercices de modélisation pensés pour faire travailler toutes les phases d'un cycle de modélisation —, le débat sur la modélisation dans l'enseignement des mathématiques qui eut lieu en 2003 au sein du conseil scientifique des IREM (<https://www-dev.univ-irem.fr/la-modelisation>) et plus généralement la littérature didactique dédiée à ce sujet

(cf. par exemple Niss et Blum, 2020 ; Borromeo Ferri, 2017). Il nous semble cependant que le jeu en vaut la chandelle, et que les enseignants de mathématiques peuvent trouver dans l'enseignement de la modélisation de nombreux bénéfices.

Notre motivation première est peut-être venue de la nécessité de nous approprier les contraintes institutionnelles : le terme « modélisation » apparaît dans les programmes à la fois comme une des compétences mathématiques et comme justification de l'introduction de plusieurs notions-clés (pour n'en citer qu'une, voir la justification de l'introduction de la fonction exponentielle en classe de première). C'est également un angle de vue fécond pour satisfaire aux exigences du grand

¹ Le travail présenté dans cet article a été réalisé par le groupe « Analyse et modélisation au lycée » de l'IREMI de Grenoble. En plus des deux auteurs de l'article, ont contribué à ce travail Marie Busser, Damien Jacquemoud, Hélène Langlais, Cyril Masson et Florence Michon.

² raphael.rossignol@univ-grenoble-alpes.fr

³ iulia.tunaru@univ-grenoble-alpes.fr

oral. Mais c'est aussi une activité que nous pressentons attirante pour les élèves, en introduisant une nouvelle dynamique et une nouvelle motivation dans la classe à travers un questionnement initial pour lequel les mathématiques deviendraient un outil, en opposition à une approche dans laquelle l'élève étudie des questions directement liées à une œuvre mathématique bien identifiée (Chevallard, 2020). Et en effet, les activités que nous avons expérimentées sont toujours sources de motivation et de créativité chez les élèves.

Par ailleurs, aborder des questions de modélisation en cours de mathématiques, c'est se poser la question de la place des mathématiques dans la démarche scientifique et prendre le temps de formaliser ce qu'est cette place, être capable de saisir la puissance et les limites de la démarche. De manière plus large, ce peut être l'occasion de parler de ce que sont les mathématiques en tant qu'activité humaine. Pour reprendre les mots de Niss (1994), aborder la quintuple nature des activités mathématiques dans nos sociétés : activité esthétique (i.e. l'expérience de la beauté, la joie, l'excitation, etc.), science pure, science appliquée (par exemple la construction d'un modèle pour un phénomène physique), boîte à outils au service des autres sciences (par exemple, les statistiques médicales) et apprentissage scolaire.

L'objectif de cet article est de rendre compte de notre tentative de définir une suite de situations de modélisation unies par un cadre théorique et testées en classe, suite que nous appellerons *parcours de modélisation*, et de donner un exemple concret de parcours. Dans la section 1, nous présenterons ce que nous entendons par modélisation en nous appuyant sur la notion de cycle de modélisation. Dans la section 2, nous présenterons les objectifs d'enseignement que nous nous sommes fixés lors de la construction des parcours. La section 3 est dédiée à la description générale des parcours, la section 4 à l'organisation des

séances et la section 5 à la description d'un parcours particulier.

1. – Le(s) cycle(s) de modélisation

Nous utiliserons un exemple « jouet » pour illustrer les notions-clés de modélisation, exemple que nous avons emprunté à l'excellent ouvrage Starfield et al. (1993). La question est la suivante :

Question 1 : *De combien de temps aurez-vous besoin pour finir de lire cet article ?*

Prenez un peu de temps pour y réfléchir avant de continuer la lecture de cet article.

Une façon de répondre à cette question, au moment où vous l'avez lue, peut consister à :

1. se faire une image mentale du processus de lecture de ce document ;
2. négliger les images, les rêveries, voir le texte de façon homogène, et percevoir que la longueur du texte et le temps mis pour le lire sont des quantités importantes ;
3. estimer la proportion de texte déjà lue et le temps mis à le lire ;
4. utiliser une simple règle de proportionnalité pour obtenir une estimation du temps nécessaire à la lecture de l'ensemble de ce document ;
5. énoncer le résultat avec les bonnes unités, en reprenant les termes de la question initiale ;
6. juger le résultat obtenu : l'ordre de grandeur obtenu paraît-il vraisemblable ? On pourrait lire une page supplémentaire en se chronométrant et voir si le rythme est cohérent avec notre estimation. On pourrait essayer d'en déduire une incertitude sur notre prévision ;
7. réfléchir si on pourrait affiner notre point de vue : est-ce que certains éléments du

- modèle ne mériteraient pas d'être améliorés ? Par exemple, on pourrait prendre en compte que le temps de réflexion risque d'être accru sur certaines parties ;
8. fournir une conclusion de l'ensemble du travail ci-dessus.

Cette façon de raisonner montre notre capacité spontanée à modéliser. Un schéma gé-

néral d'une démarche de modélisation peut prendre la forme de la figure 1, essentiellement empruntée à Niss et Blum (2020). Il est important de noter que d'un point de vue cognitif, ces étapes ne sont pas accomplies de manière purement séquentielle, cf. la section 2.3 de Borromeo Ferri (2017).

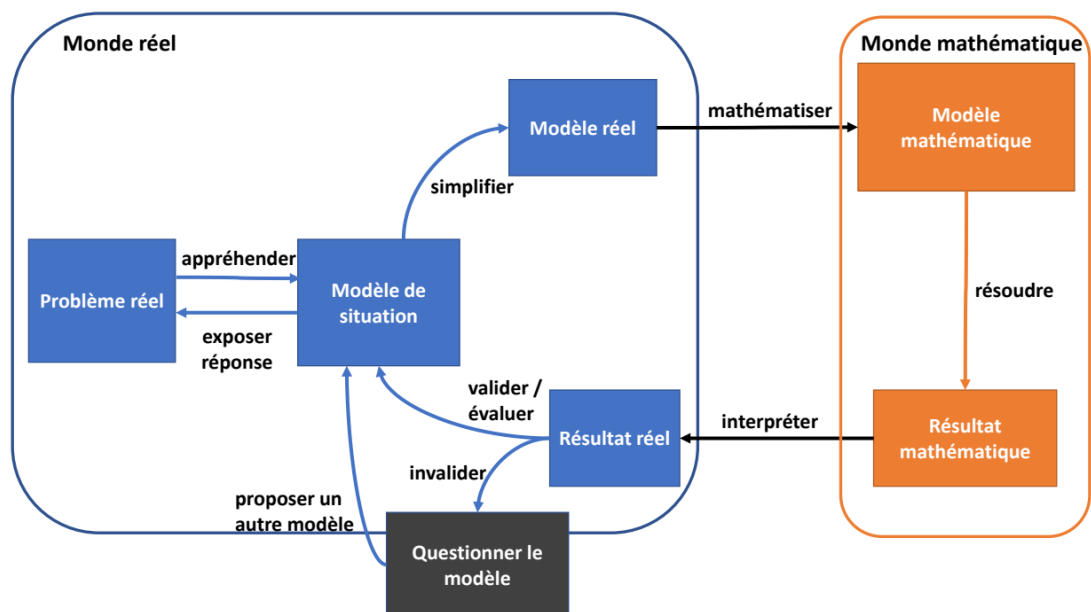


Figure 1 : Cycle de modélisation général.

Il s'agit d'une représentation possible du processus de modélisation et c'est un exemple de cycle de modélisation. Il en existe toutes sortes de variantes, plus ou moins détaillées et plus ou moins modifiées selon les situations, cf. le chapitre 2 de Niss et Blum (2020). C'est un outil bien pratique pour conceptualiser ce que nous sommes en train d'accomplir lorsque nous travaillons sur un problème de modélisation, et pour nous ce sera l'outil théorique principal. Dans cet article, nous nous réfère-

rons toujours à la figure 1 quand nous parlerons du cycle de modélisation.

Pour revenir à la question 1, les étapes du raisonnement énumérées ci-dessus pour y répondre correspondent essentiellement aux étapes du cycle de modélisation. On peut « incarner » le cycle général en un cycle particulier, cf. figure 2. Détaillons cette correspondance.

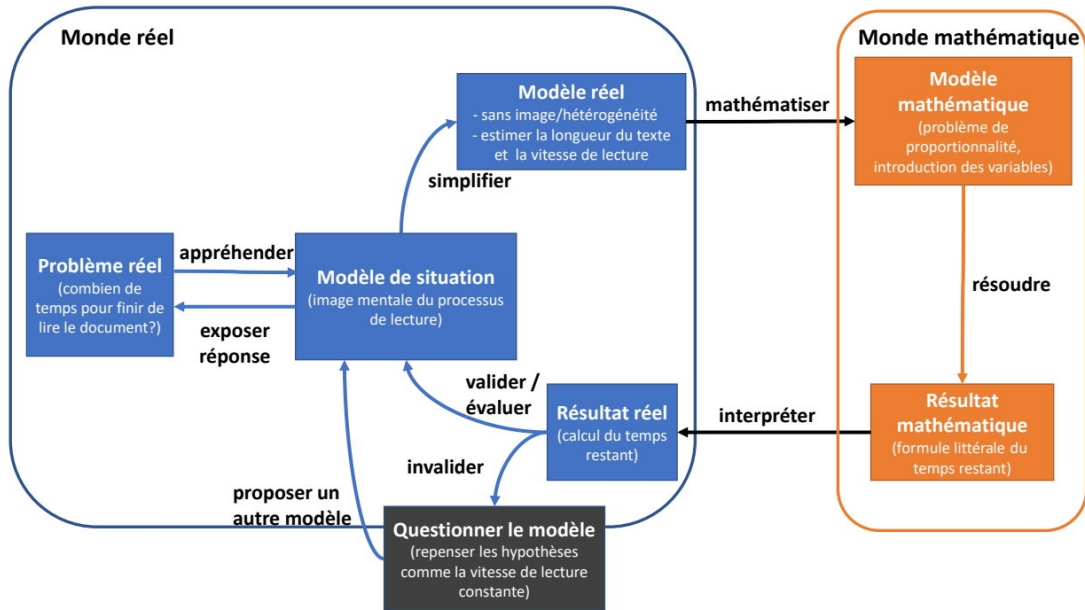


Figure 2 : Cycle de modélisation incarné pour l'exemple joué.

Appréhender

Dans l'exemple, cela correspond à « se faire une image mentale du processus de lecture de ce document ». On passe d'une situation problématique, représentée par une question, à la naissance d'un « modèle de situation » selon la terminologie de Niss et Blum (2020).

Simplifier

Dans l'exemple, cela correspond à « négliger les images, les rêveries, on voit le texte de façon homogène, et percevoir que la longueur du texte et le temps mis pour le lire sont des quantités importantes » et aussi à « estimer la proportion de texte déjà lue et le temps mis à le lire ».

Ainsi, on fait déjà des hypothèses qui sont simplificatrices (la vitesse de lecture est constante et seule la lecture du texte compte), structurantes (la constance de la vitesse de lecture implique une structure de proportionnalité) et on sélectionne des données (la propor-

tion de texte déjà lue et le temps mis pour le lire) en lien avec les variables perçues comme importantes.

Il s'agit d'une sorte de prétraitement de la situation qui la rend plus abstraite et prête à être mathématisée, et qui contient souvent déjà en germe une méthode de résolution mathématique : ici, le fait de savoir que l'on peut s'appuyer sur une résolution mathématique d'une situation de proportionnalité est sans doute décisif pour s'engager dans cette voie. On passe d'un « modèle de situation » à un « modèle réel » selon la terminologie de Niss et Blum (2020).

Mathématiser

Dans l'exemple, la mathématisation correspond à représenter le problème comme un problème de proportionnalité. On arrive à un modèle mathématique, que l'on pourrait simplement représenter par le tableau de proportionnalité suivant :

Temps (en minutes)	t_{deb}	t_{tot}
Texte (en pourcentage)	p_{deb}	1

où on a introduit des notations représentant le temps t_{deb} mis pour lire une proportion p_{deb} du texte et le temps t_{tot} que l'on mettra pour lire tout le texte. L'inconnue est $t_{tot} - t_{deb}$. On passe d'un « modèle réel » à un « modèle mathématique » dans lequel la question initiale devient un problème mathématique.

Résoudre mathématiquement

On applique la règle de proportionnalité :

$$t_{tot} = \frac{t_{deb} \times 1}{p_{deb}}$$

et on effectue le calcul à l'aide des données. On en déduit le temps restant $t_{tot} - t_{deb}$.

La mathématisation est ici automatisée (passage du tableau de proportionnalité à la formule), mais selon les circonstances, le travail mathématique peut être beaucoup plus consistant. On résout, à l'intérieur des maths, un problème mathématique, pour obtenir un « résultat mathématique ».

Interpréter

Dans l'exemple, cela consiste à « énoncer le résultat avec les bonnes unités, en reprenant les termes de la question initiale ». Ce faisant, on évoque une image mentale de ce que signifie ce résultat par rapport à la question initiale. On passe d'un résultat mathématique à un résultat réel.

Valider et évaluer

La validation vise à répondre à une question binaire : est-ce qu'on peut raisonnablement conserver le modèle, ou bien faut-il le jeter à la poubelle ?

Pour valider un modèle, on peut imaginer principalement deux méthodes. La première consiste à tester la cohérence avec des données empiriques issues d'expériences indépendantes de celles qui ont éventuellement servi à construire le modèle. On pourrait parler de « cohérence empirique ». La seconde consiste à tester la cohérence avec d'autres modèles déjà validés. On pourrait parler de « cohérence théorique ».

En dernière analyse, dans cette acceptation, la validation d'un modèle s'appuie donc sur une validation empirique, éventuellement de manière indirecte. On pourrait aussi parler de non-réfutation au lieu de validation, pour faire référence au fait qu'un modèle est en général validé jusqu'à ce qu'on découvre des conditions le mettant en défaut. Il est donc important d'avoir la mémoire des conditions de sa validation.

Dans l'exemple, l'étape de validation correspond à « juger le résultat obtenu : l'ordre de grandeur obtenu paraît-il vraisemblable ? On pourrait lire une page supplémentaire en se chronométrant et voir si le rythme est cohérent avec notre estimation ». En l'absence de données contre lesquelles tester notre modèle, on utilise notre bon sens pour juger de l'aspect vraisemblable de l'ordre de grandeur du résultat. Mais on peut aussi effectuer une expérience (lire une page supplémentaire) pour vérifier si notre modèle est cohérent (notamment l'hypothèse de vitesse constante).

L'évaluation vise en général à quantifier la performance du modèle, ou à la qualifier de manière plus précise que l'étape binaire de validation. Cette étape n'a de sens que si le modèle est « validé », i.e. qu'il n'est pas écarté lors de l'étape de validation. Cela peut être réalisé en comparant le modèle à d'autres modèles existants, selon un critère explicite.

**UN PARCOURS DE MODÉLISATION
AU LYCÉE**

La phrase « On pourrait essayer d'en déduire une incertitude sur notre prévision », est également à rapprocher d'une évaluation de notre modèle : elle juge quantitativement le pouvoir prédictif de notre modèle et pourrait permettre de lui adjoindre une notion d'incertitude.

Enfin, la phrase « réfléchir si on pourrait affiner notre point de vue » dans l'exemple ci-dessus correspond à une réflexion préliminaire à une nouvelle modélisation, modifiant ou raffinant le premier modèle (voire le changeant complètement).

Exposer

Dans l'exemple, cela correspond à « fournir une conclusion de l'ensemble du travail ci-dessus », en incluant toutes les étapes, notamment les réflexions sur les hypothèses effectuées, les limites du modèle et les axes à améliorer. Il est important de noter que la conclusion doit être plus riche qu'une simple réponse numérique, aussi précise soit-elle.

2. – Objectifs d'enseignement

Le contenu d'apprentissage visé est avant tout une *compréhension personnelle de ce qu'est un modèle mathématique*. On peut structurer cette compréhension en quatre blocs.

- la *connaissance du cycle* (ou *des cycles*) *de modélisation*, son usage théorique pour se guider dans la résolution d'une tâche de modélisation, la confrontation pratique à chacune de ses étapes dans différentes incarnations, comme dans l'exemple ci-dessus ;
- la capacité à *hiérarchiser les hypothèses de modélisation* (par exemple, dans l'exemple ci-dessus, importance de l'hypothèse de vitesse de lecture constante vs ignorer le temps de lecture des images) ;
- la compréhension du *rôle crucial des contraintes*, notamment :

- contraintes matérielles (moyens de calcul, modèles réduits, disponibilité des données),
- contraintes temporelles,
- contraintes de connaissances mathématiques (un problème de dilution ne sera pas abordé de la même manière selon que l'élève connaît ou non les équations différentielles ordinaires).

La connaissance de *différentes sources d'approximation* et la capacité à les comparer (dans l'exemple ci-dessus, les données de temps écoulé depuis le début de la lecture et de proportion du texte lue sont estimées avec certaines approximations, mais d'autres approximations peuvent apparaître dans les calculs, notamment les arrondis en calcul approché).

3. – Caractéristiques d'un parcours

Un parcours de modélisation est constitué d'un document de présentation du parcours et d'une suite cohérente de situations de modélisation. Cette cohérence signifie qu'on s'est efforcé de respecter les contraintes suivantes :

- un parcours doit permettre d'aborder *tous les objectifs d'apprentissage du paragraphe 3* ;
- dans un parcours, il y a une *progression bien identifiée concernant la mise en place des notions essentielles de modélisation* et la façon dont les élèves sont mis au contact de ces notions, de manière implicite et explicite ;
- un parcours possède aussi une *cohérence en termes de contenu à modéliser*. Même si des objets mathématiques semblables peuvent apparaître dans les différentes situations d'un même parcours, l'idée est plutôt d'utiliser une cohérence en termes de modèles « pré-mathématiques », c'est à dire de modèles de situation ou de modèles réels, selon la terminologie de la section 1. Par exemple, le parcours « Mesurer, remplir » concerne des problèmes liés à la mesure d'une surface et

aux empilements compacts. Le thème commun est le problème de remplir (ou de recouvrir) un objet géométrique à l'aide d'un ou de plusieurs autres. L'hypothèse est que cela permet de montrer aux élèves que certaines connaissances intra-mathématiques ou certaines habitudes de mathématisation peuvent être réinvesties d'un problème à l'autre lorsque les problèmes ont un même thème pré-mathématique.

On peut aussi envisager un parcours comme une ossature sur laquelle pourraient se greffer diverses tâches permettant d'aller dans deux directions. D'abord, les activités proposées sont une occasion de travailler certains aspects précis en fonction de l'observation par l'enseignant·e de certains manques chez les élèves, ces manques pouvant se situer à tous les niveaux du cycle. Dans un deuxième temps, l'enseignant·e pourrait approfondir certaines notions, en classe entière (*cf.* l'exemple du DM pour traiter le cas compact dans l'activité « Ping-Pong » du parcours « Mesurer, remplir ») ou pour certain·es élèves seulement (par exemple dans l'optique de la préparation au grand oral en terminale).

Concrètement, vous trouverez sur le site web⁴ de l'IREMI de Grenoble :

- un document de présentation générale de ce qu'est un parcours de modélisation,
- un document de présentation du parcours (pour l'instant uniquement le parcours « Mesurer, remplir »),
- pour chaque situation de modélisation, une fiche de présentation de l'activité à destination des enseignant·es, qui contient notamment l'énoncé de la situation, les objectifs, une ou plusieurs solutions envisageables, des observations et des approfondissements possibles.

⁴ <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/analyse-et-modelisation-au-lycee/parcours-de-modelisation-mesurer-remplir--1280942.kjsp>

4. – Organisation des séances

Un certain nombre d'indications précises sont données spécifiquement dans chaque fiche d'activité. Le schéma général est classique⁵ :

1. mise en activité des élèves,
2. retours des élèves, qui présentent leurs réponses,
3. synthèse de l'enseignant·e et trace écrite.

Néanmoins, certains choix devront être faits par l'enseignant·e. Il est parfois judicieux (ou inévitable) d'étaler l'activité sur plusieurs séances.

Pour les retours des élèves, nous avons expérimenté des retours de différents types, dépendant en grande partie du planning et du matériel disponible : compte-rendu sur papier à rédiger pendant la séance, audio à enregistrer entre deux séances et à déposer sur l'ENT, mini-exposé à préparer d'une séance sur l'autre, trace à écrire sur un tableau (dans une salle comportant 4 tableaux, divisés en deux) accompagnée d'une présentation orale succincte à la fin de la séance orchestrée par l'enseignante. Cette dernière solution est très intéressante, mais nécessite beaucoup de tableaux.

Pour la synthèse de l'enseignant·e et la trace, plusieurs modalités seront proposées, en fonction de la tâche, des objectifs et du temps disponible :

- trace écrite (en classe) de la résolution du modèle mathématique choisi,
- projection au tableau d'un cycle à remplir par les élèves,
- synthèse orale des objectifs d'apprentissages liés à la modélisation (et écrite si le temps le permet),
- trace écrite de fin de parcours réalisée par l'enseignant·e et déposée ensuite sur

⁵ Il peut être pertinent de boucler plusieurs fois sur les deux premières étapes.

**UN PARCOURS DE MODÉLISATION
AU LYCÉE**

l'ENT ; cette trace contiendrait des images de travaux d'élèves et la synthèse des discussions sur la modélisation.

Enfin, concernant l'évaluation du travail des élèves, on peut envisager notamment d'évaluer le travail en séance et le compte-rendu de chaque groupe, d'évaluer des travaux à rendre d'une séance sur l'autre, ou d'évaluer en fin de parcours l'ensemble des acquis. Les deux premières évaluations sont de nature formative ; le cas échéant on pourrait proposer aux élèves des bonus de participation/implication pour leur note finale. La dernière évaluation serait plutôt de nature sommative, vous en trouverez un exemple dans l'annexe 3, pour le parcours « Mesurer, remplir ».

5. – L'exemple du parcours « *Mesurer, remplir* »

5.1. - Description

Le parcours de modélisation intitulé « Mesurer, remplir » réunit trois situations de modélisation autour de notions de géométrie (surfaces et volumes, empilements) et d'analyse (encadrement, optimisation). Même si les thématiques de géométrie sont moins présentes au lycée aujourd'hui que par le passé, ce parcours est une occasion de mobiliser des connaissances abordées à plusieurs reprises au collège pour les transférer à des problèmes où l'objectif principal d'apprentissage est la modélisation. Cette familiarité avec la géométrie contribue, à notre avis, à la facilitation de la dévolution dans l'apprentissage des notions de modélisation. Si l'activité « Ping-pong » est réalisée en terminale, le cas compact 3D de l'activité « Ping-pong » s'accorde bien avec le programme de géométrie dans l'espace (orthogonalité et calcul de distances). D'autres objectifs d'apprentissage secondaires concernent la notion d'intervalle ainsi que des notions

d'optimisation retrouvées tout au long du parcours.

Les tâches proposées et leur ordre ont une cohérence par rapport aux différents objectifs d'apprentissage : le cycle de modélisation, l'encadrement en utilisant un intervalle, l'optimisation de cet intervalle, le calcul du nombre d'objets empilés. Par la suite, nous résumons les différentes situations, dont vous pouvez trouver les énoncés dans l'annexe 1.

Superficie d'une île

À partir d'une photo aérienne d'une île, on cherche à calculer un intervalle qui encadre sa surface. On introduit ainsi les notions de borne inférieure et borne supérieure, la modélisation d'un objet réel par des objets mathématiques connus (polygones), l'optimisation par augmentation de la résolution, ainsi qu'un premier cycle simplifié entièrement présenté par l'enseignant·e.

Durée : 65-75 minutes.

Matériel : impressions de la photo aérienne de l'île, règle, compas.

Déménagement

Afin d'optimiser l'espace utilisé dans un camion, on demande de choisir entre deux formats de cartons. Ici, les élèves s'exercent aux empilements et aux arguments qui justifient l'optimalité ou la non-optimalité d'une configuration. Côté modélisation, on demande aux apprenant·es de participer à la construction d'un cycle de modélisation de même complexité que le premier. Cette situation prépare les élèves pour les empilements plus complexes de l'activité suivante.

Durée : 80-90 minutes.

Pas de matériel spécial indispensable.

Ping-pong

On voudrait connaître le nombre maximal de balles de ping-pong que l'on peut mettre dans la salle de classe. Il s'agit d'un problème d'empilement de sphères pour lequel on demande explicitement un résultat sous forme d'intervalle. Cette situation comprend aussi un test sur un modèle réduit (des balles en cellulose et des boîtes de chaussures) et la discussion de l'effet de bord déjà rencontré lors de la situation précédente. Le dernier cycle de modélisation est projeté avec les cases vides et les élèves doivent le remplir.

Durée : environ 1 h 45.

Matériel : des boîtes et des balles pour le test, disponibles à l'IREMI de Grenoble et à Chamonix⁶.

Enfin, en guise d'évaluation sommative, nous proposons une situation de modélisation guidée dont l'énoncé figure à l'annexe 3. La situation elle-même est empruntée à Niss et Blum (2020) et est, du point de vue du contenu mathématique, assez similaire à la dernière tâche de modélisation (« Ping-pong »). Elle permet aussi d'évaluer des aspects liés à la modélisation : comparaison de modèles, limitations, simplifications, notion de borne supérieure et inférieure, effet de bord, cycle de modélisation. Nous avons fait le choix des calculs guidés dans les questions de résolution mathématique, d'autres choix sont évidemment possibles.

Pour illustrer nos propos, on trouvera dans l'annexe 2 quelques extraits de travaux d'élèves et des éléments de synthèse pour la situation « Superficie d'une île ». Pour une présentation beaucoup plus détaillée de chaque

activité, nous renvoyons aux fiches présentes sur le site web du groupe.

5.2. - Approfondissements

Toutes les activités du parcours peuvent être traitées à des degrés divers de profondeur. Elles peuvent sans doute toutes être abordées au collège, mais également mener à des approfondissements allant au-delà du niveau lycée, susceptibles de fournir des pistes pour le grand oral. Citons notamment :

- formule de l'aire d'un polygone à partir de ses coordonnées cartésiennes et mesures d'aires sur la sphère pour l'activité « Superficie d'une île »,
- travail algorithmique et classe de problèmes NP-durs pour l'activité « Déménagement »,
- démonstration de l'optimalité du cas compact en 2D et conjecture de Kepler en 3D pour l'activité « Ping-pong ».

5.3. - Observations et difficultés, des élèves ou des enseignant·es

On trouvera des détails de nos observations dans chaque fiche d'accompagnement des activités. Mentionnons toutefois quelques principes généraux.

Des élèves peuvent être dérouté·es par la forme ouverte des activités : il n'y a en général pas « une unique méthode à appliquer », il y a des hypothèses à faire, et les modèles proposés peuvent être invalidés, ce qui donnerait pour certains l'impression d'un travail inutile. En général, le format du travail en groupe permet d'atténuer ces difficultés.

Il peut arriver que certaines connaissances extra-mathématiques aident certain·es élèves pour certaines activités. Plutôt que de voir cela comme une « injustice », on peut souligner le fait que cela contribue à la richesse du groupe.

⁶ N'hésitez pas à nous contacter pour avoir des précisions sur le choix des boîtes et des balles, si vous souhaitez reproduire le matériel vous-même.

**UN PARCOURS DE MODÉLISATION
AU LYCÉE**

La phase de formalisation mathématique est rarement un succès de manière uniforme. Il ne faut pas hésiter à souligner en quoi la formalisation a un intérêt (par exemple, ce qu'une formule littérale « raconte », en termes de sens de variation d'une grandeur en fonction d'une autre).

La création d'un cycle n'a rien de naturel pour les élèves au début, parfois cela est même considéré comme trop abstrait ; l'apprentissage devrait être graduel et les élèves devraient avoir l'occasion de réfléchir par eux ou elles-mêmes aux incarnations des cycles après un premier exemple fourni.

Enfin, la très grande majorité des élèves sont motivé·es par la forme des activités de modélisation que nous leur avons proposées. Il peut arriver néanmoins que « faire des maths » à partir de problèmes concrets ne semble pas être du goût de certain·es. Il est utile alors d'engager la discussion avec ces élèves afin de leur faire prendre conscience des multiples facettes que revêt l'activité mathématique dans la société (cf. Niss, 1994).

Concernant les enseignant·es, il y a souvent une part d'imprévu quand on propose des activités ouvertes, plus importante que pour des activités plus classiques (notamment sur la gestion du temps). Le fait qu'il n'y ait pas d'outil mathématique prescrit *a priori* est important pour que les élèves aient des décisions à prendre, y compris dans le choix des mathématiques employées. Mais cela ajoute une tension avec un autre objectif très présent pour les enseignant·es : « finir le programme ». On peut légitimement souhaiter rendre compatible le programme et l'objectif d'initier les élèves à une modélisation, mais il faut être conscient·e qu'en général, cela passe par une restriction de la liberté dans la modélisation, qui va souvent de pair avec une situation moins « authentique », moins proche du réel. C'est à chaque enseignant·e de décider où il ou elle place le

curseur. Un point à noter est le suivant : plus les situations sont « authentiques », plus il est difficile pour l'élève de franchir les étapes allant de la situation problématique au modèle mathématique. Dans ce cas, ce sont souvent les outils mathématiques les mieux maîtrisés par l'élève qui seront envisagés, et cela influera sur toute cette phase de simplification/modélisation.

Conclusion et perspectives

Notre proposition de parcours de modélisation cherche à concilier les quatre objectifs mentionnés dans l'introduction : questionner la place des mathématiques dans les sciences, questionner la place des mathématiques dans la société, susciter motivation et créativité chez les élèves et enfin s'appropriier quelques contraintes institutionnelles. Chacun·e pourra bien sûr s'en emparer comme il ou elle le souhaite.

Il ne faudrait pas que la liste de difficultés énumérées au paragraphe 5.3 vous dissuade de vous lancer : l'expérience est toujours enrichissante, et l'enthousiasme des élèves très gratifiant, même si la première fois est un peu bancale. Se lancer à plusieurs enseignant·es aide à franchir le pas et à s'améliorer, surtout si certains enseignant·es peuvent jouer le rôle d'observateur dans les séances orchestrées par les autres. Nous vous invitons d'ailleurs à partager vos expériences de modélisation avec nous, que ce soient vos propres sujets ou les nôtres que vous auriez expérimentés.

Enfin, nous prévoyons dans un avenir proche de construire un nouveau parcours autour des notions de « variation, évolution » et qui serait proche mathématiquement des notions d'analyse du programme du lycée (fonctions, suites, équations différentielles).

Raphaël ROSSIGNOL

Institut Fourier, CNRS, Univ. Grenoble Alpes
IREMI de Grenoble

Iulia TUNARU

Université Grenoble Alpes
IREMI de Grenoble

Références bibliographiques

Niss, M. & Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. Routledge.

Borromeo Ferri, R. (2017). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer.

Chevallard, Y. (2020). Assumer un changement civilisationnel : pacte scolaire et mathématiques. *Éducation et didactique [En ligne]*, 75-90.

Niss, M. (1994). Mathematics in society. Dans R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (dir.) *The Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (p. 367-378). Kluwer.

Starfield, A.M., Smith, K., Bleloch, A.L. (1993). *How to Model It: Problem Solving for the Computer Age*. McGraw-Hill, Inc., USA.

Annexes**Annexe 1 – Énoncés des situations du parcours « Mesurer, remplir »**

Les durées mentionnées dans les énoncés sont données à titre indicatif.

Superficie d'une île*Partie A*

Individuellement, donner une approximation de la superficie de l'île dont voici une photographie aérienne. Vous pouvez négliger les parties submergées et les plages (2 minutes).



Photographie aérienne de l'île.

Note pour les enseignant·es : il s'agit de l'île d'Aix.

Partie B

Par groupes de 3 ou 4, donner un encadrement le plus précis possible de la superficie de l'île (un encadrement consiste à chercher une valeur inférieure et une valeur supérieure à la superficie).

Un compte rendu par groupe est attendu. Il devrait contenir la description de la méthode, les constructions réalisées et les calculs (30 minutes).

Déménagement

Malika et sa famille déménagent et ont à leur disposition un camion de dimensions $4\text{ m} \times 2\text{ m} \times 2\text{ m}$ ainsi que des cartons de deux tailles différentes (petits ou grands). Les dimensions de ces cartons sont indiquées dans le tableau ci-dessous. Ils doivent choisir UNE SEULE taille de cartons et ils souhaitent remplir au maximum le camion. Quel type de carton leur conseillerez-vous ?

Rendu : hypothèses faites, description de votre raisonnement (phrases et dessins), calculs (45 min).

Taille du carton	Longueur	Largeur	Hauteur
Petit	0,4 m	0,3 m	0,3 m
Grand	0,5 m	0,5 m	0,75 m

Ping-pong

Vous avez 5 minutes pour donner une estimation du nombre maximal de balles de ping-pong que l'on peut mettre dans la salle de classe. Voici une balle.

Durée : 15 minutes dont 5-7 minutes de mise en commun.

Matériel : crayon, papier, calculatrice.

Donner une balle ou donner le diamètre d'une balle (4 cm).

Mise en commun :

- Recueillir des réponses au tableau en les regroupant par ordre de grandeur (puissances de 10). Faire voter les élèves par comptage des voix.
- Demander à un ou deux élèves d'expliquer la méthode adoptée.
- Si certains n'ont pas trouvé de réponse par le calcul, on peut leur demander de donner une réponse intuitive.

En fin de phase 1, souligner qu'il est impossible de départager les réponses. Dans la suite, nous allons imposer deux contraintes : il faudra que les élèves donnent comme réponse un intervalle plutôt qu'un nombre unique (idée d'incertitude) et qu'ils valident leur méthode sur les modèles réduits. Avant de projeter la consigne de la phase suivante, si possible, faire verbaliser le protocole de test (utilisation des boîtes pour les modèles réduits).

Pour préparer la phase 2, on peut aussi élargir la discussion pour mettre en évidence deux notions clés de la modélisation :

**UN PARCOURS DE MODÉLISATION
AU LYCÉE**

- la difficulté de savoir qui a raison (i.e. **la validité du modèle**),
- est-ce que les réponses sont proches ou non de la réalité (i.e. **l'évaluation du modèle**).

Les balles ont un diamètre de 4 cm.

On note N le nombre maximal de balles que peut contenir la salle.

Donner un intervalle de sûreté pour N , c'est-à-dire un intervalle $[a; b]$ dont on est sûr qu'il contient N . Les critères à prendre en compte sont :

- critère de validation du modèle : votre méthode pour trouver un intervalle de sûreté devra être testée avec une boîte et des balles test (et le test devra réussir),
- critère d'évaluation du modèle : $\frac{b-a}{a}$ devra être le plus petit possible.

Rendu : résoudre la question sur une feuille et remplir la colonne du tableau des résultats.

Durée : environ 1 h 30 :

- 5 minutes : énoncé ;
- 45 minutes -1 heure : recherche en groupe ;
- 15 minutes -25 minutes : mise en commun (correction et synthèse).

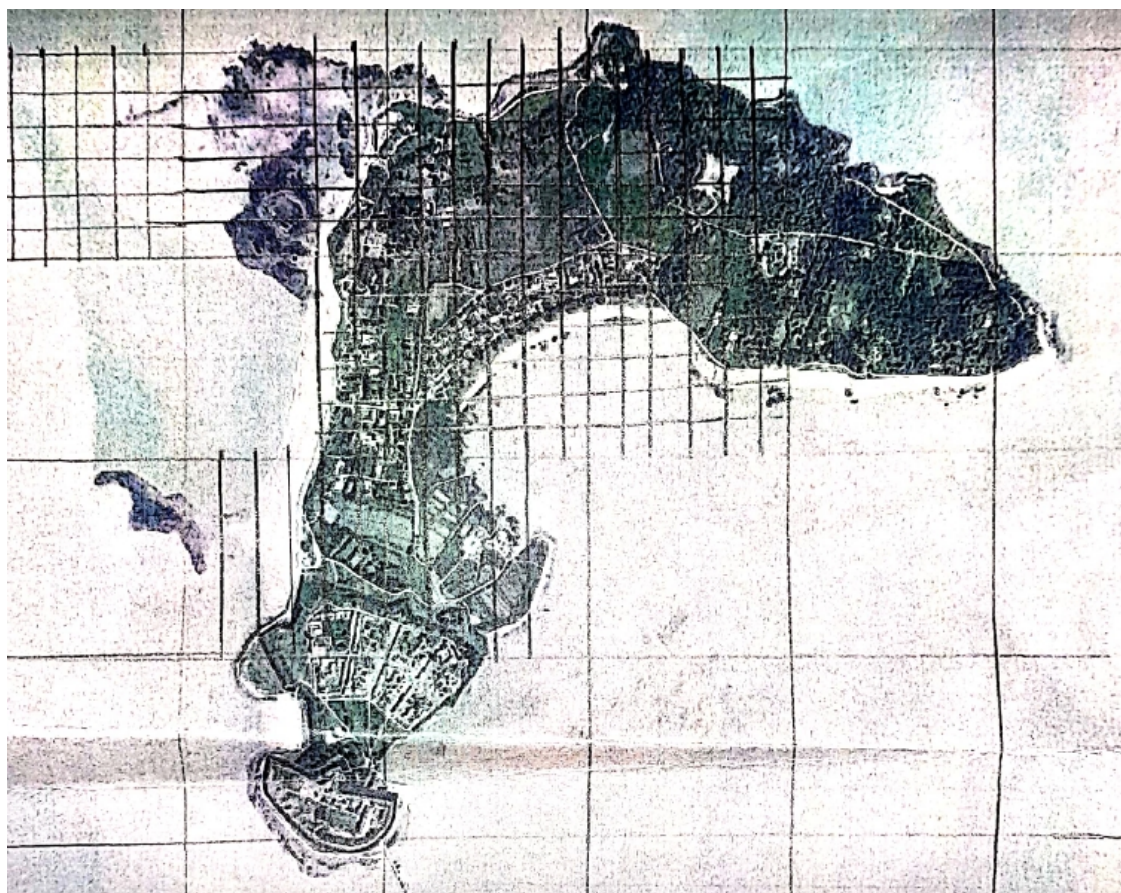
Matériel : boîtes et balles disponibles pour le test.

Annexe 2 – Quelques détails pour la superficie d’une île

Deux constructions possibles

À l’issue de la partie B (*cf.* annexe 1), les travaux d’élèves font la plupart du temps apparaître deux types de constructions possibles, reproduites ci-dessous.

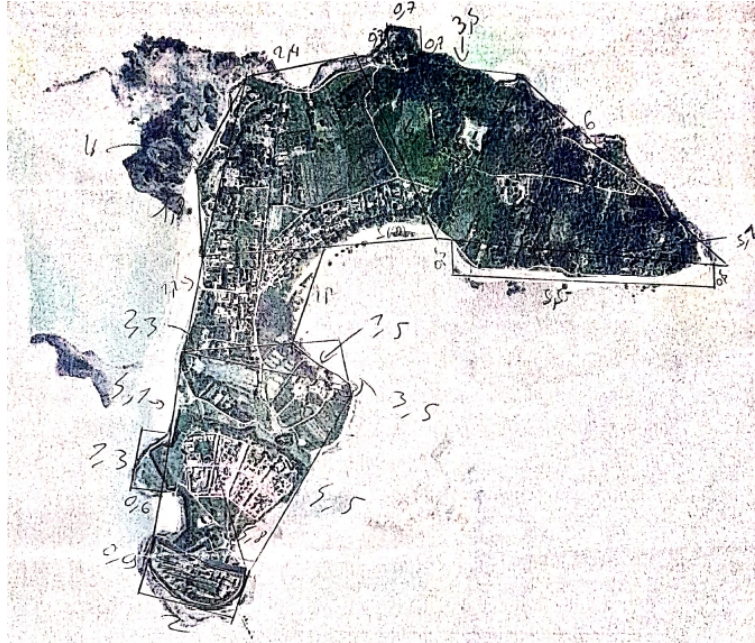
1. Encadrement donné à partir d’un quadrillage par comptage de carreaux



Les élèves comptent le nombre de carreaux entièrement inclus dans l’île pour obtenir une borne inférieure, et le nombre de carreaux permettant de recouvrir entièrement l’île pour obtenir une borne supérieure.

**UN PARCOURS DE MODÉLISATION
AU LYCÉE**

2. Calcul d'une valeur supérieure et d'une valeur inférieure à partir de deux constructions (une par l'extérieur, l'autre par l'intérieur).



Les élèves utilisent des formes dont ils connaissent une formule de l'aire (rectangles, triangles, trapèzes) afin d'obtenir une borne supérieure (première figure) et inférieure (deuxième figure).

Éléments de synthèse

Après la présentation par les élèves de leurs résultats et raisonnements, l'enseignant·e reprend la main pour faire une synthèse du travail réalisé. Voici quelques éléments pour guider ce travail de synthèse.

1. Qu'a-t-il fallu faire pour proposer un résultat ?

Pour approximer la superficie de l'île, nous avons dû transformer un problème concret en un problème mathématique à travers un *modèle mathématique*, dans notre cas des figures géométriques dont on sait calculer l'aire. Plusieurs modèles sont possibles, chacun peut choisir le découpage géométrique qu'il souhaite.

2. Quelle est la différence entre les approches des parties A et B ?

Le choix du modèle dépend des *contraintes*. Ici, le temps nous impose un modèle plus ou moins grossier. D'autres contraintes peuvent exister pour le choix d'un modèle : le coût, les outils à disposition...

3. Comment estimer la qualité des résultats obtenus ?

D'abord, avoir un *encadrement* est un résultat plus riche en information qu'une simple valeur approximative. Toutefois un encadrement est différent de l'intervalle d'incertitude associé à une valeur approximative.

On peut aussi réfléchir à la cohérence des réponses entre les parties A et B, ensuite entre différents modèles (des pairs ou avec un logiciel) ainsi que valider la méthode de découpage sur des figures d'aires connues. Ceci est une étape de *validation* du modèle choisi.

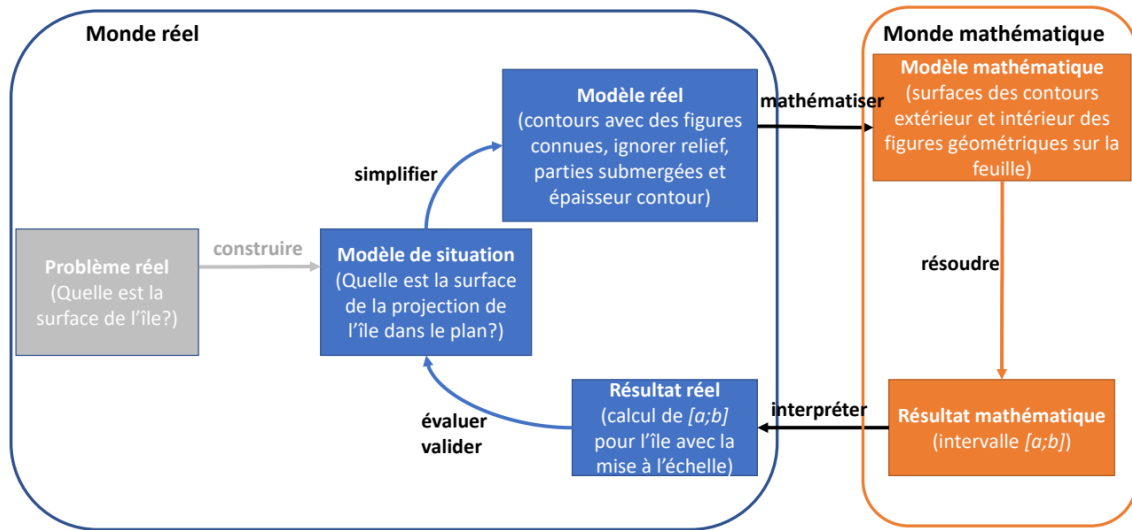
Enfin, on peut prendre comme critère d'*évaluation* de la qualité du modèle la différence entre la valeur supérieure et la valeur inférieure rapportée à une des bornes pour avoir une valeur relative.

4. Que peut-on dire des erreurs commises ?

On distinguera les erreurs dues au tracé de la grille et aux imprécisions de mesures et les erreurs dues à ce qui manque ou est en trop par rapport à la réalité.

On peut résumer le travail sous forme de cycle de modélisation.

UN PARCOURS DE MODÉLISATION
AU LYCÉE



Cycle de modélisation pour l'île.

Annexe 3 – Évaluation sommative pour le parcours « *Mesurer, remplir* »


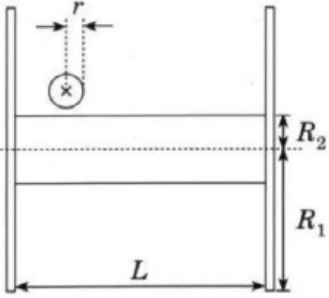
	
<p>Quelle est la longueur du câble de rayon r qu'on peut enrouler sur le touret ci-dessus de façon que le câble ne dépasse pas les bases du touret?</p>	
<p>Mesures: $L = 4.4 \text{ m}$ $R_1 = 2.5 \text{ m}$ $R_2 = 60 \text{ cm}$ $r = 15 \text{ cm}$</p>	<p>Attention, le diagramme ci-dessus n'est pas à l'échelle en ce qui concerne la section du câble.</p>

Figure A3.1 : Situation de modélisation empruntée à Niss et Blum (2020) et utilisée pour l'évaluation sommative.

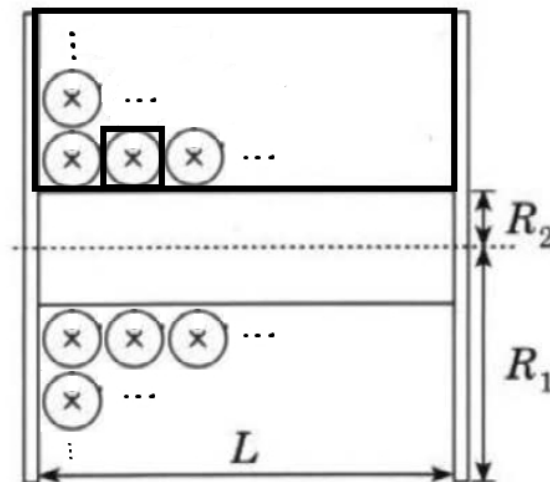


Figure A3.2 : Section verticale du système touret-câble, vue du dos du camion.

Deux modèles M1 et M2 sont proposés pour répondre à la question. Compléter les **calculs littéraires** et répondre aux questions dans les espaces prévus. On rappelle que la formule pour la circonférence d'un cercle de rayon r est $2\pi r$.

 UN PARCOURS DE MODÉLISATION
 AU LYCÉE

1. Le modèle M1 consiste à considérer qu'on peut enrouler le câble en utilisant des anneaux concentriques indépendants dont la section est montrée dans la figure (une autre façon de voir est de s'imaginer qu'on peut couper le câble et recommencer). On a donc le même nombre d'anneaux à chaque étage, mais plus l'étage est éloigné du centre, plus l'anneau est grand. On suppose que le câble est suffisamment flexible pour s'enrouler parfaitement autour du touret.

On calcule alors le nombre d'anneaux par étage $n = \frac{L}{\dots}$ et le nombre d'étages comme $e = \frac{\dots}{2r}$. On prend la partie entière de ces résultats et on obtient $n = 14$ anneaux par étage et $e = 6$ étages d'anneaux, donc 84 au total.

En prenant comme rayon de chaque anneau la distance entre l'axe central du touret (en pointillés) et le milieu du câble, on obtient que le rayon des anneaux du premier étage est $R_2 + r$, le rayon des anneaux du 2^e étage est ... et ainsi de suite, le rayon des anneaux du 6^e étage est ...

En utilisant la circonférence de chaque anneau, la longueur totale du câble est :
 $L_1 = \dots \approx 792 \text{ m}$.

2. Un autre calcul du nombre total d'anneaux est : la partie entière du quotient de la surface du rectangle surligné par celle du carré circonscrit à la section du câble (cf. figure A3.2) :

$$\left\lfloor \frac{L(R_1 - R_2)}{4r^2} \right\rfloor = 92.$$

Entre 84 (question 1) et 92 (question 2), quelle réponse choisiriez-vous et pourquoi ?

Connaissez-vous un terme pour le phénomène qui expliquerait cette différence ?

3. Dans le modèle M2, on considère que le câble remplit complètement le volume autour du touret, donc la longueur du câble est le volume disponible $V = \pi R_1^2 L - \dots$ divisé par la surface de la section du câble $S = \pi r^2$, donc $L_2 = \frac{V}{S}$ (pas besoin de calculer la valeur numérique).

La valeur L_2 ainsi obtenue est-elle une borne pour la longueur réelle du câble ?

Si oui, quel type de borne (inférieure/supérieure) ? Sinon, justifier.

4. Quels seraient les avantages et limites de ces deux modèles ?

5. Auriez-vous d'autres modèles à proposer (avec une phrase et/ou un dessin) ?

6. Faire un cycle de modélisation pour le modèle M1.