
SOMMAIRE

Editorial	3
<i>Quelle définition du concept de tangente ? Pour quelles raisons ?</i> K. BAHLAN, M. KRYSINSKA, M. SCHNEIDER	5
<i>L'invention du zéro ou la revanche des bergers</i> Philippe LOMBARD, Irem de Lorraine	33
<i>Instrumentation du calcul formel et changement de cadre de l'engagement direct en géométrie dynamique. Du jeu de cadres au jeu de paradigmes. Illustration pratique avec les tangentes communes à deux paraboles</i> Yves MARTIN, Irem de La Réunion	45
<i>A propos de l'introduction des nombres négatifs à l'école secondaire</i> Jean-Claude PONT	69
<i>Parutions</i>	87
<i>Pour aller plus loin :</i> Réflexions et pratiques interdisciplinaires	91
<i>Agenda</i>	96
Liste des Irem	97
Sommaire du prochain numéro	98

EDITORIAL

L'article de Bahlan, Krysinska et Schneider aborde les difficultés liées à l'introduction de la notion de « tangente à une courbe » dans l'enseignement secondaire. En fait, malgré un départ sur une approche historique où sont évoquées les coniques, on voit à la lecture qu'il s'agit d'un article sur les « tangentes aux courbes représentatives de fonctions ». Bref d'un article d'analyse plutôt que d'un article de géométrie. Comment diable les Grecs pouvaient-ils se convaincre de la construction de la tangente en un point d'une ellipse dont on connaît les foyers, au moyen de raisonnements purement géométriques et sans aucun recours à la notion de fonction ? Nous ne le saurons pas. Et le cursus universitaire actuel ne l'enseigne pas aux futurs professeurs du secondaire. Je soupçonne d'ailleurs que bien des mathématiciens d'aujourd'hui, sinon les auteurs de l'article, quand ils lisent les livres de terminale C des années 60, pensent que sur ce point les Grecs, et les manuels des années 60, « n'étaient pas rigoureux ». Les auteurs prennent en quelque sorte acte de la disparition de la géométrie « intelligente » dans l'enseignement et essaient en contrepartie de développer une analyse « intelligente » pour les élèves. L'article constitue un bon argumentaire sur ce point de vue et contient des analyses fines sur les conceptions implicites des élèves, souvent induites par l'enseignement lui-même. À titre personnel cependant, je trouve que, comme bien souvent, les didacticiens poursuivent une « vérité révélée » (révélée au début du 20^{ème} siècle !), et semblent souhaiter que l'enseignement arrive au plus vite à faire adhérer les élèves à cette vérité révélée, absolue et atemporelle. Ici, il s'agit de la définition « enfin rigoureuse » de la dérivée en un point d'une fonction. En outre, j'avoue que je suis un peu perdu quand il est question de « praxéologies pragmatiques » et « praxéologies déductives ». Fort heureusement les articles de Repères IREM ne

sont pas censés faire l'unanimité. Aux lecteurs d'en faire leur profit, et éventuellement d'y réagir avec des points de vue divergents.

J'espère que l'article de Philippe Lombard sur l'invention du zéro et la revanche des bergers vous fera penser comme moi au brio de Raymond Devos, « trois fois rien c'est déjà quelque chose ... ». Dire des choses profondes tout en s'amusant un peu ne peut pas faire de mal. L'auteur nous raconte une histoire de bergers à travers les âges et à rebondissements multiples. Et nous comprenons un des fins mots de cette histoire lorsqu'est citée l'introduction énigmatique de Jean Giono à son dernier ouvrage, dans lequel il est question de malfrats, de bergers et d'ermites philosophes, fascinés par l'Absent, sorte de reflet éthéré du zéro. On pardonnera à Giono l'aspect un peu macho de cette histoire où les femmes semblent reléguées aux rôles de muettes. C'est que les conteurs sont des menteurs comme les épistémologues nous dit Philippe Lombard. Ces derniers, faute de bases historiques suffisamment détaillées, en sont réduits à inventer des contes vraisemblables pour essayer de pénétrer les profonds mystères de l'invention des nombres entiers, puis, plus tard de celle du zéro. Quant à l'énigme finale, sur une possible revanche des bergers, après un passage prémonitoire de l'impossible effacement de la dette grecque par la Troïka (l'article a été écrit bien avant et ne visait les usuriers que dans l'abstrait), vous trouverez sans doute sa solution en relisant dans Repères IREM, janvier 2012, l'article de Gilles Aldon, Jérôme Germoni et Jean-Manuel Meny sur la complexité des algorithmes et les surprises de la récurrence.

Retour aux tangentes dans le troisième article, mais ici sur le mode expérimental. L'expérimentation se fait avec des outils modernes à réponse instantanée : les logiciels de calcul formel et de géométrie dynamique que l'on peut uti-

EDITORIAL

liser de manière couplée. Cela peut se faire au lycée sur de petits problèmes et en formation continue des enseignants sur des problèmes plus sophistiqués. On sait que Descartes a inventé le papier quadrillé, d'où le calcul algébrique sur les coordonnées qui supplée les démonstrations géométriques. On sait que Dieudonné en a conçu le fameux cri de victoire : « À bas Euclide ». On sait que les calculs sont cependant vite inextricables. On sait enfin que, en prenant soin de ne pas afficher les résultats lorsqu'ils prennent plusieurs pages d'écran, chose très fréquente, on peut désormais confier bien des calculs algébriques inextricables à des ordinateurs. On sait moins que de tout temps les mathématiques ont été une science en grande partie expérimentale. Yves Martin nous raconte les surprises qui peuvent résulter de l'expérimentation concernant la construction des tangentes communes à deux paraboles de même direction asymptotique. Il plaide en même temps avec ferveur pour un changement de paradigme dans l'enseignement des mathématiques : plus d'instantanéité, plus d'expérimentations, moins de « théorie » abstraite. Cependant, quand l'ordinateur semble se refuser à faire ce qu'on lui demande, un peu de recul, un peu de théorie, deviennent alors nécessaires. Plus de théorie est d'ailleurs parfois utile pour simplifier l'expérimentation. La lectrice (ou le lecteur) qui est pris de vertige devant les immenses formules avec racines carrées qui apparaissent dans l'article pourrait se faire le raisonnement « théorique » suivant : s'il y a en règle générale deux tangentes communes, réelles ou imaginaires, elles se coupent alors en un seul point. Et un problème de géométrie qui admet une solution unique (un seul point) doit se calculer sans racines carrées. Et il faudra imaginer d'autres expérimentations tout aussi passionnantes. Par exemple voir apparaître le point d'intersection des deux tangentes communes « même lorsqu'elles n'existent pas ». Le lecteur (ou la lectrice) pourra aussi se poser le problème d'expérimenter la construction des quatre tangentes communes à deux coniques en position générale, tangentes qui se recoupent donc en six points. Comment se fait-il que ce soit relativement simple de calculer ces tangentes com-

munes lorsque ce sont deux cercles, et si compliqué dans le cas général ? Un peu de « théorie » sur les faisceaux de coniques pourra sans doute éclairer la situation. Bref j'ai trouvé l'article assez passionnant, mais je pense que les articles de Marie-Jeanne Perrin-Glorian et de moi-même dans Repères IREM n° 34 peuvent servir jusqu'à un certain point d'antidotes à la TICE-béatitude qui s'empare de tout un chacun devant les facilités offertes par l'instantanéité expérimentale bien conduite.

L'article de Jean-Claude Pont, à propos de l'introduction des nombres négatifs dans l'enseignement secondaire, aborde le problème de la définition de ces nouveaux êtres mathématiques tant du point de vue historique que de celui de l'enseignement. Vous savez sans doute que les nombres négatifs posaient aux anciens « géomètres » presque autant de problèmes ontologiques que les nombres imaginaires. Et si la formule d'Euler « $e^{i\pi} = -1$ » produit toujours un effet de surprise et d'incrédulité, il semble que les nombres négatifs et la règle des signes soient aujourd'hui d'une grande banalité ... en tout cas pour les enseignants ! Alors pourquoi certains élèves refusent-ils de comprendre ? et pourquoi nos brillants anciens ont-ils tant souffert ? D'Alembert par exemple pensait que les quantités négatives, définies formellement par la présence du signe « - », ne pouvaient pas être considérés comme plus petites que zéro. Jean-Claude Pont nous propose un parcours fort instructif dans l'histoire des nombres négatifs. Cela renvoie en définitive à la mise au point par Hilbert de « définitions » pour les « indéfinissables » que sont par exemple le point et la droite dans les *Éléments* d'Euclide. Mais il a fallu une longue maturation pour cela, car les fameux « *Fondements de la Géométrie* » n'ont été écrits qu'en 1900, après bien d'autres exploits de Hilbert, en apparence beaucoup plus difficiles. Jean-Claude Pont rend enfin compte de son expérience propre de l'enseignement de cette notion, en Suisse romande dans les années 65-75.

Je vous souhaite bonne lecture de ce numéro riche et divers.

Henri Lombardi

Tous les articles parus dans les numéros 1 (octobre 91) à 89 (octobre 2012) de *Repères* sont consultables et téléchargeables librement en ligne sur le site de *Repères Irem* (portail des IREM) à l'adresse suivante : <http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique24>

PARUTIONS

PARUS dans les IREM

- *Repères IREM*, N°100, juillet 2015, revue des IREM publiée sous le patronage de l'Assemblée des directeurs d'IREM, Topiques éditions, Nancy, ISSN 1157-285X, diffusion-distribution Topiques éditions, 22 rue Charles-Martel, 54000 Nancy.
- *Le miroir des maths*, N°14, mars 2015, Bulletin de l'IREM de Basse-Normandie, 27 pages, ISSN 1969-7929 (version papier), ISSN 1760-6500 (version en ligne, disponible en libre accès à l'adresse web : <http://www.math.unicaen.fr/irem/IMG/pdf/miroir14.pdf>)
- *Autour de la notion de dérivée en classe de Première scientifique*, Groupe « Analyse » de l'IREM de Paris, Brochure consultable en ligne à l'adresse : <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS15003.pdf>
- *Feuille de vigne*, N°133, juin 2015, Bulletin trimestriel de l'IREM de Dijon, 44 pages, ISSN : 0246-5752 (+ d'infos : consulter <http://irem.u-bourgogne.fr>).
- *L'enseignement mathématique à l'école primaire, de la Révolution à nos jours. Tome 2 : 1915-2000*, Textes officiels réunis et présentés par Renaud d'Enfert, avec la collaboration de Josiane Hélayel, Presses universitaires de Limoges (PULIM), 2015, 695 p., 40 €
- *Petit x*, N°98, septembre 2015, revue de l'IREM de Grenoble, ISSN 0759-9188, diffusion-distribution IREM de Grenoble - Université J. Fourier, BP 41, 38402 Saint-Martin D'Hères Cedex.

NOUS AVONS REÇU ...

Livres

- *Charles-Ange Laisant. Itinéraires et engagements d'un mathématicien de la Troisième République*, Jérôme Auvinet, Hermann, 2013, 248 pages en 16 x 22. Prix : 24 €. ISBN : 978-2-7056-8697-0.

Reuves, bulletins, lettres d'information

- *BGV-Bulletin grande vitesse de l'APMEP* « Spécial Journées nationales 2015 », N°182, mai-juin 2015, édition-diffusion-distribution Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, 26, rue Duméril, 75013 Paris, ISSN 0296-533X.
- *Bulletin de liaison de la Commission française pour l'enseignement des mathématiques (CFEM)*, N°29, 01 juin 2015, 8 pages, consultable en ligne sur <http://www.cfem.asso.fr/liaison-cfem/lettre-cfem-juin%202015> .
- *Textes et documents pour la classe (TDC), la revue des enseignants*, N°1098, 15 juin 2015, Revue du réseau de création et d'accompagnement pédagogiques (CANOPÉ), CANOPÉ éditions, consacrée à « Statistique et Probabilités », sommaire consultable à l'adresse : <https://www.reseau-canope.fr/tdc/accueil.html>
- *Statistique et Société*, N°1, volume 3, 2015, revue en ligne éditée par la Société française de statistique (SFS), consultable à l'adresse : http://publications-sfds.fr/index.php/stat_soc/issue/view/50/showToc
- *Bulletin de liaison de la Commission française pour l'enseignement des mathématiques (CFEM)*, N°30, 01 juillet 2015, 12 pages, consultable en ligne sur <http://www.cfem.asso.fr/liaison-cfem/lettre-cfem-juillet%202015>

 PARUTIONS

- *La lettre de Femmes & mathématiques*, N°9, juin 2015, éditée par l'association Femmes & mathématiques, consultable en ligne à l'adresse <http://www.femmes-et-maths.fr/wp-content/uploads/2015/07/lettre-FM-n%C2%B09.pdf>
- *BGV-Bulletin grande vitesse de l'APMEP*, N°183, juin-juillet 2015, édition-diffusion-distribution Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, 26, rue Duménil, 75013 Paris, ISSN 0296-533X.
- *Bulletin de l'IFÉ*, juillet 2015, publication scientifique de l'Institut français de l'Éducation (IFÉ), 8 pages, abonnement et téléchargement : <http://ife.ens-lyon.fr/ife/recherche/bulletins>
- *La lettre de MADD Maths (Mathématiques appliquées divulguées et didactiques)*, N°8, juillet 2015, lettre électronique éditée par la SMAI, consultable en ligne (<http://smai.emath.fr/maddmaths/8/>) avec un article proche des intérêts des IREM : « Le Centre Galois, une initiative de popularisation des maths pour les lycéens » par Aurélien Alvarez et Philippe Grillot, Université d'Orléans.

NOUS AVONS LU ...

MathemaTICE, N°46, Septembre 2015

Revue en ligne éditée par l'association Sesamath, consultable en ligne en libre accès à l'adresse Web : <http://revue.sesamath.net/spip.php?rubrique115>

Voici le sommaire établi par l'éditeur :

- Gilles Aldon analyse le MOOC *Etudier et former avec le numérique en mathématiques*, à partir d'un travail avec de futurs professeurs de mathématiques en formation ;
- Alain Busser et Patrice Debrabant livrent avec humour et circonspection le fruit de leur réflexion sur l'introduction du "codage" (ou est-ce de l'algorithmique ?) en Collège : une question brûlante pour la prochaine rentrée ;
- Patrick Raffinat s'interroge sur l'algorithmique en mathématiques au lycée, au vu de ses étudiants et de son enseignement en IUT. Il avance des propositions concrètes et cohérentes pour améliorer une situation peu satisfaisante ;
- Alain Busser et Yves Martin invitent à une randonnée hyperbolique au travers d'une recension originale et illustrée (grâce à CaRMetal et DGPaD) du Rêve d'Euclide, un livre de Maurice Margenstern ;
- Éric Touillot approfondit ses réflexions autour du calcul mental et du jeu. Il détaille *Mathador et Trio*, dont il est l'auteur ;
- Christophe Gragnic présente MicroAlg, le logiciel qu'il a créé et expérimenté en Lycée avec des débutants en algorithmique. Il comporte les outils indispensables pour ceux qui découvrent cette démarche, sans les noyer sous des fonctionnalités inutiles à ce stade ;
- Hédi Abderrahim aborde l'algorithmique par le biais de la dichotomie, à la lumière de son enseignement en Tunisie ;
- Bernard Toumache traite deux problèmes de calcul de probabilités au moyen de simulations sur calculatrices. L'article s'est enrichi de fructueux échanges entre l'auteur et le comité de rédaction de la revue ;
- Joël Gauvain offre aux nostalgiques du logiciel INTERESP une possibilité d'en utiliser les richesses reconnues sous GeoGebra en ligne ;
- Gérard Kuntz propose des activités interdisciplinaires (en Collège et en Lycée) par le truchement des vidéos *Mayday, danger dans le ciel*.

Yves Ducl (IREM de Besançon)

Petit x, N°98, septembre 2015

Revue de l'IREM de Grenoble, ISSN 0759-9188, diffusion-distribution IREM de Grenoble - Université J. Fourier, BP 41, 38402 Saint-Martin D'Hères Cedex.

Voici le sommaire établi par l'éditeur :

- Des liens entre la conceptualisation en mathématiques et en physique. L'exemple du spin de l'électron (Konstantinos Grivopoulos) ;
- Activité ... Le principe des « cages à pigeons » (Denise Grenier) ;
- Difficultés d'apprentissage des nombres complexes en fin de Secondaire (Imène Ghedamsi, Raja Tanazefi)
- Difficultés d'élèves à interpréter des constructions dans l'espace. Une étude de cas (Stéphanie Bridoux, Céline Nihoul) ;
- Activité ... Un puzzle ... des constructions ! (Denise Grenier).

Yves Ducl (IREM de Besançon)

Bulletin de liaison de la Commission française pour l'enseignement des mathématiques (CFEM), N°31, 01 septembre 2015

8 pages, consultable en ligne sur <http://www.cfem.asso.fr/liaison-cfem/lettre-cfem-septembre%202015>.

Au sommaire de ce bulletin :

- Éditorial, et le point de vue de Gabriele Kaiser
- Nouveaux programmes, où en est-on ?
- Une journée nationale de formation sur les ressources vivantes, le 25 septembre, à l'IFÉ (ENS de Lyon)
- 23ème étude ICMI, échos de trois participants
- La conférence de consensus sur les premiers apprentissages des nombres et de la numération
- Les nouveaux formateurs et les IREM
- Des Emplois d'avenir professeurs aux contrats d'apprentissage professeurs : un progrès ?
- Échos de l'école d'été de didactique des mathématiques
- EMF 2015
- Brèves
- Le programme d'informatique de la classe de seconde est paru et le colloquium ARDM-CFEM.

Yves Ducl (IREM de Besançon)

L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Révolution à nos jours. Textes officiels. Tome 2 : 1915-2000.

Renaud D'Enfert, PULIM, Limoges, 2015. 696 pages, ISBN 9782842876593. 40€

Le second volume d'une sélection de textes officiels portant sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire en France vient de paraître dans la collection « Savoirs Scientifiques et Pratiques d'Enseignement » des Presses Universitaires de Limoges. Le premier volume, publié

PARUTIONS

en 2003, rassemblait des documents de la période allant de 1791 à 1914, un total de 69 textes. Nous disposons maintenant, avec la publication de ce second volume, d'un choix de 101 textes allant de 1915 à 2000.

Cet énorme travail est le produit d'un projet de longue durée, lancé et développé au sein du Service d'histoire de l'éducation (SHE) de l'INRP, aujourd'hui disparu. Il a été coordonné par Renaud D'Enfert (Groupe d'Histoire et Diffusion des Sciences d'Orsay).

Deux points importants méritent d'être précisés à propos de cet ouvrage. D'abord, les textes pris en compte se rapportent à l'école primaire au sens large, c'est-à-dire à l'école primaire élémentaire, à l'école supérieure (post-élémentaire) ainsi qu'à la formation des maîtres (écoles normales). L'autre point concerne la notion même de texte officiel, qui correspond ici à une conception plutôt large. Outre des lois, décrets, arrêtés, circulaires, instructions produits par le Ministère de l'Instruction Publique puis de l'Éducation Nationale, on y trouve également des documents d'archives et des textes de nature locale (rapports, comptes rendus de conférences pédagogiques d'instituteurs), susceptibles d'éclairer la politique officielle ou d'en saisir les variations locales.

En lisant ces textes officiels, on remarque le soin pris par les auteurs (Renaud D'Enfert avec la collaboration de Josiane Hélayel) de compléter chaque texte par un 'chapeau' introductif, un système de renvois et d'index permettant de circuler dans l'ouvrage. Il faut également mentionner le texte de l'Introduction, comportant 66 pages analysant les grandes tendances de la politique officielle en matière d'enseignement mathématique.

Mais, ainsi que l'admet l'auteur lui-même, les textes réglementaires renseignent assez peu sur les réalités scolaires et sur le quotidien des classes. Le chantier reste donc largement ouvert pour constituer une histoire de l'enseignement mathématique à l'école primaire.

Wagner Valente (GHEMAT, Université de São Paulo)

AGENDA

Dernière mise à jour le 4 septembre 2015

Contact : Yves Duceil, reperes-irem@univ-irem.fr

Octobre-décembre 2015

- 10-15 octobre 2015 : Colloque 2015 de l'Espace mathématique francophone (EMF), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*, Tipaza (Algérie) (+ d'infos : <http://emf2015.usthb.dz/>)
- 17-20 octobre 2015 : Journées nationales de l'APMEP, *Les maths, quelle histoire ? !* Laon (+ d'infos : consulter <http://www.apmep.fr/-Journées-nationales-2015-a-Laon->)
 - 17-19 novembre 2015 : Colloque pluridisciplinaire international *La voie professionnelle à l'épreuve du baccalauréat et de la hausse du niveau d'éducation : les trente ans du bac pro. Politiques éducatives, normes scolaires et marché du travail*, Université de Lille 3 (+ d'infos : contacter Fabienne Maillard, fabienne.maillard@univ-lille3.fr)
- 12 décembre 2015 : Journée annuelle des CII, Paris

Janvier-mars 2016

- 11-14 janvier 2016 : Séminaire de la CII « COPIRELEM », Albi
- 29-30 janvier 2016 : Colloque de la CII « Université », Bordeaux

Avril-juin 2016

- 19-21 mai 2016 : Colloque commun de la CII « Collège » et de la CII « Lycée Professionnel », Rouen
- 2-5 juin 2016 : Séminaire 2016 du GIS « ADIREM », *Formation des Enseignants de mathématiques ici et ailleurs*, colloque du réseau international des IREM, Université de Strasbourg (plus d'infos : fabrice.vandebrouck@univ-paris-diderot.fr)
 - 10-12 juin 2016 : Colloque de la CII « CORFEM », Nîmes
 - 14-16 juin 2016 : Colloque de la CII « COPIRELEM », Le Puy en Velay

Juillet-septembre 2016

- 18-22 juillet 2016 : *Congrès History and pedagogy of mathematics (HPM), Mathematics in the Mediterranean*, Université de Montpellier, Faculté d'éducation (+ d'infos : consulter <http://hpm2016.sciencesconf.org/>)
- 24-31 juillet 2016 : *13th International congress on mathematical education (ICME)*, Hambourg (Allemagne) (+ d'infos : consulter <http://www.icme13.org/annoncements/second>)

Pour plus de détails sur les activités et manifestations du réseau des IREM (dates et lieux des réunions des ADIREM et des commissions inter IREM, annonces des colloques et des séminaires, ...) vous pouvez consulter le portail des IREM à l'adresse suivante : <http://www.univ-irem.fr/>, rubrique « Agenda des IREM ».