
CONSTRUCTION DU CERCLE OSCULATEUR AVEC UNE VISION LOCALE À L'AIDE DE LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

Giscard NGUEMBOU NANA¹

Résumé. Cette étude, assise sur le *Teachning Experiment* comme technique de collecte de données, propose une approche permettant de rendre opérationnelle dans un environnement de géométrie dynamique, la définition qui présente le cercle osculateur comme étant une limite. Elle montre comment le lycéen peut construire un représentant du point de tangence en articulant une vision dynamique avec une vision statique de la limite. L'étude prend appui sur la théorie de la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance pour montrer comment dans l'action, cette construction peut être un instrument susceptible de faire évoluer la conception point d'intersection simple vers la conception point d'intersection multiple chez le lycéen, en vue de lui faire appréhender le cercle osculateur avec une vision locale.

Introduction

Dans l'enseignement des mathématiques, la notion de point commun est utilisée pour faire travailler l'apprenant sur la notion de sécante et ensuite sur la notion de tangence. Ainsi, ce dernier a développé une première façon de penser la notion de point commun qui lui permet d'appréhender par exemple l'orthocentre ou le centre de gravité d'un triangle. Derrière cette première façon de penser cette notion, on retrouve la notion de point d'intersection simple. L'introduction de la notion de tangence ouvre une nouvelle façon de penser le point commun entant que, point d'intersection multiple. Cependant, dans les deux contextes, les deux types de points ont la même représentation dans le registre graphique de l'environnement papier-crayon. Il nous semble alors que l'absence d'outils permettant de faire la distinction entre les représentants des points d'intersection simple et d'intersection multiple, favorise faiblement chez le lycéen le passage de la notion de sécante vers la notion de tangente. Dans ce travail, nous cherchons entre autres, à proposer

une approche visant à favoriser chez le lycéen la transition sus-évoquée.

Lorsque le plus grand nombre de points d'intersection simples que forment une courbe et un cercle existe et est fini, nous proposons de le noter (p) et de dire que la courbe est à valeur de (p) finie. Par exemple, le plus grand nombre de points d'intersection simples que forme la courbe de la fonction carrée avec un cercle est fini et vaut quatre. Cette courbe est donc à valeur de (p) finie (Voir Figure 1). Nous portons à ce type de courbes un intérêt particulier, car ce contexte nous permettra de déterminer la valeur exacte de l'ordre de multiplicité du point de tangence liant le cercle osculateur avec une telle courbe à l'aide de la géométrie dynamique. Cela permet au lycéen de penser la notion de cercle osculateur à l'aide de la notion d'ordre de multiplicité du point de tangence dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique du logiciel GeoGebra.

¹ giscardnana@yahoo.fr

CONSTRUCTION DU CERCLE OSCULATEUR
AVEC UNE VISION LOCALE À L'AIDE DE LA
GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

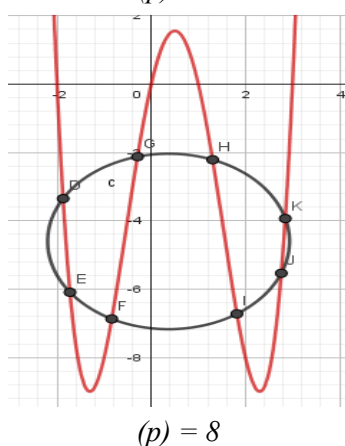
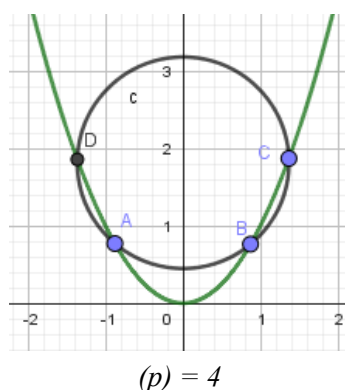


Figure 1: deux courbes à valeurs de (p) finie.

Pour la courbe de la fonction définie par $f(x) = x^2$, la valeur de $(p) = 4$ et pour la courbe de la fonction définie par $g(x) = x(x-1)(x+2)(x-3)$, la valeur de $(p) = 8$.

1. – Problématisation de l'objet de recherche

1.1. - Problématisation de l'objet de recherche

La notion de point commun occupe une place importante à la fois dans l'apprentissage des notions de sécante et de tangente au collège. Dans le manuel scolaire de classe quatrième, collection Savoirs, on peut lire : « on dit qu'une droite et un cercle sont sécants s'ils ont deux points communs » (Savoirs, p. 32).

Aussi, dans ce manuel scolaire, on peut lire : « une droite et un cercle sont tangents s'ils ont un seul point en commun » (Savoirs, p.32). Ces définitions illustrent bien la difficulté de passer de la notion de sécante à la notion de tangence lorsqu'on considère un point commun.

1.2. – Distinction entre un point d'intersection simple et un point d'intersection multiple

Avant d'aborder la notion de tangente, le lycéen a déjà développé une première façon de penser la notion de point commun dans le registre graphique. Elle lui permet, au cours de l'apprentissage de la notion de sécante de construire ou de reconnaître par exemple, le centre d'un carré, l'orthocentre ou le centre de gravité d'un triangle. Nous proposons de nommer cette manière de penser le point commun par : *conception point d'intersection simple*.

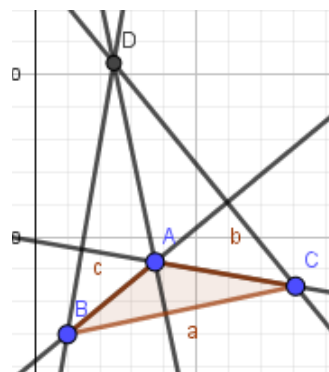


Figure 2: l'orthocentre D du triangle ABC est un point d'intersection simple, tout comme chaque sommet de ce triangle

Dans sa thèse de doctorat, Petitjean (1995) propose une compréhension de la notion de point d'intersection multiple. Elle est illustrée ci-dessous dans un registre graphique et est fondée sur le passage de la notion de sécante à la notion de tangence.

Chapitre 3. Théorie des points multiples

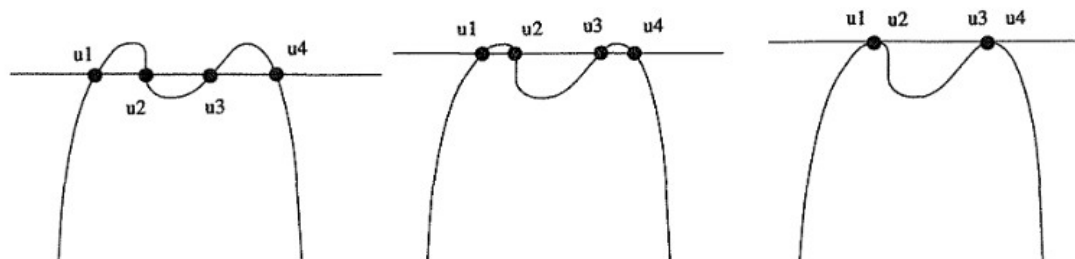


FIG. 3.2 - Déformation d'un point ordinaire d'ordre 4 en un point de type (2,2).

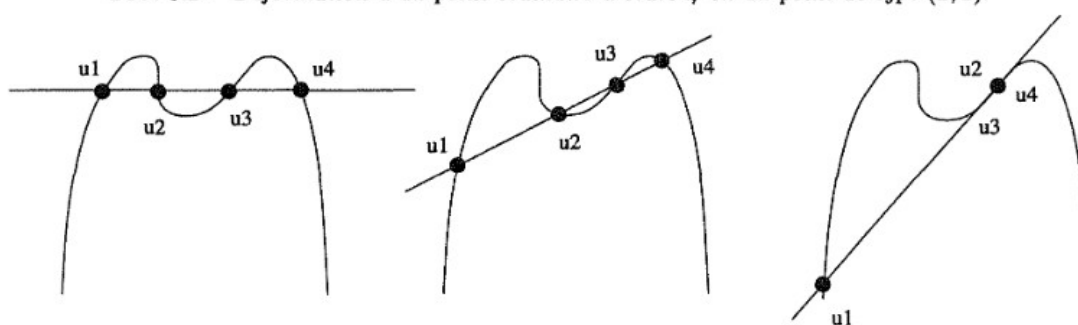


FIG. 3.3 - Déformation d'un point ordinaire d'ordre 4 en un point de type (1,3).

Figure 3: Illustrations faites par Petitjean dans sa thèse de doctorat (1995, p. 26).

Les illustrations ci-dessus montrent clairement que le représentant d'un point d'intersection multiple peut s'obtenir par une technique permettant de faire arriver à la position d'un point considéré, un ou plusieurs représentants de points d'intersection simples. Comme par exemple, dans la ligne 2, l'arrivée des représentants des points d'intersection simples à la position du point, change le statut de ce dernier. Il passe alors du statut d'un point d'intersection simple au statut de point d'intersection multiple. Le décompte des représentants de point d'intersection simples en position de superposition à cette position, permet de déterminer la valeur de l'ordre de multiplicité du point multiple dans ce registre de représentation. Ainsi, les transformations effectuées à la ligne 2 montrent comment à partir des points d'intersection simple on peut obtenir un point dont l'ordre de multiplicité est égal à 3. Le point multiple alors obtenu est un point de tangence. Nous proposons de nommer cette façon

de concevoir le point commun par : conception *point d'intersection multiple*. Seulement, le chercheur Petitjean ne propose pas une technique opérationnelle dans un registre graphique permettant le passage du statut de point d'intersection simple pour le statut de point d'intersection multiple. Comme nous le verrons ci-dessous, Nguembou-Nana (2022) propose une technique opérationnelle permettant le passage sus-évoqué à l'aide de la géométrie dynamique.

1.3. – Les difficultés de l'apprentissage de la notion de cercle osculateur liées à dualité de la limite

Nous allons d'abord commencer par présenter deux définitions du cercle osculateur rencontrées dans la littérature. Le *Dictionnaire de l'Académie française* huitième édition propose une définition du cercle osculateur :

« OSCULATEUR, TRICEOSCULATRICE. *adj. T. de Géométrie. Il se dit d'une Courbe, d'une surface d'une nature déterminée, qui a le contact d'ordre le plus élevé possible en un point d'une courbe donnée, d'une surface donnée. Cercle osculateur, sphère osculatrice* » (1935, p. 270)

Dans la suite nous allons définir le cercle osculateur, d'une part, avec une vision statique de la limite en nous appuyant sur Gergonne (1830), et d'autre part, avec une vision dynamique de la limite en prenant appui sur les travaux de d'Alembert.

Dans le cadre analytique, Gergonne (1830) propose une autre définition du cercle osculateur :

« Le cercle dont trois points se confondent avec trois points de la courbe en , aura, pour les coordonnées de son (x', y') centre [...] et pour son rayon (x', y') [...]. Ce cercle est ce qu'on appelle cercle osculateur à la courbe au point en ; son centre et son rayon sont dits le centre et le rayon de courbure de cette courbe en ce point » (Gergonne, 1830, p. 21)

Ce chercheur propose aussi des critères pour distinguer des courbes osculatrices de premier, deuxième, troisième et de quatrième ordre. Nous n'allons pas nous intéresser à cette distinction compte tenu du niveau de classe qui nous intéresse.

Notre définition du cercle osculateur suivant une vision statique de la limite

La définition proposée par Gergonne nous permet de formuler dans le cadre géométrique une définition du cercle osculateur qui nous semble accessible au lycéen : Soient (C) la courbe plane d'une fonction numérique, A un point de (C) , B et C deux points sur la courbe (C) situés de part et d'autre du point A .

Lorsque par une technique appropriée et dans un registre de représentation adéquat, on rapproche les représentants des points B et C vers le représentant du point A , jusqu'à la superposition desdits représentants, on rapproche ainsi le cercle circonscrit au triangle ABC vers un unique cercle (c) passant par le point A jusqu'à la superposition des représentants. Ce cercle (c) forme avec la courbe à la position du point A une intersection, dont l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à trois. Il est appelé cercle osculateur au point A à la courbe (C) de la fonction numérique. Nous allons convoquer cette définition pour inviter le lycéen à construire un représentant du cercle osculateur dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique, en le regardant comme une position limite au sens d'une position atteignable.

Le cercle osculateur appréhendé comme étant une position limite au sens d'une position inatteignable

Considérons un point A appartenant à la courbe (c) plane d'une fonction numérique, B et C deux points situés sur (c) de part et d'autre du point A . Par des techniques adéquates et dans un registre de représentation approprié, on peut faire converger les représentants des points B et C vers le représentant du point A jusqu'à leur superposition à la position du point A . De cette façon, on rapproche le représentant du cercle circonscrit au triangle ABC vers le représentant du cercle osculateur $AB_{n,m}C_{n,m}$ (lorsqu'il existe) jusqu'à leur superposition.

Nous pouvons par exemple procéder au rapprochement sus-décrit dans le registre analytique grâce à la technique suivante : en désignant par n le $n^{\text{ième}}$ rapprochement des représentants des points B et C vers la position du point A , par $B_{n,m}$ et $C_{n,m}$ les positions occupées par les points B et C au cours de ce $n^{\text{ième}}$ rapprochement.

Et poser : $x(B_{n,m}) = \frac{n}{m} - 1 + x(A)$;
 $y(B_{n,m}) = f(x(B_{n,m}))$ et
 $x(C_{n,m}) = \frac{-n}{m} + 1 + x(A)$; $y(C_{n,m}) = f(x(C_{n,m}))$,
 avec m qui désigne un nombre entier naturel non nul supérieur ou égal à n . Les points $B_{n,m}$ et $C_{n,m}$ ainsi construits sont situés sur la courbe de part et d'autre du point A (car on a, $\frac{n}{m} \leq 1$). Lorsqu'on donne à l'entier n des valeurs allant de 1 à m on rapproche de façon épuisable le représentant du cercle $(C_{n,m})$ circonscrit au triangle $AB_{n,m}C_{n,m}$ vers le représentant du cercle osculateur $(C_{m,m})$ jusqu'à leur superposition. Cette technique de rapprochement épuisable permet donc de décrire ou de présenter le cercle osculateur comme étant une position limite au sens d'une position atteignable. En effet, lorsque l'entier naturel non nul n prendra la valeur de m , les représentants des points $B_{m,m}$ et $C_{m,m}$ coïncideront avec celui du point A . À ce moment-là, le cercle $(C_{m,m})$ et la courbe (c) forment à la position du point A une intersection dont l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à trois. Ainsi, le rapprochement de rang m permet au cercle circonscrit au triangle $AB_{n,m}C_{n,m}$ de passer à sa position limite (car $n \leq m$) qui correspond à la position du cercle osculateur.

Prenons un exemple pour mieux illustrer notre propos.

Soient (c) la courbe de la fonction carrée et $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ un point de (c) . En mobilisant la technique sus-décrite et en fixant $m=4$, les points $B_{n,4}$ et $C_{n,4}$ ont pour coordonnées :

$$B_{n,4} = \left(\frac{\frac{n}{4} - 1}{\left(1 - \frac{n}{4}\right)^2} \right) \text{ et } C_{n,4} = \left(\frac{\frac{-n}{4} + 1}{\left(1 - \frac{n}{4}\right)^2} \right).$$

Le cercle $(C_{n,4})$ circonscrit au triangle $AB_{n,4}C_{n,4}$ a pour

centre $O_{n,4} = \left(\frac{0}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{4}\right)^2} \right)$ et de rayon

$r_{n,4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{4}\right)^2$. En donnant à l'entier naturel n des valeurs allant de 1 à 4, on rapproche de façon épuisable les représentants des points $B_{n,4}$ et $C_{n,4}$ vers celui du point A . De cette façon on rapproche le représentant du cercle $C_{n,4}$ vers le représentant du cercle $C_{4,4}$ jusqu'à leur superposition. Donc, au cours du quatrième rapprochement, le cercle $(C_{n,4})$ passe à sa position limite (car $n \leq 4$) qui correspond à la position du cercle osculateur $(C_{4,4})$. Ainsi, la technique mise en œuvre pour faire avancer le représentant du cercle $(C_{n,4})$ vers le représentant du cercle osculateur $(C_{4,4})$, permet de le décrire comme une position limite au sens d'une position atteignable. En effet, le cercle $(C_{4,4})$ de

centre $O_{4,4} = \left(\frac{0}{\frac{1}{2}} \right)$ et de rayon $r_{4,4} = \frac{1}{2}$, forme

avec la courbe de la fonction « carré » $f(x) = x^2$ à la position du point A , une intersection dont l'ordre de multiplicité est supérieur à 3 puisque les représentants des points d'intersection $B_{4,4}$ et $C_{4,4}$ sont confondus avec le représentant du A . Par suite, le cercle $(C_{4,4})$ est bien le cercle osculateur à la courbe de la fonction carré au point A . Un point $M(x, y)$ appartient à la courbe et est situé sur le cercle si et seulement si, $(y = f(x) \text{ et } x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0)$ c'est-à-dire que, l'abscisse x du point M est solution de l'équation

$p(x) = x^2 + \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$. Pour montrer dans le registre analytique que l'ordre de multiplicité du point de tangence A vaut 4, on peut alors considérer la fonction définie par $p(x) = x^2 + \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. En effet, dans ce

CONSTRUCTION DU CERCLE OSCULATEUR
AVEC UNE VISION LOCALE À L'AIDE DE LA
GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

registre de représentation, l'ordre de multiplicité de l'abscisse $x(A)$ du point de tangence, lorsqu'elle est solution de l'équation $p(x)=0$, correspond à l'ordre de multiplicité de l'intersection que forme le cercle osculateur avec la courbe de la fonction carrée à la position du point A (Nguembou-Nana, 2023). Ainsi, l'abscisse $x(A)$ du point de tangence est une racine d'ordre 4 de l'équation $p(x)=0$. Ci-dessous,

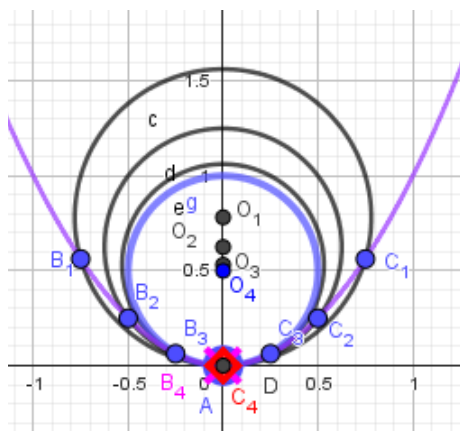


Figure 4: le cercle de couleur bleu représente le cercle osculateur vu comme une limite atteignable

Les représentants des points B_4 et C_4 sont en état de superposition à la position du point A , ce qui montre géométriquement que l'ordre de multiplicité du point de tangence est supérieur à 3. Il vaut en réalité 4 et plus loin nous l'expliquerons géométriquement à l'aide du registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique. Dans le registre numérique, on peut observer comme ci-dessus, qu'en donnant à l'entier naturel n des valeurs allant de 1 à 4, on rapproche le représentant du cercle $(c_{n,4})$ circonscrit au triangle $AB_{n,4}C_{n,4}$ du représentant du cercle osculateur $(c_{4,4})$ jusqu'à la superposition de leur représentant à la position du point A . Cependant, dans le registre graphique de l'environnement papier-crayon, il est impossible de faire arriver les représentants des points B et C à la position du point A pour obtenir un représentant du cercle osculateur (lorsqu'il existe). En cela, ce registre de repré-

nous construisons dans le registre graphique de l'environnement papier-crayon les représentants des cercles $(c_{1,4})$, $(c_{2,4})$, $(c_{3,4})$ et $(c_{4,4})$ afin d'illustrer, dans ce registre de représentation, la technique de rapprochement épuisable mise en œuvre ci-dessus dans le registre analytique pour décrire la position du cercle osculateur comme étant une position atteignable.

Rapprochement épuisable

$$(c_{(1,4)}): (O_{(1,4)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{9}{2^5} \end{pmatrix} \text{ et } r_{(1,4)}^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{2^5} + \frac{81}{2^{10}}$$

$$(c_{(2,4)}): (O_{(2,4)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \end{pmatrix} \text{ et } r_{(2,4)}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6}$$

$$(c_{(3,4)}): (O_{(3,4)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} \end{pmatrix} \text{ et } r_{(3,4)}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^{10}}$$

sentation n'est pas propice pour provoquer chez le lycéen le développement d'une vision statique de la limite lorsqu'elle est associée à la notion de cercle osculateur. Nous allons alors accompagner cet article d'un enregistrement vidéo (disponible sur la fiche Publimaths de cet article), qui permet de visualiser comment à l'aide de la géométrie dynamique on peut surmonter la difficulté sus-évoquée.

Par ailleurs, d'Alembert a proposé une définition de la limite avec une vision dynamique :

« On dit qu'une grandeur est une limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite que l'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle ap-

proche : En quelque sorte que la différence d'une pareille quantité à la limite est absolument inassignable. [...] A proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra. » (L'article LIMITE de l'encyclopédie de Diderot et d'Alembert)

Puisque dans cette étude nous regardons le cercle osculateur comme étant une limite, la formulation ci-dessus peut laisser sous-entendre que le cercle osculateur est position limite uniquement au sens d'une position inatteignable. Pourtant, il existe bel et bien des techniques de rapprochements dont les mises en œuvre permettent de présenter ou décrire le cercle osculateur comme étant une position limite au sens d'un position atteignable, comme celle présentée ci-dessus.

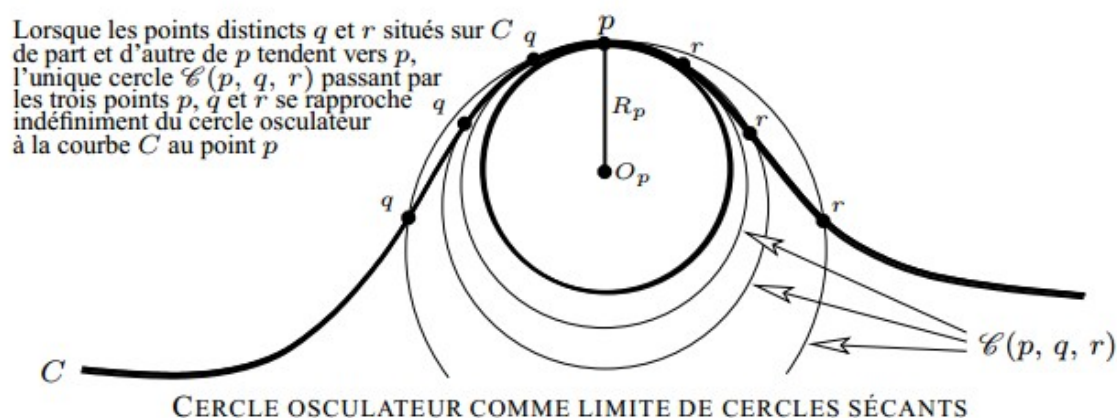


Figure 5: figure extraite de (Merker, 2014, p. 25)

Notre définition du cercle osculateur suivant une vision dynamique de la limite

En adaptant la définition de la limite proposée par d'Alembert, nous proposons dans le cadre géométrique, une définition du cercle osculateur suivant une vision dynamique de la limite qui nous semble accessible au lycéen : Soient (C) la courbe plane d'une fonction numérique, A un point de (C) , B et C deux points sur la courbe (C) situés de part et d'autre du point A . Lorsque par une technique appropriée on rapproche infiniment les représentants des points B et C , vers le représentant du point A , sans jamais l'atteindre ni le surpasser, on rapproche ainsi sans cesse et autant qu'on veut, le représentant du cercle circonscrit au triangle ABC vers un unique cercle (c) passant par le

point A , sans jamais l'atteindre ni le surpasser. Ce cercle (c) est appelé cercle osculateur à la courbe (C) de la fonction numérique au point A .

Merker (2014) a proposé une définition du cercle osculateur suivant une vision dynamique de la limite, en prenant appui sur l'idée de rapprochement sans cesse et toujours possible, sans toutefois intégrer explicitement l'idée que c'est la technique mise en œuvre qui permet de faire avancer indéfiniment le représentant du cercle sécant vers le représentant du cercle osculateur :

« Soit C une courbe arbitraire du plan et soit p l'un de ses points. Si q et r sont deux points distincts situés sur C de part

et d'autre de p , il existe un unique cercle passant par les trois points p, q et r , [ce] cercle se réduit à une droite lorsque ces points sont alignés. Soit donc $C(p, q, r)$ ce cercle (ou cette droite) qui dépend de la position de q et r comme sur la figure ci-dessous. » (Merker, 2014, p. 25)

L'auteur ajoute : « Lorsque les deux points se rapprochent indéfiniment du point p , le cercle $C(p, q, r)$ se rapproche indéfiniment d'un unique cercle passant par p . Ce cercle est appelé cercle osculateur à la courbe C au point p » (Merker, 2014, p. 25).

1.3.2. Le cercle osculateur appréhendé comme étant une position limite au sens d'une position inatteignable

Considérons un point A appartenant à la courbe (c) d'une fonction numérique, B et C deux points de (c) situés de part et d'autre du point A . Par des techniques adéquates et dans un registre de représentation approprié, on peut rapprocher indéfiniment les représentants des points B et C vers la position du représentant du point A , sans jamais l'atteindre ni le surpasser². De cette façon, on rapproche autant qu'on le souhaite, le représentant du cercle circonscrit au triangle ABC vers un unique cercle (π) qui passe par le point A , sans jamais l'atteindre ni le surpasser.

Nous pouvons par exemple procéder au rapprochement sus-décrit dans le registre ana-

lytique grâce à la technique suivante : en désignant par n le $n^{\text{ième}}$ rapprochement des représentants des points B et C de la position du point A et par B_n et C_n les positions occupées par les points B et C au cours de ce $n^{\text{ième}}$ rapprochement. Et poser :

$$x(B_n) = x(A) - \frac{1}{n}; y(B_n) = f(x(B_n)) \text{ et}$$

$$x(C_n) = x(A) + \frac{1}{n}; y(C_n) = f(x(C_n)).$$

Les points B_n et C_n ainsi construits sont situés sur la courbe de part et d'autre du point A . On peut alors donner à l'entier naturel non nul n des valeurs de plus en plus grandes dans l'ensemble $\mathbb{N}$, pour rapprocher continuellement les représentants des points B_n et C_n du représentant du point A , sans jamais l'atteindre ni le surpasser. De cette façon on rapproche infiniment le représentant du cercle circonscrit au triangle AB_nC_n du représentant d'un unique cercle qui passe par le point A , sans jamais l'atteindre ni le surpasser. Ce cercle (lorsqu'il existe) est le cercle osculateur à la courbe au point A . Par ailleurs, cette technique de rapprochement présente bien le cercle osculateur comme étant une position limite au sens d'une position inatteignable.

Prenons un exemple pour mieux illustrer notre propos

Soient (c) la courbe de la fonction carrée $f(x) = x^2$ et $A = \left(\frac{1}{1}\right)$ un point de la courbe (c) .

Les points B_n et C_n ont alors pour coordon-

nées :

$$B_n = \left(1 - \frac{1}{n}, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right) \text{ et } C_n = \left(1 + \frac{1}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = A$, on peut rapprocher indéfiniment les représentants des points B_n et C_n du représentant du point A , en donnant à l'entier naturel non nul n des valeurs

² Cette expression « ni le surpasser », empruntée à d'Alembert signifie dans ce contexte qu'on rapproche continuellement le représentant du point B (et du point C) sur la courbe vers la position du point A en restant toujours soit à gauche soit à droite, sans passer de l'autre côté du point A . Ainsi, rapprocher infiniment le cercle circonscrit au triangle ABC vers la position du cercle osculateur sans l'atteindre ni le surpasser, signifie rapprocher continuellement les points B et C situés de part et d'autre du point A , vers la position du point A , chaque point restant toujours soit à gauche soit à droite, sans passer de l'autre côté du point A .

de plus en plus grandes dans l'ensemble $\mathbb{N}$. Par ailleurs, le cercle circonscrit au triangle

AB_nC_n a pour centre $O_n = \begin{pmatrix} -4 + \frac{1}{n^2} \\ \frac{7}{2} + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$ et pour

rayon $r_n^2 = \left(-5 + \frac{1}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2n^2}\right)^2$. Comme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} O_n = O_\infty = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^2 = r_\infty^2 = \frac{125}{4}$, on

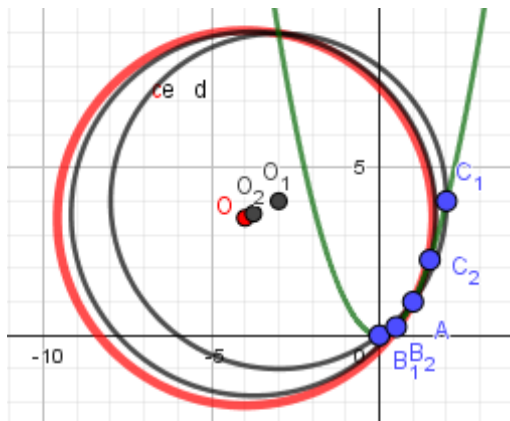
peut donc rapprocher autant qu'on le souhaite le cercle circonscrit au triangle AB_nC_n du

cercle (c_∞) de centre $O_\infty = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ et de rayon

$r_\infty^2 = \frac{125}{4}$, sans jamais l'atteindre ni le surpasser, en donnant à l'entier naturel n des valeurs

de plus en plus grandes dans l'ensemble $\mathbb{N}$. De plus, le point A appartient à ce cercle limite. Puisque lorsqu'on rapproche indéfiniment les représentants des points B_n et C_n du représentant du A par la technique sus-décrite, on rapproche ainsi indéfiniment le représentant du cercle circonscrit au triangle AB_nC_n du représentant du cercle (c_∞) qui passe par le point A , la définition du cercle osculateur proposée par (Merker, 2014, p. 25) nous permet de conclure que le cercle limite (c_∞) est effectivement le cercle osculateur à la courbe de la fonction carrée au point A d'abscisse 1. Par ailleurs, cette technique de rapprochement présente aussi le cercle osculateur (c_∞) comme étant une position limite au sens d'une position inatteignable. Ci-dessous, nous illustrons dans le registre graphique de l'environnement papier-crayon les représentants des cercles (c_1) , (c_2) et (c_∞) .

Rapprochement sans cesse et toujours possible



$$(c_1) : (O_1 = \begin{pmatrix} -4+1 \\ \frac{7}{2}+1 \end{pmatrix} \text{ et } r_1^2 = \frac{125}{4} - 6$$

$$(c_{100}) : (O_{100} = \begin{pmatrix} -4+\frac{1}{10^2} \\ \frac{7}{2}+\frac{1}{10^2} \end{pmatrix} \text{ et } r_{100}^2 = \frac{125}{4} - \frac{1}{10} + \frac{14}{4 \cdot 10^4} + \frac{1}{4 \cdot 10^8}$$

$$(c_{1000}) : (O_{1000} = \begin{pmatrix} -4+\frac{1}{10^6} \\ \frac{7}{2}+\frac{1}{10^6} \end{pmatrix} \text{ et } r_{1000}^2 = \frac{125}{4} - \frac{1}{10^2} + \frac{14}{4 \cdot 10^6} + \frac{1}{4 \cdot 10^{12}}$$

$$(c_\infty) : (O_\infty = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \text{ et } r_\infty^2 = \frac{125}{4}$$

Figure 6: Le cercle de couleur rouge représente le cercle osculateur vu comme une limite inatteignable

Dans le registre numérique, on peut observer comme ci-dessus qu'en donnant à l'entier naturel n des valeurs de plus en plus grandes, on rapproche infiniment le représentant du cercle (c_n) circonscrit au triangle

AB_nC_n du représentant du cercle limite (c_∞) . Cependant, le registre graphique statique ci-dessus, ne permet pas de visualiser comment cette technique permet de faire avancer indéfiniment les représentants des points B_n et C_n

CONSTRUCTION DU CERCLE OSCULATEUR
AVEC UNE VISION LOCALE À L'AIDE DE LA
GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

vers la position du point A . Et par la même occasion, de voir comment elle permet de faire converger autant qu'on le souhaite le cercle circonscrit au triangle AB_nC_n vers la position du cercle osculateur. En cela, ce registre de représentation n'est pas propice pour provoquer chez le lycéen le développement d'une vision dynamique de la limite, lorsqu'elle est associée à la notion de cercle osculateur.

Nguembou-Nana (2023) propose de parler de technique de « rapprochement inépuisable » lorsqu'elle permet de décrire la droite tangente comme une position limite au sens d'une position inatteignable et de parler de technique de « rapprochement épuisable » lorsqu'elle permet de décrire la droite tangente comme étant une position limite au sens d'une position atteignable. La dualité de la limite peut être une source de difficultés à la compréhension du concept de cercle osculateur, en ce sens que la vision dynamique de la limite peut laisser sous-entendre que sa position correspond à une position limite au sens d'une position inatteignable, tandis que la vision statique de la limite montre clairement que sa position correspond à une position limite au sens d'une position qui est atteignable. Cela peut semer le doute chez le lycéen sur le caractère accessible ou non de la position du cercle osculateur.

1.4. – Le passage de la notion de meilleure approximation affine pour la notion de meilleure approximation circulaire : une source de difficulté à l'apprentissage de la notion de tangence

Dans le but de provoquer chez le lycéen le développement des perspectives locales sur la courbe de la fonction pour appréhender la droite tangente avec une vision locale, Maschietto (2004) propose l'usage de la technique du zoom. Elle consiste à zoomer en un point d'une courbe jusqu'à ce qu'un représentant d'une portion de la courbe apparaisse à l'écran, comme une image semblable à un seg-

ment de droite. À ce moment, on peut tracer un représentant de la droite tangente à la courbe au point considéré de façon automatique, à l'aide des fonctionnalités du logiciel. Le représentant de la droite tangente et le représentant de la portion de la courbe sus-évoquée apparaissent alors à l'écran comme confondus (point de vue local). Des zooms inverses permettent de revenir à l'échelle initiale et donc de visualiser la courbe et sa droite tangente (point de vue global). Cette approche a le mérite de faire travailler les lycéens aux voisinages du point de tangence et en cela, de permettre chez le lycéen le développement des perspectives locales, globales et ponctuelles sur la courbe pour appréhender la droite tangente avec une vision locale. Elle voudrait qu'à terme, le lycéen regarde la droite tangente comme la meilleure approximation de la courbe de la fonction au voisinage du point de tangence.

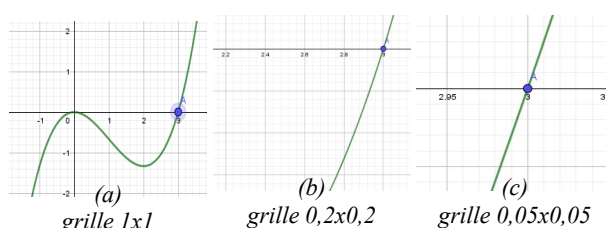


Figure 7: des zooms jusqu'à l'apparition de la propriété de micro-linéarité (point de vue local)

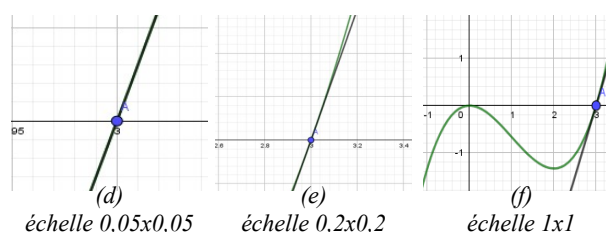


Figure 8: tracé automatique de la droite tangente puis des zooms inverses pour le retour à l'échelle initiale

Cependant, cette technique ne propose pas d'outils géométriques formels susceptibles de permettre au lycéen d'expliquer pourquoi on est en droit de dire effectivement que la droite

tangente est la meilleure approximation affine de la courbe au voisinage du point de tangence. En cela, les perspectives locales provoquées par la technique du zoom ne permettent pas au lycéen de passer de la notion de meilleure approximation affine à la notion de meilleure approximation circulaire. Dans cette étude, nous cherchons des techniques susceptibles de provoquer chez ce dernier, le développement des perspectives locales qui lui permettront d'effectuer plus facilement la transition susmentionnée.

Dans la suite nous utilisons le vocabulaire utilisé par Restrepo (2008) pour caractériser le point dans le cadre de la géométrie dynamique (Voir annexe 1).

1.5. – Une technique opérationnelle dans l'environnement de géométrie dynamique pour construire un représentant du cercle osculateur

Dans cette section, nous allons rendre opérationnel dans un environnement de géométrie dynamique, une technique qui permet de construire un représentant du cercle osculateur en un point situé sur une courbe à valeur de (p) finie, en le regardant comme étant une position limite. Pour cela, nous adaptons l'approche proposée par Nguembou-Nana (2023), pour construire la droite tangente vue sous le prisme de la limite.

Construction du cercle sécant à la courbe : des points d'intersection simples

Pour exposer les techniques qui vont nous permettre de construire le cercle osculateur, nous prenons appui sur le cas du cercle osculateur à la courbe (c) de la fonction carré en son sommet A . La première étape consiste à construire le point A et deux points B et C de la courbe (c) situés de part et d'autre du point A . Puis, nous construisons un cercle circonscrit au triangle ABC , de sorte que, ce cercle forme avec la courbe le plus grand nombre (p) de

points d'intersection simples. Il reste alors à construire le point non attrapable D . De cette façon que, les deux courbes (voir figure 9) forment le plus grand nombre possible de points d'intersection simples qui vaut 4. La valeur exacte de l'ordre de multiplicité du point de tangence est par conséquent inférieure ou égale à 4.

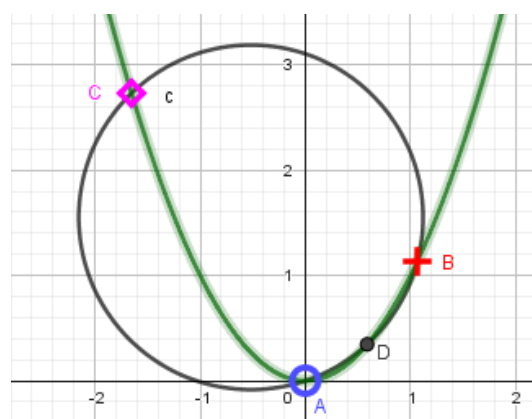


Figure 9: La courbe et le cercle ont en commun quatre points d'intersections simples.

Rapprochement inépuisable de la sécante vers la tangente : une vision dynamique de la limite associée à la notion de cercle osculateur

On rapproche les points B et C à proximité du point A à l'aide de la fonctionnalité déplacement du logiciel GeoGebra. Ensuite, on effectue des zooms au voisinage du point A . Ils agrandissent à l'écran les représentants des distances qui séparent le point A des points B et C . La fonctionnalité déplacement permet à nouveau de placer les points B et C à proximité du point A . On réitère les mêmes opérations jusqu'à ce que la figure atteigne son point de saturation.

Point de saturation de la figure

En rapprochant les représentants des points B et C à l'aide des techniques sus-décrites, il arrive un moment où des représentants d'une portion de la courbe et d'une portion du cercle sécant apparaissent comme

CONSTRUCTION DU CERCLE OSCULATEUR
AVEC UNE VISION LOCALE À L'AIDE DE LA
GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

confondus à l'écran, en formant une image semblable à un segment de droite et ce, avec les représentants des points A , B , C et D bien distincts dans la fenêtre géométrie mais, avec les coordonnées des quatre points identiques dans la fenêtre algèbre. Si tel n'est pas encore le cas, on poursuit avec la même technique de rapprochement autant que nécessaire. Au point de saturation de la figure, la poursuite du rapprochement par la même technique demeure possible, ce qui pourrait ouvrir la porte à l'idée d'un rapprochement inépuisable (vision dynamique de la limite).

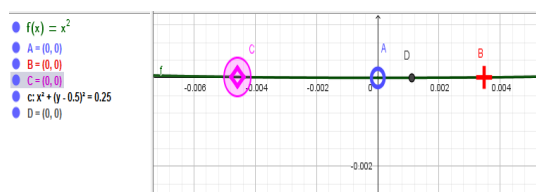


Figure 10: Point de saturation de la figure.
Les coordonnées des points d'intersection
simples sont identiques dans la fenêtre
algèbre

**Rapprochement épuisable : vision statique
de la limite associée à la notion de cercle
osculateur**

À partir du point de saturation, on effectue des zooms inverses au voisinage du point A jusqu'à ce que les représentants des points A , B , C et D se superposent à l'écran. La détermination de la valeur exacte de l'ordre de multiplicité du point de tangence devient alors possible. Elle vaut donc 4. La superposition desdits points marque le passage du cercle circonscrit au triangle ABC à sa position limite, qui correspond à la position du cercle osculateur dans l'environnement de géométrie dynamique. La mise en œuvre des techniques sus-décrites a permis de visualiser les représentants des points d'intersection simples convergeant vers le représentant du point A jusqu'à leur superposition à la position du point A . Le nombre de points convergents correspond à la valeur exacte (m) de l'ordre de multiplicité du point de tangence, dans le cas de cette courbe à

valeur de (p) finie. Dans ce contexte, la relation, $(m) \leq (p)$ est toujours vérifiée. En effet, on fait arriver à la position d'un point considéré, les représentants de points d'intersection simples pour former un représentant du point de tangence (point multiple).

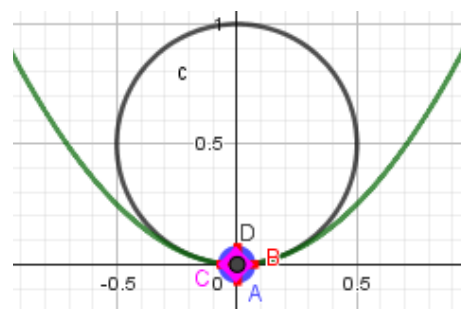


Figure 11: Un représentant du point
de tangence liant la courbe et le
cercle osculateur. La valeur exacte
 (m) de l'ordre de multiplicité du point
de tangence est égale à 4

**Discussion de la problématique avec le
point de saturation de la figure**

La vision dynamique de la limite garantit le fait que la technique mise en œuvre permet de faire avancer les représentants des points B et C vers le représentant du point A autant que nécessaire. Assurant alors l'existence et l'atteinte du point de saturation de la figure. En effet, nous sommes dans un milieu informatique, et le logiciel va confondre les coordonnées des points A , B , C et D dans la fenêtre algèbre, lorsque leurs positions deviennent infiniment proches de la position du point A . Nous utilisons ainsi les insuffisances du logiciel pour atteindre le point de saturation de la figure. À ce moment-là, les points A , B , C et D ont toujours les statuts de points d'intersection simples dans la fenêtre géométrie. Ensuite, les zooms inverses font revenir à échelle initiale qui permet de visualiser la superposition des représentants desdits points. Or, les objets mathématiques sont abstraites et les mathématiciens travaillent avec leurs représentants. Dans ce contexte, les représentants des points sont en position de superposition, nous admettons

alors que les points sont confondus, car leurs représentants le sont en effet à l'écran. Cela permet alors de regarder le point de tangence comme étant un point d'intersection multiple. Nous articulons ainsi une vision dynamique avec une vision statique de la limite, pour construire notre point de tangence, de sorte que les propriétés locales des courbes tangentes en étude soient mises en évidence.

Détermination de la valeur exacte de l'ordre de multiplicité du point de tangence liant le cercle osculateur à une courbe à valeur de (p) finie

Considérons une courbe (c) à valeur de (p) finie et A un point de (c) . Grâce aux techniques décrites ci-dessus, on peut toujours déterminer la valeur exacte (m) de l'ordre de multiplicité du point de tangence. En effet, lorsqu'on fait arriver à la position du point A deux points B et C situés sur la courbe de part et d'autre du point A , (k) point(s) non attrapable(s) peuvent venir stationner à la position du point A , avec $(k) \geq 0$. Dans ce cas, l'ordre de multiplicité (m) du point de tangence est égal à $(m) = (k) + 3$. Ainsi, à l'aide de la géométrie dynamique, on peut se situer dans le contexte d'une courbe à valeur de (p) finie, pour apporter au lycéen une explication visant à justifier pourquoi la valeur de l'ordre de multiplicité du point de tangence liant le cercle osculateur avec une courbe, est toujours supérieure ou égale à 3.

Même si la valeur de (p) est infinie, on peut toujours construire dans ce registre graphique un représentant du cercle osculateur, en faisant arriver à la position d'un point considéré A , deux points sur la courbe situés de part et d'autre du point A . Sans toutefois s'intéresser aux points non attrapables, car, dans ce contexte-là, il n'est plus possible de construire tous les points non attrapables, en raison de leur nombre infini. Seulement, la mobilisation systématique de cette approche peut laisser

sous-entendre au lycéen que la valeur de l'ordre de multiplicité du point de tangence liant un cercle osculateur avec une courbe est toujours égale à trois, ce qui serait une connaissance complètement erronée relative à la notion de tangence. Pour cette raison nous faisons travailler le lycéen avec une courbe à valeur de (p) finie. Par la suite, nous pouvons étendre à d'autres courbes les propriétés construites dans le contexte d'une courbe à valeur de (p) finie.

2 – Les théories explicatives dans notre étude

2.1. – La théorie de la forme opératoire et de la forme prédictive de la connaissance

Cette théorie reconnaît deux formes de la connaissance, la forme opératoire, celle qui permet de faire et de réussir et la forme prédictive : « celle qui prend la forme de textes, d'énoncés, de traités et de manuels » (Vergnaud, 2001, p. 1). Par ailleurs, ce travail vise la construction du sens de la notion de cercle osculateur vue sous le prisme de la limite. Au vu des difficultés à mettre en œuvre une technique permettant d'opérer un rapprochement inépuisable, allant du cercle sécant vers le cercle osculateur, dans le registre graphique de l'environnement papier-crayon, nous faisons alors le choix de faire acquérir au lycéen ces connaissances sous la forme opératoire, dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique du logiciel GeoGebra, visant ainsi la conceptualisation dans l'action par adaptation des schèmes. Pour faire en sorte qu'il articule la forme opératoire de la connaissance avec la forme prédictive de la connaissance, nous allons par exemple l'inviter à proposer une définition du cercle osculateur.

Pour éprouver la pertinence des perspectives locales, globales et ponctuelles provoquées par les techniques mises en œuvre dans

le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique, nous invitons aussi le lycéen dans le registre de l'analyse à produire une équation algébrique du cercle osculateur suivant une vision dynamique de la limite. Puisque la construction des connaissances prédictives à partir des connaissances acquises sous la forme opératoire est un indicateur de conceptualisation des notions associées aux objets mathématiques manipulés, nous allons mobiliser la conversion au sens de (Duval, 1993) comme un moyen qui nous permettra de vérifier l'effectivité et l'efficacité des connaissances construites dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique.

2.2. – La théorie des perspectives sur les fonctions

Cette théorie soutient que le registre graphique possède un potentiel local très élevé par rapport aux registres algébrique, analytique ou numérique (Panero, 2018 ; Vandebrouck, 2011). Cela justifie alors notre choix de faire travailler le participant d'abord dans le registre graphique d'un environnement de géométrie dynamique, à l'aide des techniques rendues opérationnelles dans notre étude. Par ailleurs, la mise en fonctionnement des perspectives locales (Delgadillo et al., 2016) sur la courbe de la fonction pour appréhender le cercle osculateur, témoigne de l'accès à une compréhension plus large ou plus générale de cette relation de tangence. Cela nous permettra d'évaluer, d'apprécier ou de réguler la qualité des connaissances prédictives construites sur la notion de cercle osculateur par le lycéen aussi bien dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique que dans le registre analytique.

2.3. – Technique de collecte des données

Notre technique de collecte de données est le *Teaching Experiment* (TE). Il est centré sur des séances d'enseignement orchestrées

par l'enseignant-chercheur, qui occasionne des interactions entre les apprenants ou entre les apprenants et lui-même, en vue d'évaluer, d'orienter et de réguler les connaissances construites par les lycéens. Le but est de s'assurer que le sujet surmonte la difficulté annoncée par la recherche et surtout de comprendre et d'expliquer comment celui-ci y parvient. Les autres acteurs du (TE) sont composés d'un chercheur-témoin et de quatre lycéens volontaires. Le chercheur-témoin participe à l'élaboration des tâches, donne son avis sur l'interprétation des données, dans le but de renforcer l'objectivité du chercheur-enseignant. Les participants ont été choisis en collaboration avec l'enseignant de la classe qui est par ailleurs le chercheur-témoin. Nous avons cherché et trouvé deux volontaires ayant des genèses d'usage développées par rapport au logiciel afin de faciliter l'instrumentalisation des fonctionnalités à utiliser pour étudier la notion de cercle osculateur. Les outils de collecte de données sont constitués d'une caméra à chaque poste, des cahiers des participants, d'un journal de bord pour des prises de notes avant, pendant et après les séances. Les instruments de collecte de données sont un guide d'observation et un guide d'entretien. Selon (Dufour, 2019, p. 79), cette technique de collecte de données est propre à la didactique des mathématiques. Elle a principalement été développée à l'école russe et plus récemment aux États-Unis par (Steffe et al., 2000 ; Steffe & Thompson, 2000) entre autres.

2.4. – Les prérequis dont disposent les participants à notre étude

Dans le cadre géométrique, les lycéens participants à cette étude ont reçu de l'enseignant une définition de la limite suivant une vision dynamique, qui est une adaptation de la définition de la limite proposée par d'Alembert. Il a reformulé ladite définition comme suit : « un objet géométrique (A) est limite ou position limite d'un objet (B) de même nature,

si et seulement si, on a trouvé une technique permettant de faire avancer sans cesse et autant qu'on veut l'objet (B) vers la position de l'objet (A), sans jamais l'atteindre ni la surpasser. ». Puis il a expliqué que rapprocher un objet géométrique d'un autre de même nature, consiste à mettre en mouvement le premier, de sorte que la trajectoire qu'il emprunte permet à un moment donné d'observer la superposition de leurs représentants. La classe a alors étudié la droite tangente dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique, en la regardant comme une position limite. Ce travail a permis au lycéen de s'approprier de nouveaux vocabulaires associés aux visions statique et dynamique de la limite. Ces prérequis nous semblent intéressants pour l'apprentissage de la notion de cercle osculateur, en se focalisant sur la technique de rapprochement inépuisable et sur la notion d'ordre de multiplicité du point de tangence.

3. – Situation d'enseignement

On considère la fonction définie par $f(x)=x^2$, le point $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et deux points B et C situés sur la courbe de part et d'autre du point A , de sorte que le cercle circonscrit au triangle ABC forme avec la courbe de la fonction une quatrième intersection notée D .

On désigne par (p) le plus grand nombre (lorsqu'il existe) de points d'intersection simples que la courbe et un cercle sécant passant par le point A peuvent former. On désigne par (m) la valeur exacte de l'ordre de multiplicité du point de tangence. On admet que le cercle osculateur (lorsqu'il existe) en un point considéré de la courbe d'une fonction numérique est unique.

1. Construire les points A , B et C , puis le cercle circonscrit au triangle ABC , ensuite construire le point non attrapable D .

2. Construire à l'aide de la fonctionnalité « cercle osculateur » le cercle osculateur (π) à la courbe de la fonction f au point A .
3. Utilise la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement pour rapprocher les points B et C vers le point A jusqu'à ce qu'une portion de la courbe, une portion du cercle sécant et une portion du cercle osculateur apparaissent à l'écran, en formant une image semblable à un segment de droite. À l'état de la figure décrite à la position précédente, peux-tu encore poursuivre avec le rapprochement ?
4. À l'aide de la fonctionnalité zoom inverse toute seule, faire arriver à la position du point A , les points B , C et D .
5. Proposer deux définitions du cercle osculateur à courbe d'une fonction en se focalisant sur la notion d'ordre de multiplicité du point de tangence.
6. Montrer que le cercle osculateur (π) et la courbe (c) de la fonction forment à la position du point A , l'intersection dont l'ordre de multiplicité est le plus élevé.
7. Justifier que le cercle osculateur (π) est la meilleure approximation circulaire à la courbe (c) au voisinage du point tangence A .

4. – Analyse des productions des lycéens

Il est très difficile pour nous d'illustrer dans un registre graphique statique la construction dynamique d'un représentant du cercle osculateur faite à partir de l'articulation d'une technique de rapprochement inépuisable avec une technique de rapprochement épuisable. C'est pourquoi nous allons accompagner cet article d'un enregistrement vidéo qui présente les techniques de rapprochements mises en

œuvre par les participants à notre étude pour construire le cercle osculateur dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique du logiciel GeoGebra (disponible sur la fiche Publimaths de cet article). Lesdites techniques sont celles décrites plus haut au paragraphe I.6.

4.1. – Les productions écrites du participant Y relatives à la tâche (6)

Connaissances opératoires et prédictives du participant Y

Puisque la valeur de $(p)=4$, pour tout cercle passant par le point A la valeur (m) de l'ordre de multiplicité du point de tangence vérifiée $(m)\leq(p)=4$. Parce qu'on fait arriver à la position du point A les points d'intersections simples, pour former le point de tangence. Or, lorsque j'ai fait arriver à la position du point A les points d'intersections simples B et C, le point non attrapable D est lui aussi venu stationner à la position du point A. Par conséquent, la valeur de l'ordre de multiplicité $(m)=4$. Par suite, $(p)=(m)=4$. Et donc, le cercle (π) et la courbe (c) de la fonction, forment à la position du point A l'intersection dont l'ordre de multiplicité est le plus élevé.

4.2. – Ordre de multiplicité de l'intersection formée par le cercle osculateur et la courbe (c) à la position du point de tangence est le plus élevé

En termes de connaissances opératoires nous constatons que, les connaissances du participant Y ci-dessus encadrées montrent que dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique, le participant Y a fait arriver à la position du point A, les représentants des points B et C pour former un représentant du point de tangence, à l'aide des techniques géométriques de rapprochements in-

épuisable et épuisable. Au cours de cette période, le représentant du point non attrapable est lui aussi allé stationner à la position du point A. Ce qui lui a permis de visualiser quatre points en état de superposition à la position du point A.

En termes de conceptualisations nous constatons que, les connaissances du participant Y ci-dessus encadrées montrent que ce dernier a retenu que le plus grand nombre de points d'intersection simples que peuvent former la courbe (c) et un cercle sécant passant par le point A est égal à $(p)=4$. Deuxièmement, il a retenu qu'après le passage du cercle circonscrit au triangle ABC à sa position limite, le nombre de points d'intersection simples qui sont état de superposition à la position du A est $(m)=4$. Ensuite, la composante inférence du schème du participant lui a sans doute, permis de relier ces informations pour les transformer en des connaissances prédictives selon lesquelles, la courbe (c) et le cercle (π) forment à la position du point O, l'intersection dont l'ordre de multiplicité est le plus élevé.

En termes de conceptions nos analyses montrent que, les connaissances du participant Y ci-dessus encadrées montrent que dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique, ce dernier a développé une nouvelle façon de penser la notion de point de tangence, lorsqu'il a transformé le statut du point A, qui est passé du statut de point d'intersection simple au statut de point d'intersection multiple. Selon l'argumentation encadrée ci-dessus, les points d'intersection simples $(p)=4$ ont permis au lycéen d'identifier des courbes sécantes. Pendant que, le point d'intersection multiple $(m)=4$ lui a permis d'identifier des courbes tangentes. Nous avons associé à la conception point d'intersection multiple les connaissances relatives à cette nouvelle façon de penser la notion de point de tangence

dans ce registre de représentation. Ainsi, le développement de cette conception a favorisé chez ce lycéen le passage de la notion de sécante pour la notion de tangence dans ce registre graphique. Donc, l'articulation de la conception point d'intersection simple avec la conception point d'intersection point multiple, lui a permis de développer une façon de penser la notion de cercle osculateur. Elle lui a permis de le présenter comme étant le cercle qui forme avec la courbe (c) à la position du point A , l'intersection dont l'ordre de multiplicité est le plus élevé.

En termes de perspectives notre hypothèse est que, les perspectives locales, globales et ponctuelles sur la courbe, provoquées par les techniques de rapprochement inépuisable et épuisable vont permettre au lycéen de passer plus facilement de la notion meilleure approximation affine à la notion de meilleure approximation circulaire. Pour tester cette hypothèse, nous analysons les productions du participant W relatives à la tâche suivante.

4.3. – Les productions écrites du participant W relative à la tâche (7)

Les connaissances prédictives du participant W

Le cercle osculateur (π) et la courbe (c) forment à la position du point A , l'intersection dont l'ordre de multiplicité est $(m)=4$. Comme le cercle osculateur est unique en un point de la courbe, tout cercle tangent en A à la courbe (c) ou tout cercle sécant en A à la courbe (c), forme avec qu'elle une intersection dont l'ordre de multiplicité est strictement inférieur à 4. Pour ces raisons, le cercle osculateur (π) est la meilleure approximation circulaire de la courbe (c) au voisinage du point de tangence.

Le cercle osculateur est la meilleure approximation circulaire de la courbe au voisinage du point de tangence

En termes de connaissances opératoires, dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique, le lycéen a construit le cercle osculateur à la courbe (c) au point A à l'aide de l'articulation de la technique de rapprochement inépuisable avec la technique de rapprochement épuisable. Cette construction a été réalisée de sorte que, la valeur exacte de l'ordre de multiplicité du point de tangence soit obtenue par le décompte du nombre de points d'intersection simples dont les représentants sont en état de superposition à la position du point A .

En termes de conceptualisations, les connaissances prédictives du participant W ci-dessus encadrées montrent qu'il a retenu que l'ordre de multiplicité de l'intersection que forment la courbe (c) et le cercle osculateur (π) est égal à $(m)=4$. Deuxièmement, il a retenu que tout cercle tangent en A à la courbe ou tout cercle sécant en A à la courbe, forme avec celle-ci une intersection dont l'ordre de multiplicité est strictement inférieur à $(m)=4$, ayant admis le fait que le cercle osculateur, lorsqu'il existe, est unique. Troisièmement, l'argumentation de ce participant nous invite à déduire que la composante concept-en-acte lui a permis de sélectionner la notion d'ordre de multiplicité du point de tangence comme étant un élément pertinent pour saisir la notion de meilleure approximation circulaire. Quatrièmement, l'argumentation de ce participant nous invite à déduire que la composante inférence du schème lui a permis de relier les informations ci-dessus pour les transformer en des connaissances prédictives, selon lesquelles, le cercle osculateur (π) est la meilleure approximation circulaire de la courbe au voisinage du point de tangence.

En termes de conceptions, le développement de la conception point d'intersection multiple a permis au participant W de mobiliser la notion d'ordre de multiplicité du point de tangence pour construire une hiérarchie sur la famille de cercles qui passent par le point A . Cette hiérarchie voudrait que, si des cercles passent par le point A , celui qui forme avec la courbe l'intersection dont l'ordre de multiplicité est le plus élevé, approxime le mieux la courbe au voisinage du point de tangence. Ainsi, le développement de la conception point d'intersection multiple a provoqué chez ce lycéen une nouvelle façon de penser la notion de meilleure approximation dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique. Nous proposons de la nommer la conception *Meilleure Approximation*. La droite tangente en un point A à la courbe d'une fonction, est la droite qui forme avec la courbe à la position de ce point, l'intersection dont l'ordre de multiplicité est le plus élevé. Par suite, cette façon de penser la notion de meilleure approximation permet de justifier à la fois, pourquoi la droite tangente est la meilleure approximation affine de la courbe au voisinage du point de tangence et pourquoi le cercle osculateur est la meilleure approximation circulaire de la courbe au voisinage du point de tangence. Par conséquent, le développement de la conception point d'intersection multiple peut permettre de passer plus facilement de la notion meilleure approximation affine à la notion approximation circulaire, comme ce fut le cas pour ce participant.

4.4. – Les productions écrites du participant X relatives aux tâches (5) et (6)

Les connaissances prédictives du participant X

Un cercle (c) est osculateur à la courbe (C) d'une fonction numérique en un point A , si et seulement si, on

peut trouver deux points B et C appartenant à la courbe (C) situés de part et d'autre du point A et une technique permettant de rapprocher sans cesse et autant qu'on veut les points B et C vers le point A , sans jamais l'atteindre ni le surpasser. Car, de cette façon, on rapproche sans cesse et autant qu'on veut le cercle circonscrit au triangle ABC vers le cercle (c), sans l'atteindre ni le surpasser.

Les connaissances prédictives du participant X

Un cercle (c) est osculateur à la courbe d'une fonction numérique en un point A , si et seulement si, c'est ce cercle qui forme avec la courbe à la position du point A , l'intersection dont l'ordre de multiplicité est le plus élevé.

Productions écrites du participant X dans le cadre de l'analyse

$$f(x) = x^2, A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \text{ et } C_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}, \text{ les trois}$$

points sont situés sur la courbe de la fonction f et sont non alignés pour tout nombre entier naturel non nul n . De plus, on peut rapprocher sans cesse et autant qu'on veut les points

$$B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \text{ et } C_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \text{ vers le point}$$

A sans jamais l'atteindre ni le surpasser, en donnant à l'entier naturel

n des valeurs de plus en plus grandes dans l'ensemble $\mathbb{N}$.

Considérons le cercle (c_n) circonscrit au triangle AB_nC_n . Il a pour

centre $O_n = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \end{array} \right)$ et pour rayon

$r_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}$. Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2} \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \end{array} \right) = O_\infty = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right),$$

on peut donc rapprocher **indéfiniment**, le cercle (c_n) circonscrit au triangle AB_nC_n vers la position du

cercle (c_∞) : $x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$, sans ja-

mais l'atteindre ni le surpasser, en donnant à l'entier naturel non nul n , des valeurs de plus en plus grandes dans l'ensemble $\mathbb{N}$. La position du cercle (c_∞) est donc la position limite (au sens d'une position inatteignable) des positions occupées par le cercle sécant (c_n) , lorsqu'on donne à l'entier naturel non nul n , des valeurs de plus en plus grandes dans $\mathbb{N}$. De plus, le point A appartient à ce cercle limite. Par conséquence, le cercle (c_∞) est le cercle osculateur à la courbe au point A .

Vérification :

$$q(x) = x^2 + \left(f(x) - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Posons} \quad &= x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \\ &= x^4 \end{aligned}$$

Le cercle forme avec la courbe de la fonction f à la position du point A d'abscisse 0, une intersection dont l'ordre de multiplicité est égal 4. Donc, le cercle (c_∞) est le cercle osculateur à la courbe de la fonction f au point A . Car, c'est le cercle (c_∞) qui forme avec la courbe à la portion du point A l'intersection dont l'ordre de multiplicité est le plus élevé.

Figure 12 : Une technique de rapprochement inépuisable pour décrire le cercle osculateur comme étant une position limite au sens d'une position inatteignable dans le registre analytique

Le cercle osculateur présenté comme étant une position limite au sens d'une position inatteignable dans le registre analytique

En termes de connaissances opératoires, dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique, le participant X a rapproché vers la position du point A , les représentants des points B et C jusqu'à ce que la figure atteigne son point de saturation. Celui-ci est arrivé à produire une équation algébrique du cercle osculateur en adoptant une vision dynamique de la limite. Car, il le décrit comme une limite inatteignable par le cercle circonscrit au triangle AB_nC_n , lorsqu'on donne à l'entier n des valeurs de plus en plus grandes dans $\mathbb{N}$. Et procède à une vérification de son travail en adoptant une vision statique de la limite. En effet, la fonction q qu'il convoque permet de déterminer toutes les abscisses des points communs au cercle (c_∞) avec la courbe (c) de la fonction carré. Grâce au changement de registres de représentations, ce dernier a compris que la valeur de l'ordre de multiplicité de l'abscisse $x(A)$ du point de tangence, lorsqu'elle est solution de l'équation $q(x)=0$, correspond à celle de l'intersection formée par la courbe (c) et le cercle (c_∞) à la position du

point A dans le registre graphique de l'environnement de géométrie dynamique. Ainsi, comme $q(0)=0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{q(x)}{x}=0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{q(x)}{x^2}=0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{q(x)}{x^3}=0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{q(x)}{x^4}=1 \neq 0$ (ou encore comme $q(0)=0$, $q'(0)=0, \dots, q^{(3)}(0)=0$ et $q^{(4)}(0) \neq 0$), il peut conclure que l'ordre de multiplicité de l'intersection que forme la courbe de la fonction carré avec le cercle (c_∞) au point d'abscisse 0 est égal 4. Puisque la valeur de (m) vaut 4 ; c'est le cercle (c_∞) qui forme avec la courbe au point A , l'intersection dont l'ordre de multiplicité est le plus élevé permettant au participant de confirmer que le cercle (c_∞) est le cercle osculateur.

En termes de conceptualisations, premièrement, il a retenu qu'au point de saturation de la figure, il pouvait poursuivre avec la même technique de rapprochement sans jamais atteindre la position du A ni la surpasser. Deuxièmement, il a retenu que grâce à une autre technique de rapprochement, il a fait arriver à la position du point A les représentants des points B et C . Les définitions du cercle osculateur proposées par ce lycéen et ci-dessus encadrées, nous permettent de dire que la composante inférence du schème du participant lui a permis de construire des connaissances prédictives, selon lesquelles une technique de rapprochement inépuisable permet de décrire le cercle osculateur comme étant une position limite au sens d'une position inatteignable. Pendant qu'une technique de rapprochement épuisable permet de décrire le cercle osculateur comme étant une position limite au sens d'une position atteignable. Ce qui nous permet de déduire que, grâce à l'articulation de la technique géométrique de rapprochement inépuisable avec la technique géométrique de rapprochement épuisable, ce participant a accédé à une compréhension géométrique du caractère dual de la notion de limite lorsqu'elle

est associée à la notion de cercle osculateur. Les productions écrites de ce participant ci-dessus encadrées, montrent qu'il tente avec succès de transférer dans le registre analytique, la technique de rapprochement inépuisable mise en œuvre dans le registre graphique. En effet, il a convoqué la propriété de non dénombrabilité de l'ensemble des entiers naturels pour écrire les coordonnées des points B_n et C_n , de sorte que, d'une part, l'on puisse faire converger continuellement chacun des points suscités vers la position du point A , sans jamais l'atteindre ni le surpasser, lorsqu'on donne à l'entier naturel n des valeurs de plus en plus grandes. Et d'autre part, le rapprochement inépuisable entre les points en jeu implique un rapprochement inépuisable du cercle circonscrit au triangle AB_nC_n vers une position limite, au sens d'une position inatteignable.

En termes de conceptions, les productions écrites de ce participant ci-dessus encadrées montrent que ce dernier a développé dans le registre analytique une façon d'écrire une équation algébrique du cercle osculateur suivant une vision dynamique de la limite. Grâce à la non dénombrabilité de l'ensemble $\mathbb{N}$, il a présenté le cercle osculateur comme étant la position limite au sens d'une position inatteignable des positions occupées par la suite des cercles circonscrits au triangle AB_nC_n sus-décrit, lorsqu'on donne à l'entier naturel n des valeurs de plus en plus grandes dans l'ensemble $\mathbb{N}$.

En termes de connaissances mathématiques construites, la technique mise en œuvre pour construire les suites de points $(B_n)_n$ et $(C_n)_n$ de la courbe (c) , montre que le lycéen a retenu que c'est une technique analytique de rapprochement inépuisable qui va lui permettre dans ce registre de représentation de décrire le cercle osculateur comme étant une position limite au sens d'une position inattei-

nable. La distinction faite par le lycéen, entre une technique de rapprochement inépuisable et une technique de rapprochement épuisable dans ce registre de représentation, montre que ce dernier a accédé à une compréhension analytique du caractère dual de la notion de limite lorsqu'elle est associée à la notion de cercle osculateur. En effet, le lycéen constate que la position du cercle osculateur est une position atteignable puisque les zooms inverses lui ont permis de faire en sorte que le cercle sécant atteigne sa position limite dans le registre graphique de l'environnement géométrie dynamique.

En termes de perspectives sur la courbe de la fonction, la technique mise en œuvre pour écrire les coordonnées des points B_n , et C_n montre que le participant X a mis en fonctionnement et en articulation les perspectives locales, globales et ponctuelles sur la courbe de la fonction carré, pour produire une équation algébrique du cercle osculateur suivant une vision dynamique de la limite. En effet, lorsqu'on donne à l'entier naturel non nul n , des valeurs de plus en plus grandes dans l'ensemble $\mathbb{N}$, les points B_n et C_n se trouvent dans des voisinages de plus en plus fins ou de plus en plus resserrés autour du point A . De plus, lorsqu'on fait tendre n vers l'infini, les représentants des points B_∞ et C_∞ coïncident avec le représentant du point A . Ce qui traduit la mise en fonctionnement des perspectives locales sur la courbe de la fonction pour appréhender le cercle osculateur. Aussi, les représentants des points B_n ou C_n sont deux à deux distincts et non dénombrables. Ce qui traduit la mise en fonctionnement des perspectives globales sur la courbe de la fonction. Enfin, les suites des points $(B_n)_n$ et $(C_n)_n$ sont construites, de sorte que, d'une part, les points A et B_∞ coïncident et d'autre part, les points A et C_∞ coïncident également. Ce qui traduit une mise en fonctionnement des perspectives ponctuelles sur la courbe de la fonction. Nous déduisons alors

que, le transfert dans le registre analytique, de la technique géométrique du rapprochement inépuisable, a provoqué chez le lycéen la mise en articulation et en fonctionnement des perspectives locales, globales et ponctuelles sur la courbe de la fonction, afin que ce dernier écrive une équation algébrique du cercle osculateur suivant une vision dynamique de la limite et en adoptant une vision locale.

5. – Conclusion Générale

Nous sommes partis des constats selon lesquels, la notion de point commun est utilisée pour désigner à la fois le point de concours des objets sécants (intersection simple) et le point de tangence (intersection multiple) ; le lycéen ne possède pas des outils lui permettant de passer de la notion de meilleure approximation affine à la notion de meilleure approximation circulaire ; la mise en œuvre de certaines techniques pour construire le point de tangence occulte les propriétés locales des courbes tangentes. Et pourtant, le point de tangence est un point multiple dont la technique mise en œuvre pour le construire est susceptible de mettre en évidence les propriétés locales des courbes tangentes. Dans le but de faire évoluer chez le lycéen la conception point d'intersection simple vers la conception point d'intersection multiple, dans un environnement de géométrie dynamique, nous avons proposé au lycéen des techniques lui permettant de construire le point de tangence liant le cercle osculateur à une courbe, en faisant arriver à la position d'un point considéré A les représentants de certains points d'intersection simples. Cette approche a permis au lycéen de donner du sens à la notion de point d'intersection multiple dans un cadre numérique. La notion d'ordre de multiplicité du point de tangence a permis au lycéen de regarder le cercle osculateur comme étant la meilleure approximation circulaire de la courbe au voisinage du point de tangence. De plus, le transfert dans le cadre de l'analyse des

sens donnés à cette notion, lui a permis d'écrire une équation algébrique du cercle osculateur en adoptant une vision locale.

Dans ce travail de recherche, nous ne prétendons pas avoir inventé une technique de construction géométrique du cercle osculateur. Cependant, nous introduisons dans la littérature l'idée de construire un représentant du cercle osculateur avec la géométrie dynamique. Pour cela, nous introduisons une nouvelle approche opérationnelle dans le registre graphique du logiciel GeoGebra qui consiste à faire arriver à la position d'un point A , les représentants de deux points d'intersection simples B et C situés sur la courbe de part et d'autre du point A , pour obtenir un représentant du point de tangence liant le représentant du cercle osculateur avec la courbe de la fonction. Par la construction des points non attrapables et l'usage des techniques géométriques de rapprochements inépuisable et épuisable, nous introduisons aussi une approche opérationnelle permettant de déterminer la valeur exacte de l'ordre de multiplicité du point de tangence liant un cercle osculateur avec une courbe à valeur de (p) finie. Dufour (2019) souligne que la dualité de la notion de limite peut être une source de difficultés à l'apprentissage de la notion de cercle osculateur lorsqu'il est regardé sous l'angle de la limite. Grâce à l'articulation de la technique de rapprochement inépuisable avec la technique de rapprochement épuisable pour construire un représentant du cercle osculateur, nous proposons une nouvelle approche susceptible de favoriser chez le lycéen la compréhension géométrique du caractère dual de la notion de cercle osculateur lorsqu'il est appréhendé sous l'angle de la limite. Grâce aux transferts de ces techniques géométriques, nous proposons au lycéen une suite de cercles sécants à la courbe permettant de décrire le cercle osculateur dans le registre analytique comme étant une position limite au sens d'une position atteignable

et une autre suite de cercles sécants à la courbe permettant de le décrire comme étant une position limite au sens d'une position inatteignable. Ces deux suites sont susceptibles de faire accéder le lycéen à une compréhension analytique du caractère dual de la notion de cercle osculateur. Par ailleurs, les perspectives locales provoquées par la technique du zoom proposée par (Maschietto, 2004) ne permettent pas de passer de la notion de meilleure approximation affine à la notion meilleure approximation circulaire. Sur ce point, nous apportons notre contribution. En effet, les perspectives locales provoquées par la construction des éventuels points non attrapables et l'usage des techniques géométriques de rapprochements inépuisable et épuisable permettent de construire des représentants des cercles osculateurs, en se focalisant sur la détermination des valeurs exactes de l'ordre de multiplicité des points de tangences, dans le cas d'une courbe à valeur de (p) finie. En cela, elles peuvent permettre à la classe de passer plus facilement de la notion de meilleure approximation affine à la notion meilleure approximation circulaire. Maschietto (2004) à la suite de (Tall, 1985) décrit l'absence chez le lycéen des perspectives locales sur la courbe pour appréhender la notion de tangence avec une vision locale. Sur ce point, nous apportons notre contribution. Ainsi, la visualisation de l'arrivée des représentants de points d'intersection simples et d'éventuel(s) point(s) non attrapables(s) à la position d'un point considéré, pour former le représentant du point de tangence liant le cercle osculateur avec une courbe plane à valeur de (p) finie, est une technique qui met en évidence le caractère local de la notion de tangence, lorsqu'elle est travaillée à partir de la notion de cercle osculateur.

Les limites de notre étude résident dans le fait que, nous avons travaillé avec quatre lycéens de classe de terminale scientifique, ayant chacun, une grande capacité d'abstraction et

de généralisation. Même si ce choix visait en premier ressort, à présenter les potentialités qu'offre l'environnement de géométrie dynamique du logiciel GeoGebra pour aider le lycéen à faire évoluer la conception point d'intersection simple vers la conception point d'intersection multiple, afin qu'il appréhende la notion de cercle osculateur avec une vision locale, il n'en demeure pas moins que l'effectif de notre population est un obstacle à toutes velléités d'une généralisation péremptoire de nos résultats de recherche.

Dans notre étude, nous nous sommes attardés sur la présentation des potentialités qu'offre l'environnement de géométrie dynamique. Pour compléter ce travail, nous envisageons une étude visant à mettre en évidence les difficultés du lycéen liées aux techniques mises en œuvre pour construire le point de tangence liant le cercle osculateur avec une courbe à valeur de (p) finie, comme une piste intéressante à explorer. Aussi, une étude diachronique portant sur un effectif consistant de la population, peut également être une piste intéressante à explorer pour valider ou invalider nos résultats de recherche.

Giscard NGUEMBOU NANA

Université de Yaoundé I

Références bibliographiques

- Delgadillo, E. M., Murillo, R. P., & Vivier, L. (2016). Conceptions spontanées et perspectives de la notion de tangente pour des étudiants de début d'université. *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics, Mar 2016, Montpellier, France*, 11.
- Dufour, S. (2019). *Des processus de compréhension sous l'angle des représentations : Un Teaching Experiment autour de la dérivée*. Thèse de doctorat, Université de Montréal au Canada.
- Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, p. 37-65.
- Gergonne. (1830). Géométrie transcendante. De la courbure des courbes planes. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 21, p.1-40.
http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__1_0
- Maschietto, M. (2004). Le jeu entre point de vue local et point de vue global en Analyse : Une ingénierie didactique à visée diagnostique au niveau première. *Actes du colloque de mulhouse 8 -9 mars 2002*.
<https://iris.unimore.it/handle/11380/611469#.YQSbsb1KjIU>
- Merker, J. (2014). *Courbure des surfaces dans l'espace : Le Theorema Egregium de Gauss*.
<https://arxiv.org/pdf/1402.1018>
- Nguembou-Nana, G. (2022). Géométrie dynamique, un instrument pour la construction des sens sur le concept de droite tangente vue sous le prisme de la limite : Une étude de cas auprès des lycéens de classe de première scientifique au Cameroun. In A. Cossi Adihou & F. CHELLOUGUI (Éds.), *Actes du colloque ADIMA3, Hammamet-Tunisie*.
https://e-irem.ucad.sn/pluginfile.php/186/mod_resource/content/4/Actes%20colloque%20ADiMA%203%202022%20%20%284%29.pdf

- Nguembou-Nana, G. (2023). Géométrie dynamique, un instrument pour la construction de sens sur le concept d'ordre de multiplicité du point de tangence. *MathémaTice*, 85.
<http://revue.sesamath.net/spip.php?article1568>
- Panero, M. (2018). Les pratiques enseignantes concernant la dérivée dans le secondaire. *Actes Du Séminaire National de l'ARDM – 19 Novembre 2016*, p. 304-324.
<https://ardm.eu/manifestations/seminaire-ddm-ardm/>
- Petitjean, S. (1995). *Géométrie énumérative et contacts de variétés linéaires : Application aux graphes d'aspects d'objets courbes* [Institut National Polytechnique de Lorraine].
<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751230v1/document>
- Restrepo, A. M. (2008). *Génèse instrumentale du déplacement en Géométrie dynamique chez les élèves de 6^{ème}* [Phdthesis, Université Joseph-Fourier – Grenoble I].
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00334253>
- Steffe, L., & Thompson, P. (2000). *Teaching experiment methodology : Underlying principles and essential elements* (p. 267-307).
- Steffe, L., Thompson, P., & Glasersfeld, E. (2000). Teaching experiment methodology : Underling principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, p. 267-306.
- Tall, D. (1985). Chords, tangents and the Leibniz notation. *Mathematics Teaching*, 112, p. 48-52.
- Tangence. (1935). In *Dictionnaire de l'Académie Française* (8^e édition, p. 637).
<http://www.dictionnaire-academie.fr/article/A8T0117>
- Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'études des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(46), p. 711-717.
- Vergnaud, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. *Conférence publiée dans les Actes du Colloque GDM-200*, 22.

Annexe

Annexe 1 – Les points de la géométrie dynamique

Restropo (2008) propose une caractérisation des trois points de la géométrie dynamique, comme suit :

« Le point libre qui peut se déplacer partout ; le point sur objet, qui ne se déplace que sur l'objet (segment, droite, cercle) ; le point non attrapable, qui ne peut pas être attrapé et déplacé directement, mais qui dépend d'un autre point (point d'intersection, milieu). Ces trois types de points définissent des instruments déplacement caractérisés par des usages du déplacement. **Déplacement libre** : déplacer un point libre partout dans l'écran. **Déplacement contraint ou limité** (bound dragging) : déplacer des points qui se trouvent sur un objet et qui ne peuvent être déplacés que sur cet objet (courbe d'une fonction). **Déplacement indirect** : les points non attrapables, ne pouvant pas être déplacés directement, ils ne peuvent être déplacés que par l'intermédiaire d'un autre en attrapant et déplaçant des points « sources » à partir desquels sont définis les points non attrapables. Par exemple, le milieu I du segment $[AB]$, ne peut pas être déplacé directement, mais en déplaçant les points A ou B , I sera déplacé de manière indirecte. » (2008, p. 24)