REPERES - IREM. N° 118 - janvier 2020

QUEL JET VA LE PLUS LOIN ? [1]

Brigitte CHAPUT [2]
Hamid HADIDOU [3]

Ires de Toulouse

Introduction

Dans ce travail mené en classe de Première Professionnelle *Systèmes numériques*, nous traitons une situation en sciences physiques dans laquelle la problématique trouve sa réponse par l'expérience mais dont la généralisation du résultat nécessite une modélisation mathématique.

La séquence comporte trois activités qui amènent progressivement les élèves à s'interroger sur un phénomène, à le modéliser et à le simuler en utilisant un modèle théorique pour une généralisation.

Dans l'activité 1, l'élève est mis face à une situation de jets d'eau issus d'une colonne percée en 5 endroits, il doit émettre une hypothèse sur la forme des jets et sur la position de leurs points d'impact avec le plan de base. Cela donne lieu à un débat dans la classe car plusieurs conceptions peuvent s'affronter. Pour trancher, la mise en place d'une expérience est nécessaire, nous l'avons montée nous-même et l'avons filmée. Nous n'avons pas jugé pertinent de demander ce travail aux élèves, car notre objectif portait sur la modélisation et non sur l'investigation.

Le choix du modèle fait l'objet de l'activité 2 où l'élève doit réinvestir les notions vues

1 Les fichiers de travail associés à cet article sont disponibles en ligne https://ires.univ-tlse3.fr/lycee-professionnel/2019/07/26/documents-quel-jet-va-le-plus-loin-reperes-118/
2 Brigitte CHAPUT, formatrice en mathématiques, ENSFEA Auzeville-Tolosane, IRES de Toulouse
3 Hamid HADIDOU, IRES de Toulouse

sur le second degré en particulier sur l'interprétation des coefficients. Cela fait appel à un ajustement par une parabole sur une photo de l'expérience réalisé en utilisant GeoGebra.

Dans l'activité 3, la validation du modèle choisi se fait par une étude[4] théorique dont les élèves admettent le résultat car elle est hors de leur portée.

Pour conclure, un retour d'expérience est présenté pour tester les acquis des élèves sur cette problématique.

Photo de l'expérience

Pourquoi cette problématique ?

L'idée de l'activité présentée dans cet article a émergé lors du colloque[5] « *Maths et autres : continuité et innovation* » organisé à Rouen du 18 au 21 mai 2016. Nous y avions présenté une séquence d'étude du principe fondamental de l'hydrostatique $\Delta P = \rho g h$ avec en introduction l'observation des jets d'eau issus d'une bouteille percée à différents niveaux et remplie d'eau maintenue à niveau constant, ce qui sensibilise les élèves à diverses propriétés dont :

— la sortie du jet perpendiculairement au plan du trou,

— le lien entre profondeur et pression...

Une remarque d'une participante nous a conduits à nous intéresser à la distance de la bouteille au point d'impact du jet sur le plan de base. Cette séquence s'inscrit dans la démarche pédagogique préconisée dans le programme de Mathématiques Sciences physiques et chimiques de la voie professionnelle (Bulletin officiel spécial n° 2 du 19 février 2009) :

1. Prendre en compte la bivalence
3. S'appuyer sur l'expérimentation
4. Identifier les acquisitions visées : connaissances, automatismes et capacités à résoudre des problèmes
6. Proposer des activités de synthèse
8. Intégrer les TIC dans les apprentissages
9. Mettre l'élève au travail, individuellement ou en groupe

Plus particulièrement, les connaissances du programme de mathématiques de la classe de Première sont mobilisées :

— Nature et allure de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto a\,x^2 + b\,x + c$ (a réel non nul, b et c réels) en fonction du signe de a.

La séquence fait suite à celle sur la pression où le principe fondamental de l'hydrostatique, $\Delta P = \rho g h$ est établi.

4 Cette étude est donnée en annexe 3 pour l'enseignant.

5 Colloque organisé conjointement par les Commissions inter-IREM collège et lycée professionnel inscrit dans le plan académique de formation des professeurs de mathématiques et de mathématiques - sciences physiques.

La planification de la séquence est la suivante :

— Introduction de la problématique
— *Activité 1 :* Réflexion sur la forme de la trajectoire d'un jet d'eau (travail par groupes de deux)
— Réalisation de l'expérience et conjecture sur le résultat (débat en classe entière)
— Évaluation diagnostique sur les fonctions polynômes du second degré
— *Activité 2 :*
  - Modélisation mathématique : réinvestissement des acquis sur les paraboles
  - Travail pratique de modélisation avec GeoGebra (travail en groupes : chaque groupe traite un trou)
  - Travail de synthèse en classe entière
— Institutionnalisation du résultat : étude théorique (admise)
— *Activité 3 :* Simulation avec GeoGebra pour différentes hauteurs d'eau et différentes hauteurs de trou
— Retour d'expérience : vérification du résultat établi avec des bouteilles percées de trous à différents endroits convenablement choisis
— Pour aller plus loin : d'autres plans d'impact des jets que le plan de base

Activité 1 : Forme de la trajectoire d'un jet d'eau (disponible en ligne)

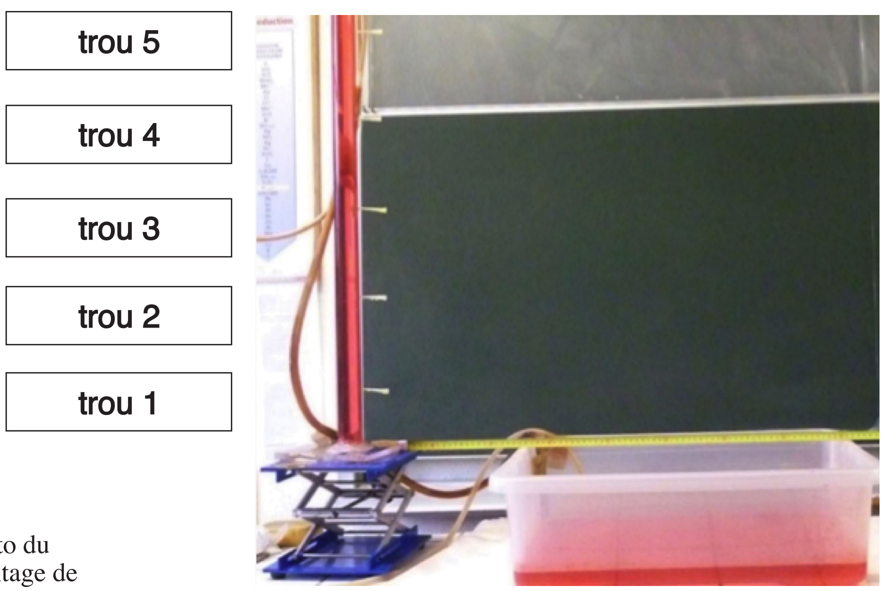


Photo du montage de l'expérience

Problématique :

On dispose d'une colonne cylindrique percée de 5 trous à différentes hauteurs, posée sur un plan horizontal. On remplit la colonne d'eau colorée : l'eau s'échappe par les trous. Une pompe péristaltique en circuit fermé permet de maintenir un niveau d'eau constant dans la colonne. L'objet du problème est la forme des jets d'eau si on enlève les bouchons des trous.

On présente aux élèves le montage de l'expérience de la page précédente.

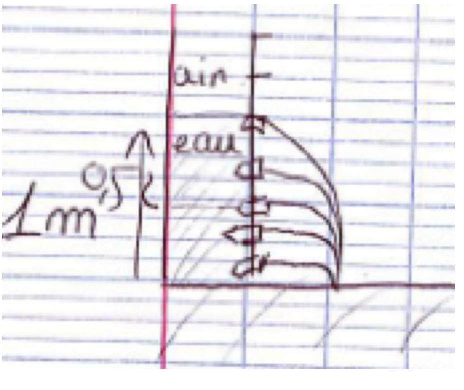
Travail demandé aux élèves :

— Dessiner une figure représentant les différents jets issus des cinq trous.

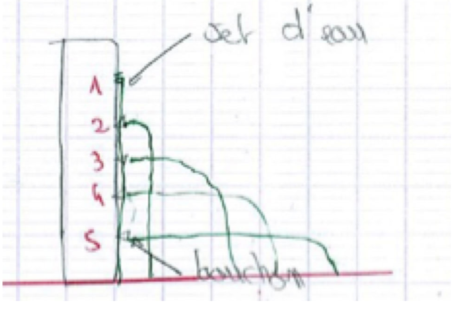
— Quel(s) trou(s) permet(tent) au jet d'eau correspondant d'atteindre un point du plan de base le plus éloigné de la colonne ?

Débat : Travail par groupe de deux élèves, puis échange entre les groupes. Les réponses des élèves sont de trois types[6] :

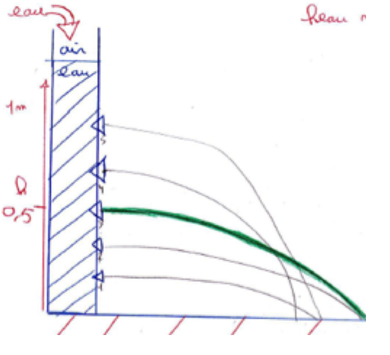
— Tous les jets arrivent au même endroit



— Le jet du trou le plus bas va le plus loin



— Plus rarement : le jet du trou du milieu va le plus loin



Ce temps de débat et d'échange met les élèves en situation d'apprentissage (recherche d'une réponse, argumentation...).Ils émettent des hypothèses et des arguments pour répondre à la question, voici quelques réponses d'élèves :

- *Le rapport pression/hauteur fait que chaque jet arrivera à la même distance.*
- *Je pense que le jet le plus puissant est le numéro 1.*
- *Je pense que c'est au bouchon numéro 3 que le jet d'eau va être le plus puissant car je pense que la pression de l'eau et de l'air qui*

6 Voir les travaux d'élèves plus complets en annexe 1.

se trouve au-dessus émet une pression ce qui favorise la puissance du jet. Pour les bouchons 1 et 2, la pression et la puissance seront élevées mais ils sont trop proches du sol.

- *Le trou du milieu car il a le meilleur rapport pression/puissance.*
- *C'est le jet numéro 3 car la pression sera plus forte au milieu : le 5 n'a pas assez de pression, le 4 n'a pas encore assez de pression. le 2 a plus de pression que le 3 mais est plus près du sol, le 1 a la plus forte pression mais est trop près du sol pour avoir le plus grand jet.*
- *Je pense que c'est celui qui est tout en bas car l'air se trouvant en haut, il fait pression, ce qui en descendant augmente la puissance du jet.*
- *Je pense que c'est le dernier trou qui va donner le plus gros jet car il y a plus de poids au-dessus de lui car il y a plus d'eau et donc plus de pression.*

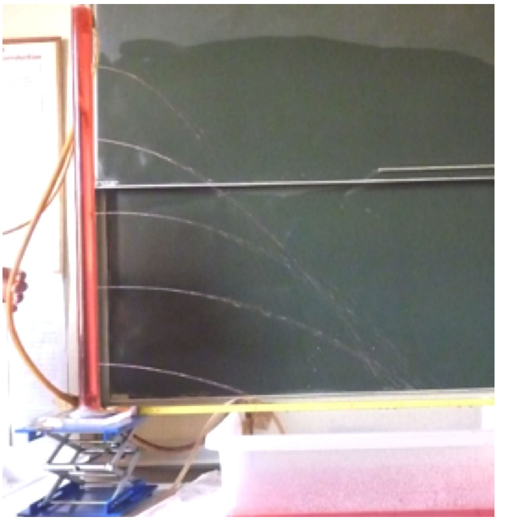
Les réponses proposées sont loin de faire l'unanimité. Les débats sont animés.

Au cours de leur recherche, certains élèves tentent de trouver une réponse en modélisant la situation par l'intervention de la vitesse, de la pression ou de la force, ils tentent d'établir une équation mais leurs connaissances ne sont pas suffisantes pour cela.

Nous avons questionné des enseignants stagiaires en mathématiques, en physique-chimie et en mathématiques-physique-chimie : on constate leur déstabilisation face à la situation qui n'est pas intuitive et souvent leur conclusion est erronée. Nous avons trouvé la même conclusion erronée dans des schémas d'ouvrages scientifiques ! Nous vous encourageons, cher lecteur, à émettre votre avis avant de poursuivre la lecture de l'article ! … Il y a nécessité de faire l'expérience pour décider.

Mise en place de l'expérience

Conditions expérimentales



— Une colonne cylindrique de hauteur 950 mm, de diamètre 35 mm, posée sur un plan horizontal et percée de cinq trous à différentes hauteurs(hauteurs des trous en millimètres : 100, 250, 400, 550 et 700).

— Les trous sont identiques, de même diamètre 1,5 mm, petit devant le diamètre du tube. Les trous sont fermés par des bouchons.

— On remplit le tube avec de l'eau colorée jusqu'à une hauteur de 800 mm maintenue constante.

— Lorsque l'on débouche un des trous, il se forme un jet d'eau colorée qui s'évacue dans une bassine de longueur 530 mm.

À la projection d'un film de l'expérience (disponible en ligne) où les cinq trous sont débouchés, il semble que le jet qui va le plus loin est celui issu du trou n° 3. Qu'a donc de particulier ce trou n°3 ?

La réponse à cette question passe par la réalisation d'un certain nombre d'expériences avec différentes hauteurs de trou ou par la modélisation.

Modélisation : Quelle est la forme des jets d'eau colorée ?

Réponse attendue : parabolique

La modélisation de la trajectoire des jets par une parabole fait l'objet de l'activité 2 suivante et requiert certaines connaissances mathématiques :

— Étude de la fonction carrée et des fonctions $x \longmapsto a\,x^2 + c$ où a et c sont des réels (a non nul).

— Lien entre la concavité de la parabole et le signe de a.

— Symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées.

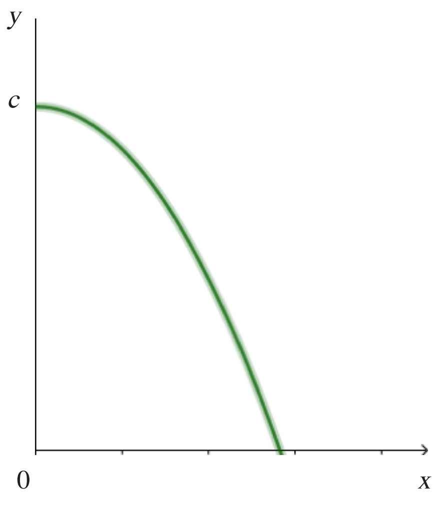
— Interprétation du coefficient c.

Activité 2 : Recherche d'un modèle mathématique[7]

Cette activité requiert la connaissance des fonctions du second degré et de leurs propriétés par les élèves. C'est l'occasion de les réinvestir. Nous proposons en annexe 2, une évaluation diagnostique sur les polynômes du second degré en utilisant GeoGebra qui peut être réalisée en amont de cette activité 2.

Partie théorique : Travail en commun

On choisit de travailler dans le repère ci-contre. On a représenté une demi-parabole de sommet de coordonnées (0 ; c).



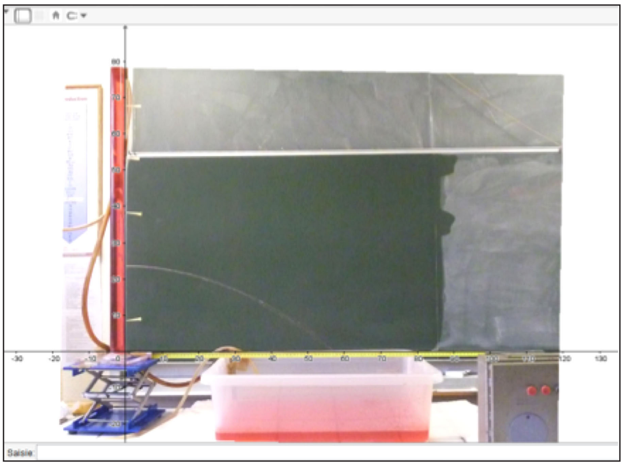
☞ Si la parabole a pour équation $y = f(x)$, quelle forme doit prendre $f(x)$?

Réponse attendue : $f(x) = a\,x^2 + c$ avec $a < 0$.

7 Disponible en ligne

Partie pratique : Travail par groupes

Les élèves ont accès à cinq fichiers GeoGebra : Trou1.ggb, Trou2.ggb, Trou3.ggb, Trou4.ggb et Trou5.ggb comportant chacun en arrière-plan la photo d'un des jets d'eau colorée. L'origine du repère orthonormal est placée au niveau du plan de base, à la verticale des trous. Chaque groupe se voit attribué l'un des fichiers.



Exemple : Saisie d'écran du fichier associé au trou numéro 2

☞ Ouvrir le fichier attribué au groupe.

Le but du travail est de construire une parabole qui épouse la trajectoire du jet d'eau.

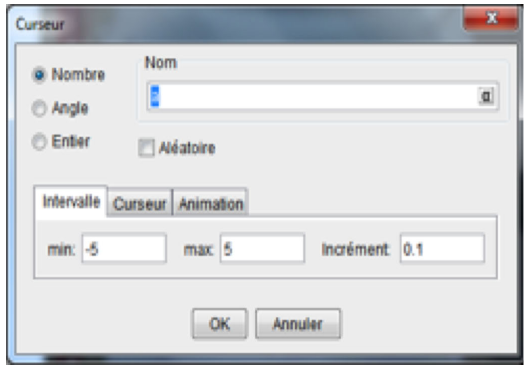
☞ Placer un point S au sommet de la demi-parabole qui modélise la trajectoire du jet d'eau colorée. Pour cela, utiliser le bouton *Point* puis cliquer à l'emplacement du point S dans la fenêtre graphique et renommer le point construit.
Pour plus de précision, on peut déplacer le point créé en cliquant sur le bouton *Déplacer* , puis en sélectionnant le point S qu'on déplace avec la souris ou avec les flèches de déplacement.

☞ Quelles sont les coordonnées de S (fenêtre *Algèbre*) ?

☞ Quelle est la forme d'une équation de la parabole modélisant la trajectoire du jet d'eau colorée ?

Création d'un curseur *a*

☞ Cliquer sur le bouton, puis cliquer dans la fenêtre graphique. Une fenêtre s'ouvre où on indique les paramètres du curseur, modifier les valeurs par défaut en fonction de ce que l'on connaît sur le signe de *a*.



☞ Cliquer ensuite sur OK.

Remarques : L'enseignant sera amené à sensibiliser les élèves aux choix de :

— L'intervalle de parcours du curseur (idéalement [- 1 ; 0[) ;

— L'incrément du curseur (idéalement 0,001) ;

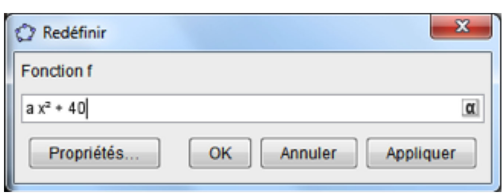
— Le nombre de décimales affichées pour *a* en utilisant la commande *Arrondi* du menu *Options*.

Création de la fonction $f : x \longmapsto a\,x^2 + 40$

☞ Écrire $f(x) = ax^2 + 40$ dans la ligne de saisie de GeoGebra, en bas de la fenêtre (40 étant choisi arbitrairement). La courbe représentative de la fonction se crée.

☞ Double-cliquer sur l'équation de la parabole dans la fenêtre *Algèbre* et remplacer 40 par un nombre bien choisi pour que le point *S* soit le sommet de la parabole représentant *f*.

☞ Agir sur le curseur *a* pour faire coïncider la courbe avec la trajectoire du jet d'eau colorée de la photo.



☞ Quelle fonction représente la trajectoire du jet d'eau ?

Numéro du trou : .... Expression algébrique de la fonction : ....

Synthèse des travaux des groupes

L'enseignant réalise un fichier GeoGebra projeté au tableau. Il y saisit les cinq résultats des élèves et la réponse à la problématique est formalisée : c'est le jet issu du trou n° 3 qui va le plus loin.

Le film de l'expérience avec les cinq jets simultanés peut être alors réexploité. En fait, le jet qui va le plus loin, est celui qui est issu du trou central. Reste à expliquer pourquoi celui-là. Cela passe par une étude théorique.

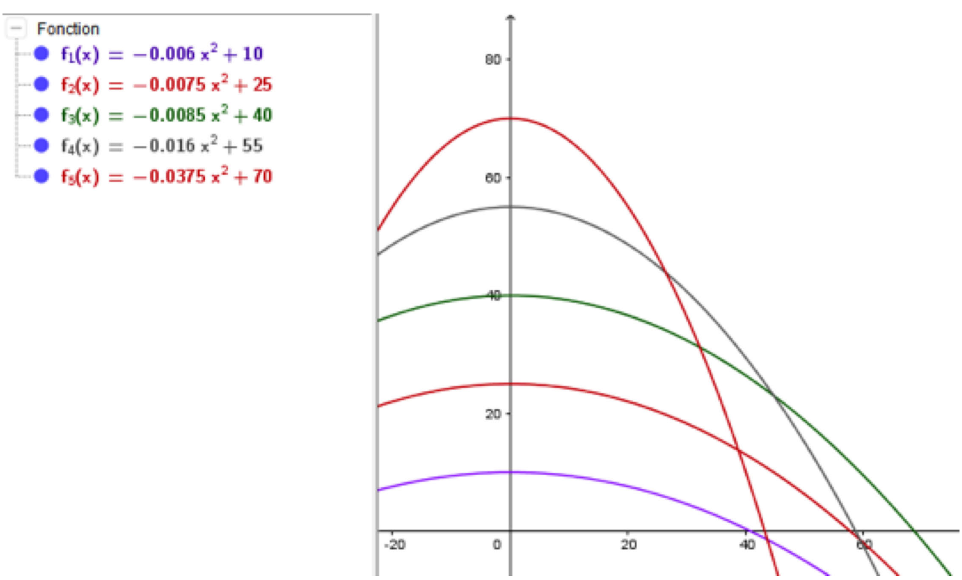
Remarques : Cette situation est intéressante sur le plan pédagogique.

En effet, si l'on pose aux élèves la question : Comment évolue la pression en un point d'un liquide lorsque la profondeur augmente ? Intuitivement, la réponse des élèves va dans le sens de ce qu'attend le professeur. Il suffit alors qu'ils vérifient leur hypothèse expérimentalement. Il n'y a aucun conflit entre ce qu'attend le professeur et ce que proposent les élèves.

Or dans la situation de la distance du point d'impact du jet en fonction de la hauteur du trou, la réponse ne semble pas évidente et suscite l'intérêt, provoque un débat dans la classe et la nécessité de trouver une réponse scientifique.

Pour beaucoup d'élèves, la longueur du jet sur le plan horizontal augmente avec la profondeur. Ce qui est faux : il y a donc une confusion dans l'esprit de ces élèves. Ceci peut

Modélisation des cinq jets



être dû à un lien trop rapide entre la pression en un point du liquide qui augmente avec la profondeur (notion qui a été étudiée en amont pour nous) et la distance du point d'impact du jet sur un plan horizontal.

On pourrait faire l'analogie avec un exemple en probabilité [8].

Situation 1 : Je lance une pièce de monnaie, je pense qu'elle a la probabilité 1/2 de tomber sur « Pile ». Le professeur et les élèves ont le même modèle *naturel*, il n'y a pas de conflit.

Situation 2 : Je lance deux pièces de monnaie identiques. Quelle est la probabilité d'avoir une « Pile » et une « Face » ?

Réponses possibles : 1/3 ou 1/2.

Qui dit vrai ? Comment le savoir ? Ici, dans ce contexte de probabilités, il y a conflit entre le modèle *naturel* de l'élève et le modèle *mathématique* du professeur.

Étude théorique

Une équation de la parabole modélisant la trajectoire du jet d'eau est $y = \dfrac{-x^2}{4(H-h)} + h$ où H est la hauteur d'eau dans la colonne et h la hauteur du trou (où $h < H$ et où H, h, x et y sont exprimées en centimètres). Une démonstration de ce résultat est donnée en annexe 3, elle est destinée aux enseignants et ne concerne pas les élèves. L'enseignant peut néanmoins faire un commentaire sur le résultat en faisant remarquer qu'une fois la hauteur d'eau H et la hauteur du trou h fixées, l'équation est semblable à celle qu'ils ont établie, à savoir $y = a\,x^2 + c$ avec $a = \dfrac{-1}{4(H-h)} < 0$ et $c = h > 0$.

L'activité 3 proposée ensuite, consiste en la manipulation de cette relation à l'aide de GeoGebra pour différentes hauteurs d'eau et différentes hauteurs de trou. On y confirme les résultats précédents.

Activité 3 : Simulation avec GeoGebra pour différentes hauteurs d'eau et différentes hauteurs de trous *(disponible en ligne)*

☞ Ouvrir un fichier GeoGebra et l'enregistrer sous le nom *Simulation*.

☞ Construire un curseur H variant de 0 à 100 avec un incrément de 1 cm.

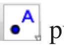
☞ Construire un curseur h variant de 0 à H avec un incrément de 1 cm.

☞ Construire la courbe représentative de la fonction f modélisant le jet d'eau :

$$f : x \longmapsto \frac{-x^2}{4(H-h)} + h .$$

☞ Tracer les points A et B d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abs-

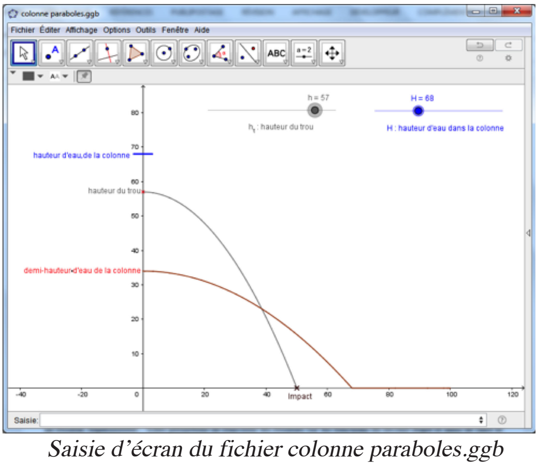
8 Repères Irem n° 32 juillet 1998 *Expérimenter et simuler en classe*, Michèle Gandit, Claire Helmstetter, Irem de Grenoble

cisses. Pour cela, cliquer sur le triangle en bas à droite du bouton *Point*  puis cliquer sur  et ensuite sur les deux éléments (la courbe et l'axe des abscisses).

☞ Pour différentes valeurs de H, déterminer l'abscisse maximale du point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses et remplir le tableau suivant :

H : hauteur d'eau dans la colonne									
D : distance maximale d'impact du jet avec le plan									
h : hauteur du trou pour un impact le plus éloigné									

☞ Déterminer une relation entre la hauteur du trou h et la hauteur d'eau H pour que le jet ait un impact le plus éloigné possible sur le plan.



Saisie d'écran du fichier colonne paraboles.ggb

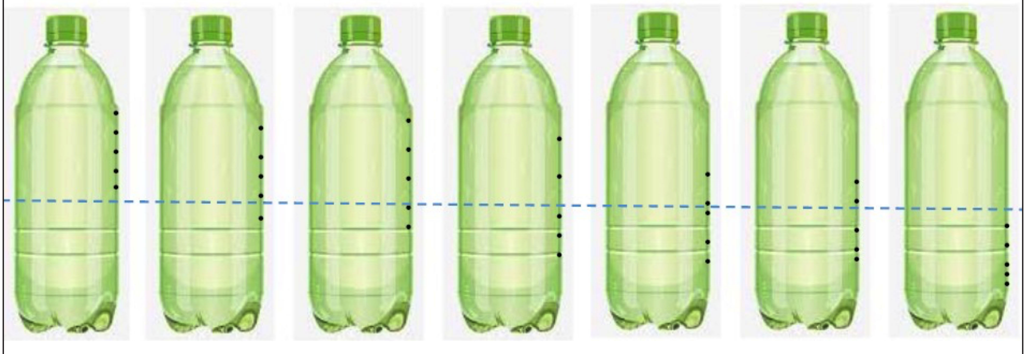
Le fichier GeoGebra colonne paraboles.ggb (disponible en ligne) peut être ensuite exploité avec les élèves. Il matérialise le jet optimal en fonction de la hauteur d'eau dans la colonne (en rouge).

Une action successivement sur les différents curseurs confirme que la hauteur du trou correspondant est $\frac{H}{2}$ et que la distance d'impact est H.

Retours d'expérience

Le réinvestissement des résultats précédents peut se faire à divers niveaux : d'une part en testant différentes situations de cinq trous sur des bouteilles remplies d'eau pour faire émerger le fait que le point d'impact du jet avec le plan de base de la bouteille est d'autant plus éloigné de la bouteille que le trou est proche de la mi-hauteur du liquide. On peut positionner les trous par rapport à la mi-hauteur de liquide, par exemple, comme indiqué sur la figure de la page suivante.

Un fichier (4-retour experience.docx) d'une activité possible est disponible en ligne. D'autre part, pour aller plus loin, on peut s'interroger sur les points d'impact des jets sur des plans horizontaux autres que le plan de base... Quelle que soit la position du plan d'impact, le jet va d'autant plus loin de la colonne que $H - h$ est proche de $\frac{H'}{2}$, où H' est la distance entre la surface de l'eau de la colonne et le plan d'impact. Un fichier GeoGebra



Des exemples de positionnement des trous

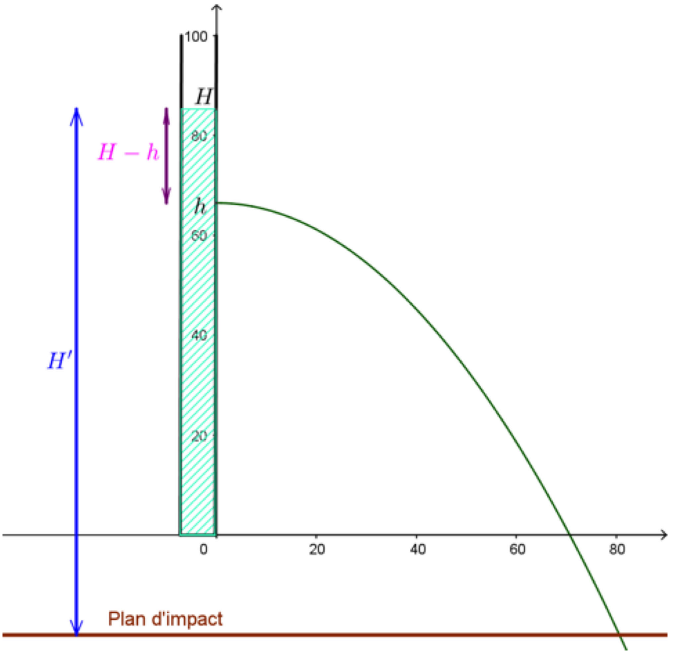


Schéma de l'expérience avec un autre plan d'impact

(5-autres plans impact.ggb) de simulation des différentes situations est disponible en ligne.

Conclusion

Ces activités amènent les élèves à se prononcer sur un phénomène physique et à réinvestir leurs connaissances sur les fonctions du second degré en donnant du sens aux coefficients du polynôme.

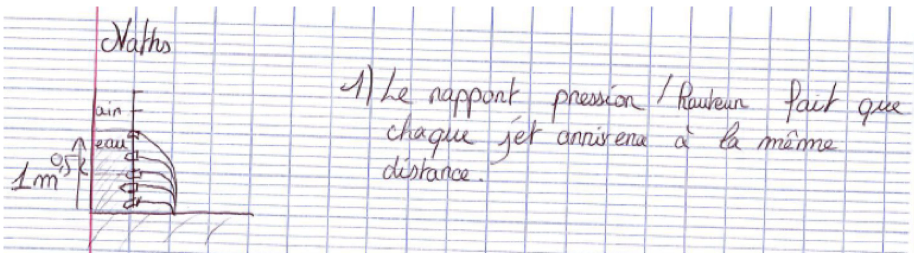
Le caractère non-intuitif de la problématique conduit à un débat au sein de la classe, constructif au niveau pédagogique. La validation de leurs propositions exige une réponse scientifique par l'expérimentation et par la modélisation.

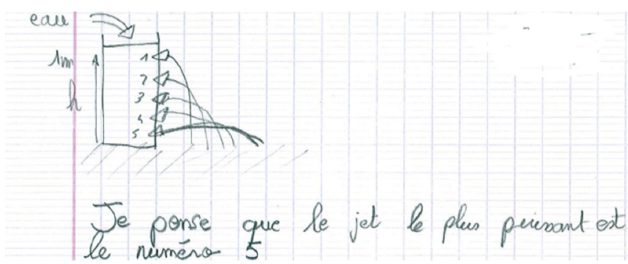
Une fontaine de Berlin

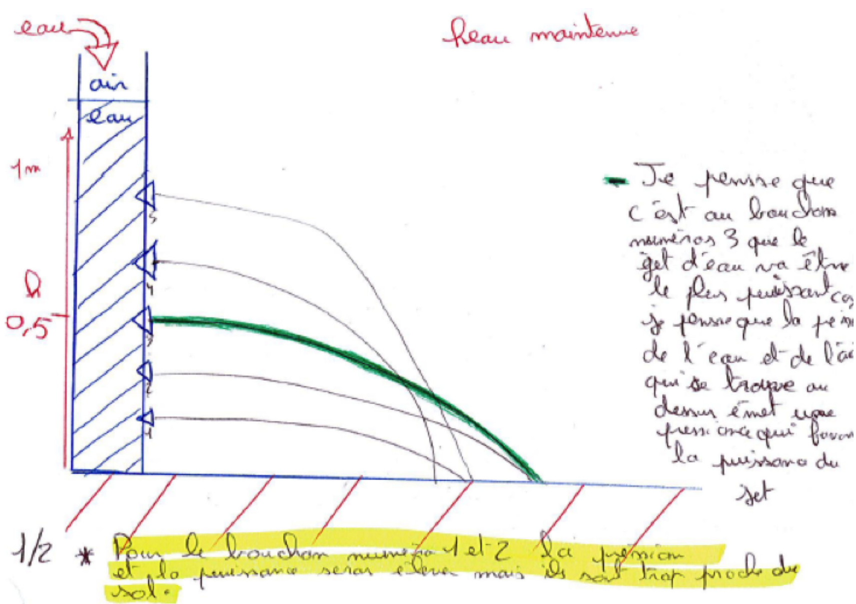
Un clin d'œil pour terminer ! Comment se fait l'apport en eau de la fontaine de Berlin ci-dessus : par une colonne unique et donc par gravité ou par des alimentations séparées de chaque niveau de jets ?...

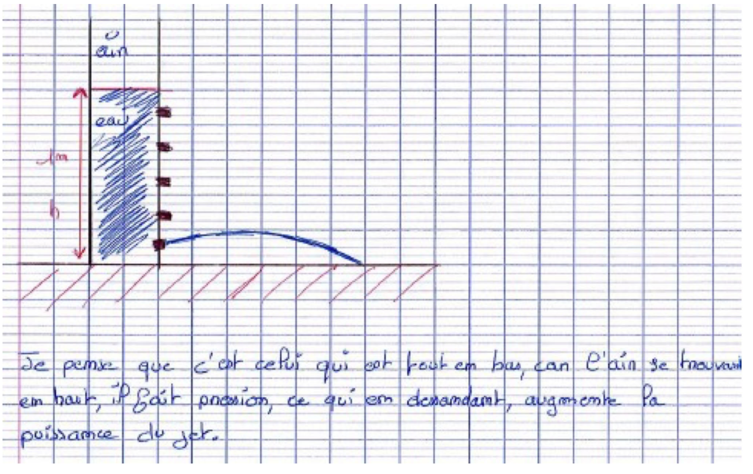
ANNEXE 1

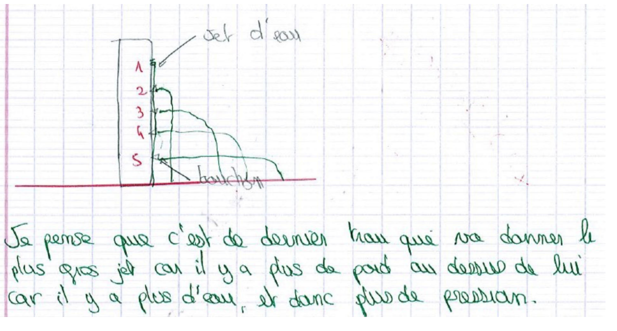
Des réponses d'élèves à l'activité 1

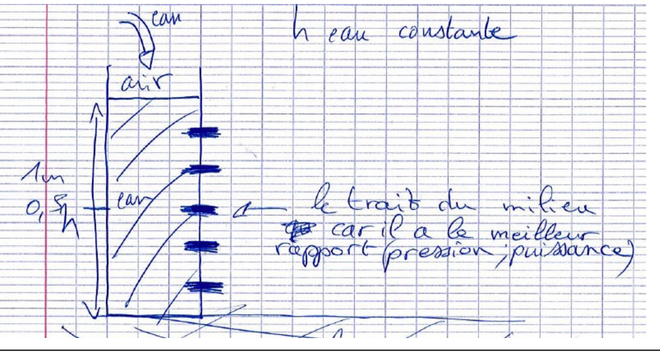


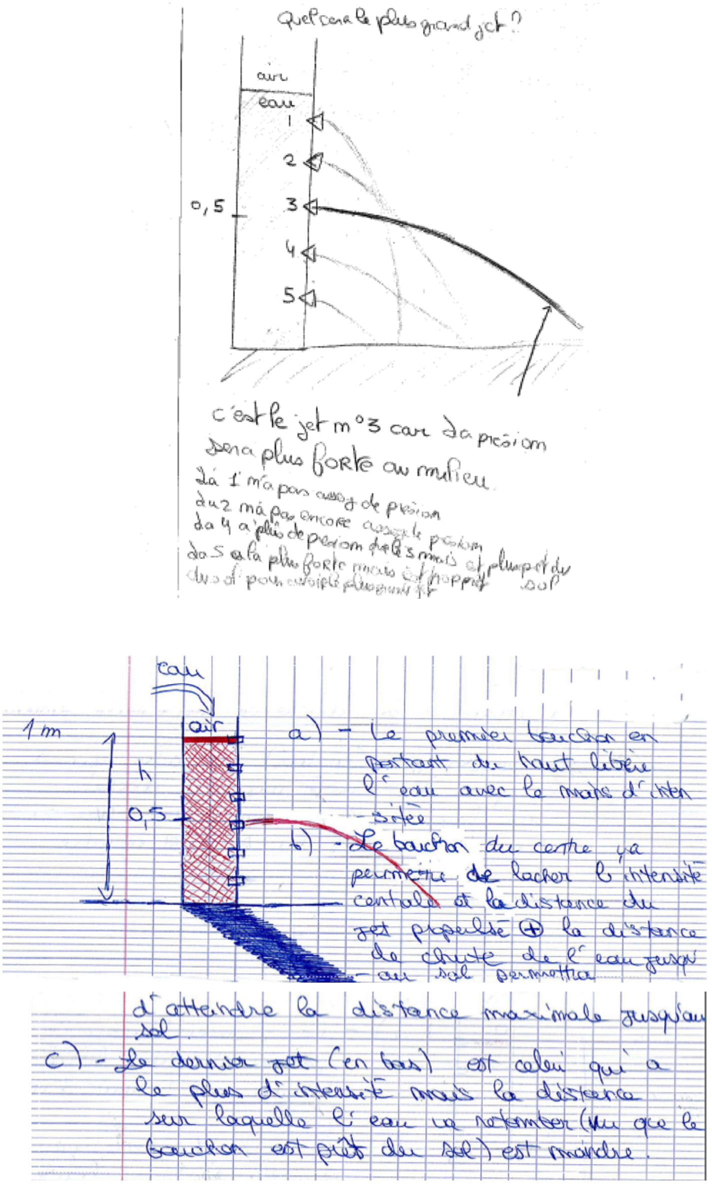





air
eau
1m
h
Je pense que c'est celui qui est tout en bas, car l'air se trouvant en haut, il fait pression, ce qui en descendant, augmente la puissance du jet.


Jet d'eau
1
2
3
4
5
bouchon
Je pense que c'est le dernier trou qui va donner le plus gros jet car il y a plus de poid au dessus de lui car il y a plus d'eau, et donc plus de pression.


eau
h eau constante
air
1m
0,5
h
eau
le trait du milieu
car il a le meilleur
rapport (pression ; puissance)


Quel sera le plus grand jet ?
air
eau
1
2
0,5
3
4
5
c'est le jet n°3 car la pression sera plus forte au milieu
la 1 n'a pas assez de pression
la 2 n'a pas encore assez de pression
1 m
eau
air
h
0,5
a) - Le premier bouchon en partant du haut libère l'eau avec le moins d'intensitée
b) - Le bouchon du centre va permettre de lacher l'intensité centrale et la distance du jet propulsé ⊕ la distance de chute de l'eau jusqu'au sol permettra d'atteindre la distance maximale jusqu'au sol.
c) - Le dernier jet (en bas) est celui qui a le plus d'intensité mais la distance sur laquelle l'eau va retomber (vu que le bouchon est prêt du sol) est moindre.

ANNEXE 2

Évaluation diagnostique - *Polynôme du second degré*

1. Toute fonction du second degré peut être définie par $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ sur l'ensemble des nombres réels.

✓ Y a-t-il des restrictions sur les coefficients a, b et c ?

……………………………………………………………………………………………

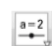
……………………………………………………………………………………………

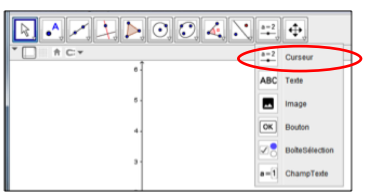
✓ Parmi les fonctions ci-dessous, cochez celles qui correspondent à une fonction du second degré :

☐ $x \longmapsto 1{,}5\ x^2 + 5x + 10$	☐ $x \longmapsto 2\ x^2 + 5$	☐ $x \longmapsto 3\ x + 10$
☐ $x \longmapsto 4\ x^3 + 3x^2 + 1$	☐ $x \longmapsto 3\ x + x^2$	☐ $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} - 3x + 1$
☐ $x \longmapsto \dfrac{x^2}{3x - 1}$	☐ $x \longmapsto \sqrt{1 - 3\ x^2}$	☐ $x \longmapsto (2\ x - 1)(x + 2)$

2. Influence des coefficients a, b et c ($a \neq 0$). Simulation à l'aide du logiciel GeoGebra

✓ Ouvrir un fichier GeoGebra.

✓ Créer trois curseurs a, b et c (incrément 0,1) en utilisant la commande *Curseur* , puis cliquer sur dans la fenêtre *Géométrie*.

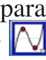


✓ Saisir la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ dans la zone de saisie.

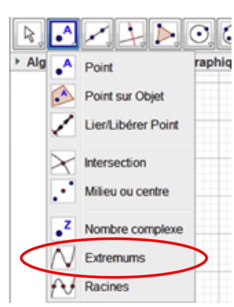
✓ Fixer $b = 1$ et $c = 1$, puis *observer* la concavité de la courbe selon la valeur du coefficient a. Cocher les bonnes réponses.

Si $a < 0$ les branches de la parabole sont orientées vers ☐ le haut ☐ le bas

Si $a > 0$ les branches de la parabole sont orientées vers ☐ le haut ☐ le bas

✓ Créer le point A sommet de la parabole avec la commande *Extrémums* , puis cliquer sur la courbe

✓



✓ Faire varier b, les autres coefficients restant inchangés et *observer* :
Que vaut b lorsque le sommet A est sur l'axe des ordonnées ? $\boxed{b = \ldots}$
✓ Fixer $b = 0$, faire varier c (a restant inchangé) et *observer* :
Quelle interprétation du coefficient c peut-on proposer ?
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
✓ Fixer $b = 0$, faire varier a dans l'intervalle $]-5\,;0[$ (c restant inchangé) et *observer* :
Quelle interprétation du coefficient a peut-on proposer ?
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
Choisir une valeur pour a et relever l'équation de courbe correspondante :
………………………………………………………………………………………
✓ Quelle est la particularité de cette famille de courbes d'équation $y = ax^2 + c$
(a étant non nul)
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

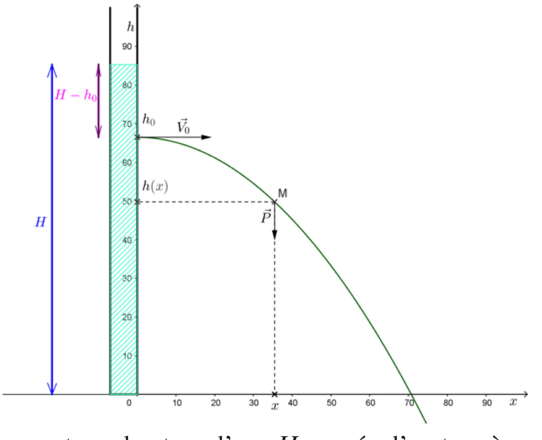
Remarques pédagogiques :

Selon les connaissances des élèves sur l'utilisation de GeoGebra, on peut modifier les indications sur les commandes à utiliser dans l'énoncé des questions.

Dans la question 1 nous proposons une fonction du second degré définie par un produit de deux polynômes du premier degré, cet exemple ne conditionne pas le déroulement de l'activité pluridisciplinaire et peut donc être éliminé selon le niveau des élèves.

ANNEXE 3

Démonstration du résultat théorique (pour l'enseignant)



Colonne d'eau ayant une hauteur d'eau H, percée d'un trou à une hauteur h_0 .

On étudie la trajectoire d'une goutte d'eau de masse m dans le plan $x0h$.

Bilan des forces : On néglige les frottements (air, vent...), la goutte est soumise uniquement à son poids $\vec{P}$.

Relation fondamentale de la dynamique : $\vec{P} = m\vec{\gamma}$ (1).

Projection de la relation (1) :

- Sur(Ox) : $0 = m\,\gamma_x$ donc $\gamma_x = 0$
- Sur (Oh) : $-P = m\,\gamma_h$

$\gamma_x = 0$ donc $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ et $\dfrac{dx}{dt} = a$ (où a est une constante), on en déduit que $x(t) = a\,t + b$

Or pour $t = 0$, $x = 0$ et donc $b = 0$

Pour $t = 0$, $\dfrac{dx}{dt} = v_0$ (vitesse initiale horizontale) donc $a = v_0$.

Finalement $x(t) = v_0\,t$ (2)

$-P = m\,\gamma_h$ d'où $-m\,g = m\,\gamma_h$ soit $-g = \gamma_h$ donc $\dfrac{d^2h}{dt^2} = -g$ et $\dfrac{dh}{dt} = -g.t + a'$

on en déduit que $h(t) = -g\,\dfrac{t^2}{2} + a'.t + b'$.

Or pour $t = 0$, $h = h_0$ et donc $b' = h_0$ avec h_0 la hauteur du trou par rapport au plan de base (le fond de la colonne). Pour $t = 0$, $\frac{dh}{dt} = 0$ (vitesse initiale horizontale) donc $a' = 0$.

Finalement : $h(t) = -\, g\,\frac{t^2}{2} + h_0$ (3)

(2) donne : $t = \frac{x(t)}{v_0}$ et (3) donne $h(t) = -\, g\,\frac{x(t)^2}{2v_0^2} + h_0$

Après élimination du temps, on obtient $h(x) = -\,\frac{1}{2}\, g\,\frac{x^2}{v_0^2} + h_0$

La formule de Torricelli (démontrée ci-dessous) donne : $v_0 = \sqrt{2g(H - h_0)}$ soit $v_0^2 = 2g(H - h_0)$.
On en déduit que la trajectoire de la goutte est incluse dans la parabole d'équation :

$$h = -\,\frac{1}{4(H - h_0)}\,x^2 + h_0\,.$$

Pour répondre au problème initial : Déterminons la distance à la colonne du point d'impact du jet avec le plan de base, c'est l'abscisse positive du point de la parabole ayant une ordonnée nulle.

Si $h = 0$, $\frac{1}{4(H - h_0)}\,x^2 = h_0$ et donc $x^2 = 4(H - h_0) \times h_0$,

puis $x^2 = 4(Hh_0 - h_0^2)$ et donc $x = 2\sqrt{Hh_0 - h_0^2}$.

On en conclut que la distance à la colonne du point d'impact du jet avec le plan de base est égale à : $2\sqrt{Hh_0 - h_0^2}$.

Déterminons pour quelle valeur de h_0 cette distance est maximale.

Pour cela, étudions les variations de la fonction $u \longmapsto 2\sqrt{Hu - u^2}$, ce sont les mêmes que celles de la fonction polynôme du second degré $u \longmapsto Hu - u^2$.

Son tableau de variation est :

u	$\frac{H}{2}$
Variation de la fonction	$\nearrow$ $\frac{H^2}{4}$ $\searrow$

Ainsi la distance à la colonne du point d'impact du jet avec le plan de base est maximale quand $h_0 = \frac{H}{2}$ et alors elle vaut H.

Formule de Torricelli :

Démontrons que la vitesse v d'écoulement du liquide vérifie $v^2 = 2gh$.

Conditions de l'expérience :

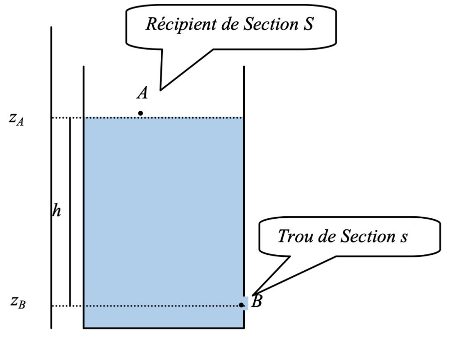
— On considère un fluide parfait.

— Un récipient de forme cylindrique de grande taille de section S.

— Le récipient est percé d'un trou de section s très petite devant la section S du récipient. ($s \ll S$)

— Le récipient est rempli d'un liquide de masse volumique ρ .

Considérons deux points A et B à des altitudes respectives z_A et z_B tels que représentés sur la figure ci-dessous :



On note P_A et P_B les pressions aux points A et B respectivement, v_A et v_B sont les vitesses respectives d'écoulement du fluide aux points A et B, g est l'accélération de pesanteur.

Conservation du débit : Écrivons la conservation du débit à travers les deux sections S et s ,

(débit en S) = (débit en s) :

$Sv_A = s.v_B$, d'où $v_A = v_B \frac{s}{S}$. Comme $s \ll S$, v_A est négligeable devant v_B ($v_A \approx 0$).

Théorème de Bernoulli :

On applique le théorème de Bernoulli aux niveaux de A et B (on considère que le champ de pesanteur est uniforme à l'échelle de la cuve) : $P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$

Or $P_A = P_B = P_{atmosphérique}$, on obtient $\frac{1}{2} v_B^2 = g(z_A - z_B)$ d'où $v_B^2 = 2gh$

ce qui donne $v_B = \sqrt{2gh}$.

Remarque : La vitesse v_B d'écoulement au niveau du trou ne dépend pas de la masse volumique du liquide. Elle ne dépend que de la hauteur h (g étant considéré constant).