
SOMMAIRE

Editorial	3
<i>Un enseignement de l'algèbre structuré par la modélisation, du secondaire au supérieur</i>	5
Pierre JOB, Mariza KRYSINSKA, Maggy SCHNEIDER	
<i>L'enseignement des polynômes lors de la transition secondaire-supérieur</i>	39
Juliette VEUILLEZ-MAINARD	
<i>Rubrique Parutions</i>	62
<i>Vie des IREM</i>	68
Appel à contribution pour le numéro spécial <i>L'oral en mathématiques</i> d'octobre 2023 Consignes pour soumettre un article	
<i>Développer une expression numérique ou algébrique : quel(s) discours enseignant(s) ?</i>	71
Cécile BARTHÈS-GARNIER, Lalina COULANGE, Christophe HACHE	
<i>Rubrique Multimedia</i>	91
<i>Rubrique Agenda</i>	103
Abonnements, réabonnements	104
Liste des Irem	105
Sommaire du prochain numéro	106

EDITORIAL

L'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre sont une source continue de préoccupation, pour les chercheurs, pour les enseignants comme pour les élèves. Les raisons de cet intérêt sont multiples et parfois évidentes. Tout enseignant de mathématiques connaît la rupture et les difficultés que représente l'entrée dans l'algèbre pour nombre d'élèves. Or, l'algèbre et les écritures symboliques occupent une place centrale dans la pratique mathématique ; c'est pourquoi ce champ et son enseignement ont été maintes fois questionnés, analysés, sans pour autant l'épuiser. Ce numéro se propose de poursuivre la réflexion à la lumière de l'évolution de la place des mathématiques dans l'enseignement et la formation du citoyen, et aussi des changements de pratique de son enseignement.

Les trois articles proposés ici abordent l'algèbre sous l'angle du sens, des moyens utilisés pour donner du sens et ancrer les objets et méthodes de l'algèbre. Ils sont fondés sur de nombreux exemples, du collège au supérieur, pour nourrir la réflexion des praticiens.

Le premier article, écrit par Pierre Job, Mariza Kryszynska et Maggy Schneider, vise l'objectif ambitieux d'établir un modèle épistémologique de référence pour l'algèbre, vue comme discipline enseignée. Le travail de nature didactique s'ancre dans le cadre de la théo-

rie anthropologique du didactique. En étudiant les objets et signes manipulables attachés aux objets algébriques, les auteurs proposent une prise de sens de l'algèbre par la modélisation, en attachant le sens des objets aux modèles dont ils sont issus ou aux situations auxquelles ils répondent. Cette théorie est étayée par de nombreux exemples, du collège au lycée. Un plaidoyer pour une mise en œuvre concrète est développé, notamment, à travers la confrontation des outils de l'algèbre à des modèles de l'économie. Le travail d'aller-retour entre le modèle, la situation et l'outil permettent de lui attacher du sens, de gommer l'effet d'étiquetage algébrique et d'ancrer le sens des outils algébriques.

Le deuxième article, écrit par Juliette Veuilleux-Mainard, se concentre sur le cas des polynômes et élabore une analyse de leur enseignement entre lycée et supérieur, principalement les classes préparatoires. L'outil de guidage est la conception de cartes conceptuelles. Il fait émerger, sous d'autres formes, l'approche de caractéristiques algébriques, analytiques ou géométriques de ces objets et leurs articulations. La démarche est originale, visuellement riche et propose des classifications alternatives complémentaires de celles mises en valeurs dans les deux précédents articles. Il fait apparaître continuités et ruptures dans l'enseignement des polynômes à la transition secondaire-supérieur. L'angle

EDITORIAL

d'analyse est souvent curriculaire. La construction des cartes mentales fait apparaître des difficultés typiques de la transition mais aussi des spécificités du thème des polynômes.

Le troisième article, écrit par Cécile Barthès-Garnier, Lalina Coulangue et Christophe Hache, étudie le discours de plusieurs enseignants qui accompagne la mise en œuvre de la distributivité au cycle 4. Il prolonge un travail de la première auteure. L'investigation est fondée sur la verbalisation considérée par les auteurs comme le plus à même d'éclairer la pratique du calcul algébrique dans ses différentes dimensions. Après un passage par les manuels, l'article se focalise sur les usages langagiers des enseignants pour évoquer ou travailler la propriété de distributivité. Les comparaisons entre les formulations de plusieurs enseignants donnent corps aux hypothèses des auteurs, notamment le fait que « les verbalisations associées à des écritures de produits (numériques ou algébriques) ne sont plus "normées", en tout cas au sens où elles pouvaient l'être autrefois, en vue

d'assurer une forme de cohérence explicitement liée à des connaissances ou à des notions mathématiques exposées en amont. »

La rubrique multimédia de ce numéro 128 a été prise en charge par le groupe PION de l'Irem d'Aix-Marseille. Cet article, écrit sous la forme d'un retour d'expérience, questionne l'utilisation d'exerciceurs dans l'enseignement supérieur et secondaire. Deux exemples d'utilisation, l'un avec Wims dans le Secondaire, l'autre montrant un usage de l'ENT Moodle dans le Supérieur viennent illustrer les différentes analyses proposées par le groupe PION. Une des richesses de ce texte réside dans la présentation du point de vue de différents acteurs concernant l'utilisation des exerciceurs, à savoir celui d'enseignants en collège, lycée, université, et en école d'ingénieurs.

Bonne lecture pour ce numéro spécial qui prolonge les réflexions autour de l'algèbre, de ses enjeux et de ses modalités d'enseignement à tous les niveaux d'enseignement.

J-A Weil & S.Yvain-Prébiski

PARUTIONS

Tous les articles de Repères Irem, du premier numéro jusqu'au dernier numéro (N°127, juin 2022) inclus, sont consultables et téléchargeables librement en ligne sur le site de Repères Irem (portail des Irem) à l'adresse suivante :

<http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique24>

PARUS dans les IREM

- **Repères IREM**, N°127, juin 2022, revue des IREM publiée sous le patronage de l'Assemblée des directeurs d'IREM, Grenoble, ISSN 1157-285X, édition pour le compte de l'ADIREM et diffusion-distribution Université Grenoble Alpes - IREM de Grenoble, CS 40700, 38058 Grenoble Cedex, (contacts : tél. +33 (0)4 76 51 44 06 ; Fax +33 (0)4 76 51 42 37 ; courriel irem-secretariat@univ-grenoble-alpes.fr).

VIENT DE PARAÎTRE

Revues, bulletins, lettres d'information

- *BGV-Bulletin grande vitesse de l'APMEP*, N°224, « Spécial Journées nationales 2022 à Jonzac », mai-juin 2022, édition en ligne, diffusion Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, 26, rue Duméril, 75013 Paris, ISSN 0296-533X, Téléchargeable en libre accès au format PDF à partir de l'adresse : <https://www.apmep.fr/Le-BGV,7239>
- *BGV-Bulletin grande vitesse de l'APMEP*, N°225, juillet 2022, édition en ligne, diffusion Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, 26, rue Duméril, 75013 Paris, ISSN 0296-533X, Téléchargeable en libre accès au format PDF à partir de l'adresse : <https://www.apmep.fr/Le-BGV,7239>
- *Au fil des maths - Le bulletin de l'APMEP*, fil rouge : « Mathématiques durables », N°544, avril-mai-juin 2022, diffusion Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, 26, rue Duméril, 75013 Paris, consultable en ligne à l'adresse : <https://afdm.apmep.fr/rubriques/sommaire/n544/>
- *Au fil des maths - Le bulletin de l'APMEP*, fil rouge : « Maths et élèves à besoins particuliers (1) », N°545, juillet-août-septembre 2022, diffusion Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, 26, rue Duméril, 75013 Paris, consultable en ligne à l'adresse : <https://afdm.apmep.fr/rubriques/sommaire/n545/>
- *Visage 2022-2023 de l'APMEP*, Plaquelette annuelle de présentation de l'APMEP, diffusion Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, 26, rue Duméril, 75013 Paris, téléchargeable à l'adresse <https://www.apmep.fr/-Visages-de-l-APMEP->

- *EpiDEMES*, nouvelle revue en ligne hébergée par la plateforme Episciences, dirigée par Hussein Sabra et Nicolas Grenier-Boley. Ce premier numéro a été coordonné par Louise Nysen et Avenilde Romo (Mexique) : <https://epidemes.episciences.org/volume/view/id/444#>.

Sites Web

Mise en fonction du site *Réseau Thématique Pluridisciplinaires du CNRS sur les recherches autour des questions d'éducation*, consulter <https://rtp-education.cnrs.fr/>

Ouvrages

Histoire du calcul graphique, Dominique Tournès (dir.), Paris: Cassini 548p. ISBN 978-2-84225-239-7, 70€

La (Re)construction française de l'analyse infinitésimale de Leibniz 1690-1706, Sandra Bella, Classiques Garnier. ISBN 978-2-406-12388-0, 45€, 548p., Paris, 2022

NOUS AVONS LU ...

MathemaTICE, N°81, septembre 2022,

Revue en ligne éditée par l'association Sesamath, consultable en ligne en libre accès à l'adresse Web : <http://revue.sesamath.net/> (contact : mathematice@sesamath.net)

Voici les articles du numéro :

- Nathalie Carrié propose d'utiliser le trio Appliquer/Extraire/Combiner afin de coder les algorithmes au cœur même de la notion de Fonction. Appliquer des fonctions à des listes de données, Extraire d'une liste de données les données vérifiant certains prédicats, Combiner des données à l'aide d'un opérateur permettront de coder de nombreux algorithmes comme la suite de Syracuse en faisant une incursion au pays de la programmation fonctionnelle ;
- Paul Byache et le groupe PION de l'IREM Aix-Marseille s'interrogent depuis plusieurs années sur l'utilisation d'exerciceurs et leur mise en œuvre sur le plan pédagogique. Cette première partie de l'article est écrite sous la forme d'un retour d'expérience ;
- Patrick Raffinat présente une banque d'exercices intégrée à ScratchGGB, un logiciel de programmation par blocs couplé avec GeoGebra. Elle couvre les différents thèmes algorithmiques abordés au Collège : variables, instructions conditionnelles, boucles et sous-programmes ;
- Yves Martin propose d'explorer - ou pour une partie de nos lecteurs, peut-être même de découvrir - les Géométries Non Euclidiennes (GNE dans la suite) à l'aide de la géométrie dynamique, par le prisme de plusieurs parcours proposés d'un nouveau site dédié, mis en ligne en mars 2022 ;
- Mathieu Degrange suggère à ses élèves de déplacer un alien selon un programme Python, sur une grille dont chaque case est numérotée. Ils exécutent dans leur tête le programme Python et en déduisent la case sur laquelle se trouve l'alien à la fin de l'exécution du programme. Une intéressante démarche d'informatique débranchée ;

PARUTIONS

- Alain Busser a chargé ses élèves de Seconde en SNT de reproduire les deux dernières figures de l'article de Sierpiński titré « Sur une courbe dont tout point est un point de ramification » (1915). Ils l'ont fait au crayon sur papier pointé, ou à l'aide du module turtle de Python. Où l'histoire rejoint la pédagogie ;
- Jean-Mouis Maltret a rédigé un article conçu par le groupe Histoire de l'IREM d'Aix-Marseille. Il présente un parcours m@gistere, destiné à montrer comment les systèmes de numération et les algorithmes réalisant les opérations élémentaires ont permis, par leur développement, d'arriver aux techniques modernes de résolution d'équations algébriques ;
- Mikhaïl Fomin décrit les expériences de bilinguisme dans deux universités colombiennes, pour mieux préparer l'entrée dans la vie professionnelle des futurs diplômés. Il s'agit d'intégrer une seconde langue dans le cours même de la formation des étudiants.

Yves Ducel (Irem de Besançon)

MathemaTICE, N°80, mai 2022,

Revue en ligne éditée par l'association Sesamath, consultable en ligne en libre accès à l'adresse Web : <http://revue.sesamath.net/spip.php?rubrique200> (contact : mathematice@sesamath.net)

Voici les articles du numéro :

- Anne Heam passe en revue cinq activités visuelles avec le langage Python, portant sur les notions transversales de programmation de Seconde. Des activités « clés en mains » qui pourront être reprises aisément par les collègues enseignant à ce niveau, ou en SNT ;
- Sarah Maati offre aux lecteurs de MathémaTICE un article atypique et courageux. Elle y raconte ses souffrances d'élève et sa récente découverte de l'histoire des mathématiques, qui a métamorphosé sa perception et l'enseignement de cette discipline à l'École primaire ;
- Vincent Pantaloni partage sa passion pour GeoGebra (dont il est un ambassadeur) dans une interview avec Patrick Raffinat, où il aborde aussi la théorie mathématique du jonglage ;
- Mickaël Bosco s'interroge : « Apprendre en s'amusant, est-ce vraiment possible ? ». En guise de réponse, il présente un scénario pédagogique créé et mis en place au sein des deux années du cycle préparatoire intégré de l'École d'Ingénieurs Esaip, sur le campus d'Aix-en-Provence ;
- Basile Sauvage détaille dans cet article, une série d'activités d'informatique débranchée, construites ou adaptées par l'Irem de Strasbourg. Le concept commun est celui des arbres binaires, qui sont déclinés dans différentes activités, permettant d'aborder plusieurs concepts de la science informatique ;
- Jean-Yves Labouche a imaginé le projet googlem@ths, qui consiste en une série de problèmes avec des tâches complexes, dont l'élément déclencheur est une vue aérienne tirée de Google Maps ;
- Fabrice Houpeaux élabore une classe Matrice en Python 3, et en montre les utilisations (instanciation, opérations, tests d'appartenance et d'égalité, affichages...). L'article met en oeuvre la programmation orientée objet en Python 3 ;
- Patrice Debrabant réfléchit, dans ce second article qu'il consacre à la Machine de Turing, à

la notion de complexité algorithmique. Celle-ci mesure la quantité de ressources (temps ou espace mémoire) consommée pour résoudre un problème. Là où la calculabilité détermine si on peut le faire en théorie, la complexité en précise le coût, autrement dit si on peut le faire en pratique. Ce déplacement de problématique conduit à des questions fondamentales dont la plupart sont ouvertes.

Yves Ducel (Irem de Besançon)

Histoire du calcul graphique, Tournès Dominique (dir.), Paris, Cassini. 2022. 548p. ISBN 978-2-84225-239-7. 70€

Qu'est-ce que le calcul graphique? Le calcul graphique est fondé « sur l'interaction entre les deux grands types d'objets mathématiques que sont les nombres et les figures, autrement dit l'algèbre et la géométrie. Une unité de longueur étant choisie, les données numériques sont, le plus souvent, représentées sur la feuille de dessin par des longueurs de segments. On réalise ensuite des constructions géométriques qui aboutissent à de nouveaux segments dont les longueurs représentent les valeurs inconnues cherchées » (p. 3). Dans l'ouvrage sous recension, les auteurs, spécialistes du domaine, souhaitent étudier l'histoire de cette discipline, constituée à partir du 19e s. et jusqu'aux années 1970, en Europe, aux États-Unis ou encore en Russie (p. 465). Si, pour Tournès, la première apparition de l'expression « calcul graphique » est due à Louis-Ézéchiél Pouchet en 1795 dans son *Arithmétique linéaire*, les différentes contributions ici réunies montrent que l'histoire de ce type de calcul est plus ancien.

Dans le premier chapitre (p. 11-51), G. Zverkina présente les « méthodes graphomécaniques dans l'Antiquité » avec principalement les contributions des mathématiques grecques (après celles babyloniennes, égyptiennes et même russes). C'est l'occasion de revenir sur les notions de courbes dans les mathématiques grecques et de constructions à la règle et au compas. Ce chapitre s'achève sur une brève présentation fort intéressante de plusieurs instruments mécaniques de calcul.

Ensuite, pour les pays d'Islam, entre le 9e et le 15e s., A. Djebbar présente, dans le chap. 2 (p. 53-81), à la fois des instruments géométriques et des procédés mécaniques ou graphiques évoqués par les sources rédigées en arabe. S'illustrent plusieurs mathématiciens et géomètres bien connus et d'autres davantage délaissés par l'historiographie. Djebbar conclut sur l'idée que la multiplication des procédés mécaniques ou graphiques, en pays d'Islam, apparaît comme une « réponse à une demande sociétale » (p. 78). Son chapitre contribue pleinement à le montrer.

D. Tournès rédige les deux chapitres suivants. Dans le troisième (p. 83-129), il se concentre sur la « résolution graphique des équations algébriques ». Partant des fondements du calcul graphique, avec Descartes, Tournès nous amène jusqu'aux solutions nomographiques, c'est-à-dire jusqu'aux solutions construites à l'aide de tables graphiques, autrement appelées « abaques » (p. 108-109). Ainsi, les « abaques et nomogrammes » sont l'objet de l'important chap. 4 (p. 131-230) qui attire le lecteur vers la découverte de la nomographie, nouvelle discipline mathématique à part entière (p. 185). Tournès y détaille les principales tables graphiques utilisées dès le 18e s. et jusqu'au 20e s., avec une remarquable expansion dans la première moitié du 20e s. « Peu onéreux, de faible encombrement et d'une précision suffisante pour les besoins courants de la technique, les abaques l'ont emporté avant tout par rapidité des calculs qu'ils permettent » (p. 131). Sont ainsi présentés les abaques à lignes concourantes et les nomogrammes à points alignés.

PARUTIONS

Le chapitre 5 est rédigé par K. Chatzis autour de « la statique graphique : heurs et malheurs d'une science d'application » (p. 231-304). Cette science permet « de répondre, sans passer par l'analyse, à la quasi-totalité des questions ayant trait à l'art de la construction » (p. 231). Liée aux besoins des ingénieurs et autres techniciens, elle est riche d'une histoire de plusieurs siècles (entre le 18e et la fin du 20e s). Chatzis propose ici de retracer cette histoire qui prendra fin avec le remplacement général des méthodes graphiques par les calculs par ordinateur.

J. Fisher donne à voir les « instruments graphomécaniques d'intégration » (et leurs fabricants) dans le chap. 6 (p. 305-394), à savoir les instruments mécaniques qui permettent de calculer des intégrales définies ou indéfinies (p. 305). Pas moins de seize types d'appareil – dont les trois-quarts sont des planimètres – sont examinés dans ce chapitre avec une emphase toute particulière sur leurs concepteurs et/ou fabricants.

D. Tournès est à nouveau l'auteur du chapitre suivant (p. 395-464) avec la « résolution graphique des équations différentielles », se proposant de « dégager les grandes idées qui sous-tendent l'intégration graphique des équations différentielles et de rechercher leurs origines » (p. 395).

Enfin, le dernier chapitre « historiographie du calcul graphique » (p. 465-539) rédigé par M.-J. Durand-Richard est une pièce essentielle de l'ouvrage, notamment pour le double point de vue historiographique et épistémologique adopté. En effet, il permet – sous une forme conclusive – de saisir les enjeux scientifiques, culturels et sociaux de la naissance et le développement d'une discipline scientifique, nécessairement empreint du contexte qui la porte. Il montre aussi spécifiquement que le calcul graphique « témoigne du fait que l'histoire des mathématiques ne se déroule pas seulement dans le cercle protégé des universités, mais au contact des réalités du monde » (p.526).

L'ouvrage est richement illustré ; il offre aux lecteurs une représentation visuelle des instruments et de certaines méthodes. Les chapitres sont suffisamment conséquents pour que chaque auteur puisse présenter instruments et méthodes sans négliger les aspects techniques nécessaires à leur bonne compréhension. Même si le sujet est hyper-spécialisé, les auteurs ont fait un bel effort pour se faire comprendre. En plus d'un index des personnes citées dans l'ouvrage (p. 541-548), chaque chapitre est complété de sa propre bibliographie. Le travail d'édition est tout aussi remarquable que celui des auteurs. Par conséquent, je recommande vivement ce livre à tous les historiens des sciences mathématiques, et plus généralement, à tous les enseignants de mathématiques qui sauront en tirer profit pour créer de belles activités pédagogiques (particulièrement en lycée). C'est aussi l'occasion de rencontrer de nombreux acteurs des mathématiques méconnus, voire inconnus, comme ces nombreux ingénieurs, techniciens, artisans, concepteurs et/ou fabricants qui ont significativement contribué au développement du calcul graphique.

Marc Moyon, IREM de Limoges

Matheopolis. Tome 0 : Origine et pouvoir des mathématiques, Francis Loret, Pierre Seguin et Fabrice Lli, Maths pour tous, IREM de Lyon, IREM d'Aix-Marseille. 2020. 189p. ISBN 978-2-906-943681. 8€

Matheopolis, c'est l'histoire d'une jeune fille Laurence Guerney qui perd sa mère à 8 ans. Elle vit avec son père, chercheur de renommée internationale. Alors que Laurence atteint ses 14 ans, son père décède à son tour au cours de l'un de ses voyages contraignant sa fille à vivre avec son grand-père paternel, ancien pêcheur de Marseille. Les résultats scolaires de l'adolescente semblent relativement médiocres. Le décor est ainsi planté.

Alors qu'elle butte sur un exercice à propos du théorème de Thalès, une riche conversation débute avec son grand-père. Elle découvre les carnets de voyage de son propre père et entre ainsi dans ses questionnements philosophico-scientifiques. Elle est d'abord réfractaire à l'idée de comprendre les mathématiques, leur ontologie et leur épistémologie restant bloquée sur la seule question utilitaire. Mais, les interrogations bien amenées de son grand-père et les exemples choisis la poussent progressivement dans une réflexion personnelle captivante. Elle découvre alors sa capacité à « voir » les objets mathématiques – invisibles dans le monde réel – à l'intérieur d'une cité idéale : Mathéopolis. Elle y rencontre plusieurs mathématiciens comme Euclide, al-Khwârizmî, Fibonacci, Léonard de Vinci, Descartes, Einstein... Le lecteur découvre ainsi une partie de l'histoire des mathématiques, richement illustrée par Fabrice Lli.

Laurence trouve le secret des mathématiques grâce aux carnets de son père. Elle souhaite suivre ses traces et participer à sa manière à la construction de Mathéopolis en se fixant « un objectif qui [relève] de la folie : accéder aux entrailles de la conjecture de Goldbach, ce n'[est] ni plus moins que de chercher à devenir l'une des plus grandes mathématiciennes du monde » (p.186). En réalité, Mathéopolis est bien plus qu'un roman illustré, c'est un projet éditorial collaboratif (de l'association Maths pour tous avec le soutien des IREM de Lyon et d'Aix-Marseille) dont seul le « Tome 0 : origine et pouvoir des mathématiques » est l'objet de cette recension. Il suffit de se rendre sur le site dédié : <https://www.matheopolis.org> [consulté le 14 août 2021] pour s'en rendre compte. En particulier, d'autres documents et diverses activités sont directement accessibles en ligne.

La lecture de ce roman est fluide et les illustrations permettent aux lecteur·rice·s de voyager dans le temps et dans l'espace. C'est une entreprise réussie de ce point de vue-là. J'attends, pour ma part, les autres volumes en préparation (le tome 1 est à paraître prochainement d'après les informations du site). Le présent roman donne envie d'aller plus loin : je suis convaincu qu'il peut donner envie de (re)faire des mathématiques. Enfin, je suis certain qu'il invite positivement les lecteur·rice·s (qu'il·elle·s soient élèves, enseignant·e·s ou simplement curieux·ses) à aller chercher et lire des éléments d'histoire des mathématiques. Ce complément me semblerait même nécessaire ; les auteurs ont sans doute dû faire des choix pour « romancer » quelque peu cette histoire des mathématiques.

Marc Moyon, IREM de Limoges