REPERES - IREM. N° 94 - janvier 2014

APPROCHE DE LA NOTION DE PROBABILITE CHEZ DES ENFANTS DE 10-15 ANS [1]

François JAQUET
ARMT

Michel HENRY
Irem de Besançon

Introduction

Peut-on proposer une approche de la notion de probabilité dans l'enseignement élémentaire des mathématiques, et à quel âge ?

Cet objectif suscite beaucoup de résistances. Il a été totalement absent des programmes des collèges français, jusqu'à l'introduction en 2008-2009 de quelques notions élémentaires en classe de troisième (16 ans, niveau 9).

Dans d'autres pays la situation est légèrement différente au niveau des programmes. En Suisse Romande, par exemple, on voit apparaître les probabilités dans les moyens d'enseignement de l'école secondaire (dès 12 -13 ans), sous forme d'approche, en « *privilégiant les situations concrètes, accessibles aux élèves, parce qu'elles peuvent être jouées, expérimentées, et parce qu'elles offrent la possibilité de dénombrer, sans trop de difficultés, les cas possibles et les cas favorables à la réalisation d'un événement* » [(Brêchet et all, 2003]). En Italie les programmes mentionnent déjà en fin d'école primaire une « reconnaissance d'événements certains, possibles, impossibles, équiprobables, plus ou moins probables » et un chapitre des programmes du secondaire inférieur est intitulé « mathématique du certain et mathématique du probable ».

Nos jeunes élèves ont pourtant des intuitions à propos des probabilités. Dans leur langage, ils utilisent couramment des expressions

1 Cet article développe une communication présentée lors de la 14e rencontre internationale de l'ARMT (Association du Rallye Mathématique Transalpin), à Besançon, en octobre 2010, puis reprise dans la revue en ligne, la *Gazette de Transalpie* n° 2 (septembre 2012, pp 47-59).

comme « j'ai plus de chances de ... que de ... ». Ils ont aussi des certitudes et des stratégies dans des situations où le hasard intervient.

Ainsi, avant que les élèves puissent aborder explicitement la notion de probabilité, est-il possible de solliciter leur intuition du probable qui se construit par la pratique des jeux de hasard au travers du langage des chances ? Cette question a motivé une expérimentation à grande échelle au sein de l'Association du Rallye Mathématique Transalpin dans six pays : Italie, France, Suisse Romande, Belgique, Luxembourg, puis Argentine.

Un problème du $14^{\text{ème}}$ Rallye (2006), *Les pots de bonbons*, supposant une intuition probabiliste élémentaire nous a permis de voir comment les élèves le résolvent et présentent leur solution. (Il a été proposé à près de 1200 classes des six pays de niveaux (ou catégories) 5 à 9 (de 10-11 ans à 14-15 ans). Dans ce rallye, les élèves travaillent en groupes et doivent rendre une seule copie pour toute la classe.

Après l'énoncé du problème (§1) et quelques éléments d'analyse de la tâche, nous présentons les points attribués sur l'ensemble des classes (§2), puis une analyse plus détaillée des copies des 96 classes de la section de Franche-Comté des niveaux 6, 7, 8 ($6^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$), qui aboutit à un tableau synthétique des démarches adoptées (§3). Il apparaît que les représentations des élèves sont étroitement liées à leur maîtrise de la proportionnalité, passant d'une appréhension des écarts dans le cadre de structures additives à une compréhension plus précise des rapports dans le cadre de structures multiplicatives au sens de Gérard Vergnaud [(Vergnaud, 1981]). Nos résultats montrent que le passage d'une structure à l'autre dépend de l'âge des élèves et nous conduit à l'interpréter en termes de saut épistémologique.

Pour corroborer cette observation, nous avons alors construit deux nouveaux problèmes du même type (§4) en jouant sur deux variables didactiques, habillage et données numériques, proposés dans le cadre des $15^{\text{ème}}$ et $16^{\text{ème}}$ sessions du RMT. Nous avons analysé encore les réponses à un quatrième problème, issu d'une étude sur la proportionnalité, où le hasard n'intervient pas mais dont la structure est très proche de celle des trois problèmes précédents (§5).

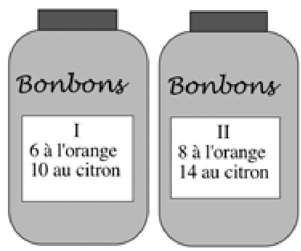
Nous terminons par quelques remarques générales et propositions de recherches en guise de conclusions (§6).

1. — L'énoncé du problème

LES POTS DE BONBONS

Dans un premier pot, Grand-mère met 6 bonbons à l'orange et 10 au citron.

Dans un deuxième pot, elle met 8 bonbons à l'orange et 14 au citron.



Les bonbons sont de même forme et enveloppés de la même façon. Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit :

Tu peux prendre un bonbon. Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur.

Julien réfléchit bien et choisit enfin le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange.

A la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ?

Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.

Il faut remarquer qu'il est difficile d'éviter tous les mots évoquant l'idée de probabilité dans l'énoncé d'un problème destiné précisément à percevoir comment les élèves la perçoivent. La question « À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ? » sans la phrase qui la précède paraissait trop vague et aurait provoqué des difficultés d'attribution des points à la réponse. On a ajouté cette phrase qui précède la question, tout en rappelant que Jean n'aime pas le goût du citron, avec l'expression « avoir la meilleure chance » qui a semblé un mal nécessaire mais acceptable.

L'analyse de la tâche, rédigée par des adultes ne prévoyait que des « comparaisons de rapports » ou la « planification d'un raisonnement proportionnel du type : dans un pot de 6/10 on aurait les mêmes possibilités que dans un pot de 12/20 … ».

2. — Analyse a posteriori : résultats généraux et différentes procédures

Les critères d'attribution des points, de 0 à 4, déterminés a priori, comme l'analyse de la tâche, ne pouvaient pas s'inspirer de résultats d'autres variantes du problème car celui-ci était le premier sur ce thème dans l'histoire du RMT. Les voici :

4 *Bonne réponse (premier pot) et justification claire du procédé*

3. *Réponse correcte mais justification incomplète ou peu claire*

2 *Réponse correcte sans explications ou faute de calcul et réponse cohérente, avec explications*

1 *Début de raisonnement correct*

0 *Incompréhension du problème*

On constatera plus tard, lors de l'analyse des procédures, les faiblesses de ces critères. On y parle en effet de « bonne réponse (premier pot) » ou de « réponse correcte » sans s'être rendu compte que le premier pot peut être choisi sur la base d'un raisonnement inadéquat ; ce qui rend problématique les interprétations de « Début de raisonnement correct » ou « réponse cohérente » (critères 1 et 2).

Le tableau ci-dessous rassemble les résultats de l'attribution des points de ce problème *Pots de bonbons* des 1166 classes ayant participé à la première épreuve du 14e RMT (2006) :

catégorie	5	6	7	8	9	Nb. classes
4 points	9%	3%	24%	43%	58%	248
3 points	3%	3%	10%	9%	14%	74
2 points	14%	12%	7%	9%	7%	119
1 point	56%	52%	41%	26%	20%	496
0 point	18%	30%	19%	13%	1%	229
Nb. classes	222	357	269	223	95	1166
moyenne	1.3	1.0	1.8	2.4	3.1	

Malgré toutes les incertitudes sur l'attribution du « 1 point » relevées précédemment, on constate une progression significative des moyennes, de 1 à 3 points environ des catégories 5 et 6 (10-12 ans) à la catégorie 9 (14-15 ans).

Selon les critères 3 et 4, de l'attribution des points, qui témoignent d'une réponse plus ou moins justifiée, on constate qu'une très faible minorité d'élèves de catégorie 5 et 6 (12% et 6%) arrivent à résoudre le problème, qu'une moitié y parvient en catégories 8 (52%) et qu'il faut attendre la catégorie 9 (72%) pour obtenir une majorité de réussites.

3. — Analyse des copies

Ce problème des *Pots de bonbons* s'est donc révélé très difficile globalement et nous a incité à approfondir l'analyse a posteriori pour chercher à déterminer la nature des obstacles à sa résolution. Nous avons donc examiné les copies de 96 groupes d'élèves (de la section de Franche-Comté) où figurent leurs calculs et leurs explications. Les stratégies de résolution qui apparaissent à la lecture de ces copies se répartissent en cinq catégories parfaitement identifiables (que nous avons notées A, B, C, D et M), révélatrices des représentations des élèves à propos de la probabilité en fonction de leurs âges.

A. *Comparaison des nombres de bonbons au citron, d'un pot à l'autre*

Il est étonnant de constater que les élèves qui comparent entre eux les nombres de bonbons de chaque goût d'un pot à l'autre, centrent leur attention sur les bonbons au citron pour comparer les « risques » d'en tirer un du pot choisi, plutôt que de s'intéresser aux « chances » de tirer un bonbon à l'orange. Parmi les 96 copies examinées, six copies de niveau 6 (classes de sixième) et une de niveau 8 (classes de quatrième) constituent cette catégorie, dont voici quatre exemples.

— « *Le pot n° 2 a beaucoup de bonbons au citron. Le pot n° 1 a moins de bonbons au citron. Il y a plus de chance d'en prendre un à l'orange dans le pot n° 1* » (Cat. 6)

— « *A la place de Julien je choisirais le pot I car il y a moins de bonbons au citron car il n'aime pas.* » (Cat. 8)

— « *A la place de Julien on aurait plongé la main dans le pot I. Julien n'aime pas les bonbons au citron, comme il y en a moins dans le pot I que dans le pot II, il a plus de chance de tomber sur un bonbon à l'orange.* » (Cat. 6)

— « *Julien doit prendre la boîte n° 1 car il y a moins de bonbons au citron que dans la boîte n° II.* » (Cat. 6)

B. *Comparaisons des différences internes d'un pot à l'autre*

L'argumentation repose sur la différence interne des nombres de bonbons des deux types au sein de chaque pot. Le raisonnement ne prend en compte que les bonbons au citron « en plus » de ceux à l'orange. Selon cette conception, le « risque » de prendre un bonbon au citron se traduit numériquement par la comparaison entre 6 (pot II : 14 – 8) et 4 (pot I : 10 – 6). En minimisant cette différence, on pense augmenter ses chances de prendre un bonbon à l'orange. Tous les élèves qui ont suivi ce raisonnement optent donc pour le pot I.

Cependant, dans cette démarche de comparaison des différences, il peut y avoir implicitement pour certains élèves l'idée de minimiser le poids des bonbons au citron dans le pot, ce qui révèlerait une approche qualitative de la notion de probabilité. Mais une différence à l'avantage des bonbons à l'orange ne garantit pas qu'ils soient dans une proportion plus grande dans le pot. Par exemple, si, au lieu de placer 8 bonbons à l'orange et 14 au citron dans le pot II, on en avait mis respectivement 4 et 7 (sans modifier leur rapport), la différence serait alors de 3 contre 4 pour le pot I. Ces élèves auraient-ils choisi le second pot ?

Cette remarque suppose une certaine maîtrise de la proportionnalité que n'ont pas encore acquise les enfants de cet âge. Dans ce type de raisonnement, l'obstacle principal se situerait plus au niveau de la construction de la proportionnalité qu'à celui de la comparaison des « chances », dans l'expression d'un processus de construction d'une sorte de préprobabilité [2].

Nous soulevons ici deux questions de fond : pourquoi la comparaison de rapports plutôt que de différences serait-elle un meilleur modèle pour estimer « les chances » de réussite ; en quoi l'apprentissage de la proportionnalité conditionne-t-il ce choix de modèle ? Nous traiterons de ces questions en conclusion.

Cette procédure est observée dans 22 classes de catégorie 6, où elle est la plus fréquente, 12 et 5 de catégories 7 et 8. En voici quelques exemples :

— *« Dans le pot I, il y a 4 bonbons au citron de plus que de bonbons à l'orange. Dans le pot II, il y a 6 bonbons au citron de plus que de bonbons à l'orange. Donc nous choisissons le pot I. ... car il y a moins de bonbons au citron en plus dans le pot I. »* (Cat . 6 et 7).

— *« Nous avons choisi le pot n° 1 car il n'y a que 4 bonbons à l'orange de moins qu'au citron tandis que dans le pot n° 2 il y a 6 bonbons de moins, donc il y a plus de chances. »* (Cat. 6).

— *« ... Il faut prendre le pot n° 1 car il y a moins de différence entre les bonbons à l'orange et au citron. »* (Cat 6).

— *« ... car dans le pot n° 1 il y a moins de différence entre les deux sortes de bonbons donc plus de chance des bonbons à l'orange, en quelque sorte il y a plus de bonbons à l'orange donc on a plus de chance d'avoir un bonbon à l'orange dans le pot n° 1. »* (Cat. 7).

En terme de « risque » de prendre un bonbon au citron :

— *« A la place de Julien, j'aurais choisi le pot n° 1 car l'écart des bonbons au citron et à l'orange est de 4 et l'autre pot est de 6 donc il y a moins de risque de prendre un bonbon au citron. »* (Cat. 6 et 8).

Avec des raisonnements où cette différence est exprimée en termes de rapport :

— *« ... car il n'a qu'une chance sur 4 de prendre des bonbons au citron alors que dans le 2ᵉ pot il a 6 chances de prendre un bonbon au citron... »* (Cat. 6).

— *« Il faut donc choisir le pot I car il n'y a qu'une chance sur 4 de ne pas se tromper alors qu'avec le pot II il y a une chance sur 6 de ne pas se tromper. »* (Cat. 8).

— *« Je calcule le pot 1 : 10 – 6 = 4. Il y a 4 fois plus de chance de tomber sur un bonbon à l'orange. Je calcule le pot 2 : 14 – 8 = 6. Il y a 2 fois moins de chance de tomber sur un bonbon à l'orange. Conclusion : Le pot I a plus de chance d'avoir un bonbon à l'orange. »* (Cat. 7).

— *« ... Il a deux chances de prendre un bonbon à l'orange dans le pot I que dans le pot II car*

6 – 10 = 4 et 8 – 14 = 6

4 – 6 = 2 2 chances. » (Cat. 7).

2 Nous désignons par « préprobabilité » l'idée souvent implicite qu'il est possible de quantifier l'attente d'un événement dû au hasard par un rapport de nombres de « chances » conçues comme cas élémentaires réalisant ou non l'événement.

C. *Comparaison des variations d'un pot à l'autre*

Se situant encore dans une structure additive, l'argumentation – trouvée dans 6 classes de catégorie 6, 3 de catégories 7 et 8 – repose sur le constat que, du premier pot au second, le nombre des bonbons à l'orange a augmenté de 2 et celui des bonbons au citron de 4.

Le raisonnement présente un aspect plus « dynamique » que celui de la catégorie précédente qu'on pourrait alors qualifier de « statique » : c'est la modification d'un pot à l'autre, l'adjonction de 2 bonbons à l'orange et de 4 au citron, qui est prise en considération, avec une comparaison de l'augmentation relative des nombres de chaque sorte de bonbons. Ce principe, « en ajoutant plus de bonbons au citron que de bonbons à l'orange, on augmente leur poids relatif », ne s'exprime pas nécessairement par l'évolution d'un rapport. En voici trois exemple,

— *« Nous avons choisi le pot I car : dans le pot II il y a que 2 bonbons de plus à l'orange mais 4 de plus au citron. »* (Cat 6).

— *« Il faut prendre le premier pot car 6 + 2 = 8 et que 10 + 4 = 14, comme 2 < 4 donc on rajoute plus de citron que d'orange. »* (Cat. 6).

— *« ... car il y a plus de chance de prendre le 1^er^ pot de bonbons sachant que dans le 1^er^ pot il y -a moins de bonbons au citron que dans le 2^e^ pot : le premier contient 10 bonbons au citron et le 2^e^ pot en contient 14 donc il y a 4 bonbons de plus au citron, alors qu'il y a que 2 bonbons à l'orange rajoutés dans le 2^ème^ pot .»* (Cat. 8).

Il faudrait interroger les élèves de vive voix pour savoir s'ils ont été conscients d'une variation des rapports entre les nombres de bonbons de chaque sorte, d'un pot à l'autre et percevoir l'existence éventuelle d'une intuition préprobabiliste.

D. *Fractions ou rapports*

La procédure qui conduit à la réponse correcte nécessite une comparaison de rapports et non de différences. On trouve deux choix de rapports dans les copies examinées :

D.1 rapports o/c entre les nombres de bonbons à l'orange et ceux au citron (6/10 et 8/14),

ou

D.2 rapports entre les nombres de bonbons d'une sorte et le total de ceux contenus dans le pot (6/16 et 8/22 pour ceux à l'orange ; 10/16 et 14/22 pour ceux au citron).

Procédure D.1

Dans cette procédure, observée dans 12 copies, le rapport o/c est pertinent mais ne correspond pas au modèle probabiliste. Il s'agit d'une fraction qui n'est pas spontanément comprise comme un nombre rationnel. La tâche que les élèves se fixent consiste à trouver un moyen de comparer les deux rapports 6/10 et 8/14, par l'intermédiaire de fractions équivalentes, de même dénominateur ou de même numérateur, ou plus rarement en recourant aux nombres décimaux.

Il est intéressant de lire, dans ce cas, la « traduction » que font les élèves de leurs résultats pour justifier leur choix, avec le plus souvent une terminologie impropre d'un point de vue probabiliste. Voici par exemple des extraits de copies où l'on parle de « plus de chance », avec parfois une interprétation en nombre de bonbons :

— *« A la place de Julien on aurait choisi le pot 1. Il faut mettre 6/10 et 8/14 sur le même dénominateur .... 42/70 = 21/35 et*

30/70 = 20/35. Julien aurait plus de chance de choisir le 1er pot. » (Cat. 8).

— « *Dans le pot I il y a 6/10 bonbons. Dans le pot 2, il y a 8/14 bonbons. 6/10 = 42/70 <—— bonbons à l'orange 8/14 = 40/70 <—— bonbons à l'orange 42 > 40. Donc j'aurais choisi le pot I car quand on met au même dénominateur 6/10 et 8/14 le nombre de bonbons à l'orange dans le pot I est de 42 et dans le pot II de 40.* » (Cat. 8).

— « (début identique aboutissant à : ... *21/35 > 20/35. Donc je choisirai à la place de Julien le pot n°1, car il a une chance de plus que dans le second pot.* » (Cat. 7).

— « *Pour savoir dans quel pot il y a le plus de chance d'avoir un bonbon à l'orange, il faut exprimer le nombre de bonbons à l'orange en pourcentages.*

Pot I) *6 pour 10* $\xrightarrow[\text{¥ } 10]{}$ *60 %*

Pot II) *8 pour 14* $\xrightarrow[\text{¥ } 7{,}14]{}$ *57,12*

[100/14 ≈ 7,14]

Il y a plus de chance de trouver un bonbon à l'orange dans le pot I (60 %). » (Cat. 8).

Parfois on parle de « chances sur » — avec un usage impropre du « sur » dans « chances sur » —, ou de un « pourcentage de chances » :

— « (après avoir écrit 6/10 x 7 = 42/70 et 8/14 x 5 = 40/70) *... donc il y a 42 chances sur 70 d'avoir un bonbon à l'orange dans le I. Et il n'y en a que 40 sur 70 dans le II. ...* » (Cat. 7).

— « (après avoir transformé les rapports 8/14 et 4/10 en pourcentages : 40% et 42,84%) *... Dans le pot I il y a 40% de chance de tomber sur un bonbon au citron. Dans le pot II il y a 42,84% de chance de tomber sur un bonbon au citron, donc il faut prendre un bonbon dans le pot I.* » (Cat. 7).

— « *Dans le premier pot il y a 60% de chance qu'il y ait un bonbon à l'orange car 6 orange/10citron = 60 orange/100 citron alors que dans le deuxième il n'y aura que : 8x100/14 ≈ 57,142857%. Julien prendra le 1er pot.* » (Cat. 8).

Procédure D.2

Dans cette procédure observée majoritairement en catégories 7 et 8, c'est le rapport o/(o+c) qui est pris en compte et qui correspond au nombre de cas favorables (orange) sur le nombre total de bonbons (ou le rapport c /(o + c) correspondant au nombre de cas défavorables (citron) sur le nombre total. Cette conception sous-jacente renvoie à l'approche classique de la notion de probabilité. La grande majorité des copies de cette dernière procédure conduisent à des réponses correctes après une comparaison des deux fractions 6/16 et 8/22 ou des rapports correspondants.

Les modalités de comparaison se font en cherchant un dénominateur commun, 352, 176 ou 88, ou par comparaison de rapports de dénominateur, 22 ou 44, avec des numérateurs décimaux non entiers ; par exemple : « 13,75/22 < 14/22 ou 8,25/22 > 8/22 » ou encore par un numérateur commun, 12 comme dans l'exemple suivant :

— « *... 12/32 > 12/33 donc 6/16 > 8/32, car si 2 nombres en écriture fractionnaire ont le même numérateur, alors le plus grand est celui qui a le plus petit dénominateur.* » *(Cat. 7).*

Quelques copies montrent des rapports en pourcentages, par division ou « règle de trois » :

— « *Le nombre des bonbons de la boîte no 1 est égal à 16. En divisant le nombre des bonbons à l'orange (6) et au citron (8) par 16, on obtient alors :*

** Bonbons à l'orange : 37,5%*

** Bonbons au citron : 62,5 %*

Le nombre des bonbons de la boîte no II est égal à 22. En divisant le nombre des bonbons à l'orange (8) et au citron (14) par 22, on obtient alors.

** Bonbons à l'orange : 36%*

** Bonbons au citron : 64 %*

Si nous étions à la place de Julien, j'aurais choisi le pot n°1, car il a plus de chances d'avoir un bonbon à l'orange (37,5 % contre 36 % dans le pot n°2 » (Cat. 7).

— *« On fait un pourcentage : 6/16 = x/100 6 ¥ 100 = 16 ¥ x   x = 600/16 = 37,5.*

Il y a 37,5 % de chance de tomber sur un bonbon à l'orange dans le pot 1. .... » (Cat. 8).

Dans un cas (cat. 7), la comparaison se fait en « chances sur 2 » :

— *« ... Pot 1 : 6 : 8 = 0,75. Il y a 0,75 chances sur 2 de tomber sur un bonbon à l'orange. Pot 2 : 8 : 11 = 0,72. Il y a 0,72 chances sur 2 de tomber sur un bonbon à l'orange. »* (Cat. 7).

Cet extrait est assez étonnant pour un élève de 12-13 ans (rédacteur en principe au nom d'un groupe, mais la copie est rédigée à la première personne). Il a certes bien vu la simplification des dénominateurs par 2, ce qui a pu induire la suite. Remarquons que le calcul et la comparaison des décimaux intervient après cette réduction, alors qu'il aurait pu être fait sur les données d'origine. Mais le commentaire qui suit est intéressant. Il montre que cet élève a surmonté le biais psychologique de l'équiprobabilité que l'on rencontre chez les jeunes enfants, quand devant deux issues parfaitement incertaines, ils déclarent avoir une chance sur deux d'obtenir l'une ou l'autre.

Ce commentaire montre aussi une bonne approche intuitive de la notion de probabilité, s'appuyant sur une certaine maîtrise de la proportionnalité.

M. *Procédures mixtes*

Trois classes, de catégories 7 et 8, font simultanément référence à la soustraction et aux rapports. C'est un faible pourcentage des 96 copies examinées, mais elles nous paraissent révélatrices de l'évolution d'une procédure à l'autre, illustrant le passage encore non achevé des structures additives aux structures multiplicatives chez ces élèves de 12 à 14 ans :

— *« I : 10 + 6 = 16, 10 – 6 = 4, donc il y a 4/16 de chance de tomber sur un bonbon au citron. 16 : 4 = 4. Il a 4 fois plus de chance de tomber sur un bonbon au citron.*

II : 14 + 8 = 22 ; 14 – 8 = 6, donc il y a 6/22 de chance de tomber sur un bonbon au citron. 22 : 6 = 3,6. Il a 3,6 fois plus de chance de tomber sur un bonbon au citron.

Donc, à la place de Julien, je choisirais le IIè pot.» (Cat. 7).

— *« A la place de Julien, je choisirais le pot no 1 car dans ce pot il y a 4 bonbons de plus qu'à l'orange et dans le pot n° 2 il y a 6 bonbons au citron de plus qu'à l'orange. Et car il y a 37,5 % de bonbons à l'orange dans le pot n°1 contre 36,4% dans le pot 2.*

Pot 1 : 6/16 = 0,375 ¥ 100 = 37,5%.

Pot 2 : 8/22 ≈ 0,36 ¥ 100 ≈ 36,36 %.» (Cat. 7).

— *« A la place de Julien nous aurions choisi le pot I*

1ere Méthode : pour pot I : nous avons fait 100 : 16 = 6,25 ; 6,25 ¥ 6 = 37,5
pour pot II : nous avons

fait 100 : 22 = 4,54 ; 4,54 ¥ 8 = 36,32

Conclusion : il y a une plus grande chance de tirer des bonbons à l'orange dans le pot I ; il y a une différence de 1,18 %.

2ème Méthode : nous avons fait 10 – 6 = 4 ⇒ Pot I ; 14 – 8 = 6 ⇒ Pot II

Il y a deux bonbons au citron de plus dans le pot II que dans le pot I, donc il y a plus de chances de prendre un bonbon à l'orange dans le pot I vue qu'il y a moins de différence entre les deux goûts dans le pot I.

⚠ *Ceci est le cas où elle mélange les bonbons ⇒ si elle ne les mélange pas, c'est le pot II, car il y a plus de bonbons à l'orange sur le dessus .».*

Nous avons pu classer (voir tableau ci-dessous) 94 copies (sur 96) dans les catégories décrites précédemment.

On constate clairement une évolution vers les « procédures multiplicatives » (D) avec le passage des niveaux 6 à 8. Celles qui reposent sur les différences (B et C), sont choisies par plus des trois quarts des élèves du niveau 6 et celles qui font appel aux rapports, D_1 et D_2, sont largement majoritaire au niveau 8, les deux types de procédures étant partagés au niveau 7. La progression des moyennes (de 1 point à 3 points) en fonction de l'âge a été observée à large échelle sur l'ensemble des 1200 classes (voir le paragraphe 2). Elle est confirmée ici à l'analyse des 96 copies examinées.

Le passage vers les procédures multiplicatives est à mettre en relation avec la construction du nombre rationnel et du concept de proportionnalité.

4. — Poursuite de la recherche sur des variantes du problème *Les pots de bonbons*

La relation entre les niveaux des classes (âge) et l'utilisation d'un rapport pour interpréter une notion intuitive de probabilité est flagrante dans ce contexte des *Pots de bonbons*, inspiré d'un modèle d'urne. En préparant ce problème, nous avions fait l'hypothèse que ce modèle, par sa simplicité, est le plus propice à l'introduction de la notion de probabilité qui peut fonctionner implicitement dans des situations de comparaison. Une définition « cardinaliste »[3] n'est pas nécessaire pour comprendre qu'il s'agit alors de comparer les « poids » respectifs des boules colorées dans deux urnes à deux couleurs[4]. Par contre, une acquisition minimale de la proportionnalité semble induire fortement l'expression de ces « poids » en termes de rapports, permettant de formuler des réponses pertinentes.

Cette remarque nous amène à penser qu'il peut être vain d'introduire la notion de proba-

Procédures Catégories	A	B	C	D	M	total
6 (11-12 ans)	6 (**17 %**)	22 (**61 %**)	6 (17 %)	2 (6 %)	0	36 (100%)
7 (12-13 ans)	0	12 (**41 %**)	1 (3 %)	14 (**48 %**)	2 (7 %)	29 (100%)
8 (13-14 ans)	1 (4%)	5 (17 %)	2 (7 %)	20 (**69 %**)	1 (3 %)	29 (100%)
Total						94

3 Telle que celle de Laplace, qui donne dans son premier principe la définition suivante : « la probabilité … est le rapport du nombre de cas favorables à celui de tous les cas possibles » [Laplace].

4 Dites de Bernoulli, en référence à son œuvre magistrale, *Ars Conjectandi*, publiée en 1713, qui donne une première démonstration de la loi des grands nombres à partir de ce modèle d'urne [Bernoulli].

bilité à l'école primaire ou au début du collège sous la forme de la définition laplacienne : le rapport « du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles ». Si la notion de quotient peut être utile sur le plan numérique, on peut douter que les élèves de ces niveaux de classes lui donnent un sens probabiliste.

Nous avons souhaité corroborer les résultats obtenus dans cette première étude et avons proposé des variantes de ce problème sous des habillages différents pour les épreuves des 15e et 16e RMT (2007 et 2008). Au vu des difficultés rencontrées par les élève des catégories 5 et 6 dans *Les pots de bonbons*, les variantes n'ont été proposées qu'aux classes de catégories 7, 8, 9 et 10 (classes de seconde).

DES TRUITES

Dans une pisciculture, on élève deux sortes de truites pour la consommation : des blanches et des saumonées.

Il y a deux bassins, A et B, dans lesquels un employé doit pêcher les truites demandées par un client. Mais il ne peut reconnaître le type d'une truite qu'après l'avoir attrapée.

— Dans le bassin A, il y a 60 truites blanches et 100 truites saumonées.

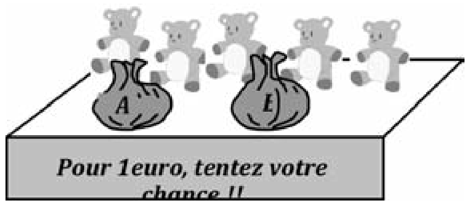
— Dans le bassin B, il y a 80 truites blanches et 140 truites saumonées.

Un client préfère les truites blanches, il en voudrait une.

Dans quel bassin l'employé doit-il pêcher pour avoir le plus de chances d'avoir une truite blanche du premier coup ?

Expliquez votre raisonnement.

LA MAIN DANS LE SAC



A la fête du village, un forain propose aux passants le jeu suivant :

Donnez-moi un euro et tirez une seule boule dans le sac de votre choix. Si la boule est rouge, vous gagnez un ours en peluche !

Dans le sac A, il y a 6 boules rouges et 10 boules blanches

Dans le sac B, il y a 9 boules rouges et 14 boules blanches

Toutes les boules sont de même grandeur, de même poids et de même matière. Les sacs sont opaques et l'on ne peut pas voir les boules qu'ils contiennent, on ne peut qu'y plonger la main pour tirer une boule.

Vous n'avez qu'un euro en poche et vous aimeriez bien gagner un ours.

Dans quel sac préférez-vous tirer une boule ?

Expliquez pourquoi.

Les structures des trois problèmes se distinguent par leurs effectifs et leurs rapports : voir l'encadré de la page ci-contre.

Des *Pots* aux *Truites* il n'y a qu'une multiplication par 10 des quatre données, les rapports sont donc conservés. Pour les *Sacs*, on reprend les données des *Pots* en remplaçant 8 par 9.

Pots	I	6	10	—>	6/16 = 3/8 = 33/88 = 0,375
	II	8	14	—>	8/22 = 4/11 = 32/88 = 0,3636...
Truites	A	60	100	—>	60/160 = 3/8 = 33/88 = 0,375
	B	80	140	—>	80/220 = 4/11= 32/88 = 0,3636...
Sacs	A	6	10	—>	6/16 = 3/8 = 69/184 = 0,375
	B	9	14	—>	9/23 = 72/184 = 0,391…

Ce passage du couple 8 et 14 au couple 9 et 14 n'est pas anodin ; il modifie le choix du sac favorable. Alors que c'était le pot I et le bassin A qui étaient les plus favorables dans les deux premiers problèmes, c'est maintenant le sac B qui l'est dans le troisième problème. On évite ainsi l'inconvénient des problème des *Pots de bonbons* et des *Truites* où, aussi bien par un raisonnement additif que par une démarche de proportionnalité les élèves étaient conduits à la bonne réponse.

Au niveau des contextes, les modifications sont peu importantes. Des *Pots* aux *Truites* on quitte le modèle de « l'urne » pour un habillage moins statique avec peut être une moindre implication psychologique : les enfants qui se mettaient « à la place de Julien » voient maintenant « de l'extérieur » le problème de l'employé qui se demande « dans quel bassin doit-il pêcher », mais l'expression « la meilleure chance » ou « le plus de chances » subsiste. Des *Pots* aux *Sacs* la grand-mère est remplacée par un forain. Le mot « chance » disparaît et le choix est entièrement dévolu à l'élève qui choisit en fonction de l'envie de gagner un ours.

Comparaison des moyennes

Une première comparaison est celle des moyennes de points obtenus par les classes de toutes les sections qui ont résolu les trois problèmes lors des épreuves de 2006 pour *Les pots de bonbons*, 2007 pour *Les truites* et 2008 pour *La main dans le sac*. Comme nous l'avons déjà signalé au §2, l'attribution des points repose sur des critères communs, certes, mais qui peuvent présenter des ambiguïtés ou être interprétés de manière différente par les jurys locaux dans les différents pays. Les critères eux-mêmes ont été légèrement adaptés et précisés d'une variante à l'autre du problème, en fonction des analyses a posteriori.

Il faut donc considérer ces moyennes comme un simple indicateur de tendance, significatifs cependant au vu de la grandeur des effectifs.

Catégories	5 (CM2)	6 ($6^{ème}$)	7 ($5^{ème}$)	8 ($4^{ème}$)	9/10 ($3^{ème}$)/ seconde	effectifs (classes)
moyenne les *Pots*	1,3	1,0	1,8	2,4	3,1	1166
moyenne les *Truites*			1,7	2,3	2,7	825
moyenne les *Sacs*			1,5	2,1	2,2	988

Les moyennes indiquées sont calculées sur les critères d'attribution des points de 1 à 4. A l'évidence, quel que soit le pays d'origine, que les élèves aient reçu ou non une première approche de la notion de probabilité, la réussite croît avec l'âge et est du même ordre de grandeur d'un problème à l'autre. Ce n'est qu'à partir de la catégorie 8 (13 -14 ans) qu'on peut espérer un premier accès au concept théorique de probabilité.

On constate une légère baisse des moyennes pour le problème des *Sacs*. Notre hypothèse est qu'elle est due au fait que la « réponse juste » aux deux premiers pouvait être obtenue par une démarche erronée (additive) et recueillir des points (1 ou 2) en raison des lacunes des critères d'attribution des points, déjà mentionnées au §2. Ces critères ont été améliorés pour le problème des *Sacs* : une démarche additive conduit à une erreur et ne peut obtenir « 1 point » qu'en cas d'explication de type probabiliste :

1 Solution juste (le sac B) ou fausse (le sac A), reposant sur une comparaison des différences des nombres de boules au sein d'un sac ou des écarts entre un sac et l'autre (relations additives), avec cependant une explication de type probabiliste (on a plus de chances de ... car il y a plus de ...),

Analyse des copies

Les analyses des copies d'élèves ont été reprises pour les *Truites* et les *Sacs* selon le modèle adopté pour les Pots §3 : les procédures de résolution observées sont quasi les mêmes pour les trois problèmes :

A. Comparaison des nombres d'objets de même nature (bonbons au citron, truites saumonées, boules blanches) d'un récipient à l'autre. Ces procédures qu'on trouvait encore dans les copies des jeunes élève (17% en catégorie 6 pour *Les pots de bonbons*) sont très rares (de 2 à 3%) dans les catégories supérieures.

B. Comparaisons des différences internes entre les deux types d'objets dans chaque récipient

C. Comparaison des différences entre les nombres d'objets de même type, d'un récipient à l'autre

D. Fractions ou rapports

Le tableau ci-dessous compare les procédures les plus fréquentes : celles des écarts (B et C) où les élèves restent dans le cadre additif et celle des rapports (D), où ils passent au cadre multiplicatif. Ici encore, la comparaison est évidente : ce n''est qu'à partir de 12 à 13 ans (Catégorie 7, classe de cinquième) que les élèves abandonnent les procédures additives pour prendre en compte les rapports.

5. — Rencontre avec la proportionnalité

Le hasard intervient dans les trois situations des problèmes précédents. Peut-il créer une

	Problèmes :	Cat. 6	Cat. 7	Cat. 8
Procédure additives (écarts, B et C)	Pots	78 %	44 %	24 %
	Truites	78 %	31 %	30 %
	Sacs		22 %	16 %
Procédures multiplicatives (rapports, D)	Pots	6 %	48 %	69 %
	Truites	7 %	68 %	67 %
	Sacs		70 %	77 %

difficulté de compréhension particulière qui ait pour conséquence de perturber chez les élèves le fonctionnement encore peu stabilisé de la proportionnalité ?

Le problème des *Confitures*, proposé en catégories 6, 7, 8 pour la finale du 15e RMT en 2007, qui sur le plan des procédures à mettre en œuvre conduit aussi à des comparaisons de rapports, va nous donner des éléments de réponse à la question précédente.

LES CONFITURES (Cat 6, 7, 8),

C'est la récolte des cerises. Grand-mère prépare des confitures dans son énorme chaudron, pour sa famille et ses voisins.

Lundi, elle cuit 8 kg de cerises avec 5 kg de sucre.

Mardi, elle cuit 10 kg de cerises avec 7 kg de sucre.

Jeudi, jour de la plus grande récolte, elle cuit 16 kg de cerises avec 10 kg de sucre.

Samedi, fin de la récolte, elle cuit 5 kg de cerises avec 3 kg de sucre.

Quel est le jour où elle a fait la confiture qui a le goût le plus sucré ?

Y a-t-il des jours où les confitures ont le « même goût » en sucre ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

La structure du problème, se résume ainsi, selon qu'on s'intéresse aux écarts ou aux rapports entre les quantités de sucre et de cerises :

	sucre	cerise	écarts	rapports
lundi	5	8	+3	0,625
mardi	7	10	+3	0,7
jeudi	10	16	+6	0,625
samedi	3	5	+2	0,6

Les résultats confirment les observations précédentes :

— Au niveau 6 la majorité des copies examinées, 56 %, font apparaître des procédures additives et aboutissent à la réponse : les confitures ont le même goût le lundi et le mardi car il y a 3 kg de différence … et 44% des copies se réfèrent au rapport 0.625.

— En catégorie 7, la tendance s'inverse : 24% pour les écarts et 76% pour les rapports.

— En catégorie 8, il ne reste plus que 11% des copies en faveur des écarts et 89% pour les rapports.

Les résultats précédents sont calculés sur une centaine de classes finalistes (donc triées sur le volet) en fin d'année scolaire, ils ont été confirmés par de très nombreuses autres expérimentations où l'attrait de la procédure additive est beaucoup plus forte et le passage aux rapports n'apparaît vraiment qu'au degré niveau 8.

6. — Première synthèse et perspectives d'avenir

Nous sommes partis d'une interrogation : « peut-on proposer une approche de la notion de probabilité dans l'enseignement élémentaire des mathématiques, et à quel âge ? ». Sur ce sujet, en quatre ans de constructions de problèmes, d'analyses a priori, d'observations a posteriori, de recueil de données sur des milliers de classes, d'expérimentations et réflexions, nous avons obtenu quelques données importantes pour la poursuite du débat.

Nous avons dépassé le stade des observations personnelles, des contextes particuliers, – locaux ou nationaux (classes, élèves, programmes) –, et des croyances ou convictions individuelles. Nous *pensions* que des problèmes pour l'approche de la notion de probabilité pouvaient être envisagés pour le Rallye Mathématique Transalpin ; nous *savons* maintenant qu'il en existe, *Les pots de bonbons, Les truites, La main dans le sac* par exemple, qu'ils placent les élèves devant une difficulté réelle, que ceux-ci disposent de plusieurs procédures pour déterminer une solution, et que c'est vers l'âge de 13 à 14 ans qu'ils sont généralement en mesure de passer des écarts aux rapports pour surmonter l'obstacle de la quantification d'une probabilité.

Nous avons pu constater que ce passage des procédures additives aux procédures multiplicatives se fait très précisément au même âge pour un problème de proportionnalité (*Les confitures)* sur des nombres entiers du même ordre de grandeur, cela dans tous les pays participant au rallye.

Nous avons été surpris de la simultanéité de la maîtrise du concept de rapport dans le contexte probabiliste (nombre des cas favorables sur le nombre des cas possibles) et dans celui de la proportionnalité. Nous l'attendions plus tôt dans ce dernier contexte, vu le travail des années précédentes sur les divisions et les fractions et vu les nombreux « problèmes » que l'élève résout depuis les niveaux 5, voire 4, à propos de recettes culinaires, de mélanges d'eau ou de sucre…

Nous savions encore que, selon Piaget [Piaget, (1951]), ce n'est pas avant le stade des opérations formelles que l'élève peut envisager des raisonnements probabilistes, qui requièrent les opérations combinatoires et les proportions [5].

Pour revenir à notre interrogation sur l'âge auquel on pourrait envisager d'aborder explicitement la notion de probabilité, nous observons donc une limite d'âge clairement déterminée par nos résultats, nos analyses du concept de rapport et par les travaux en psychologie génétique. Faut-il pour autant renoncer à une approche intuitive plus précoce en collège, voire à l'école primaire, comme c'est le cas dans certains programmes en Suisse, en Italie, au Brésil, et dans de nombreux autres pays ? Nous ne le pensons pas, mais il y a là un champ largement ouvert pour les recherches en didactique des probabilités.

De fait, les enfants côtoient quasi quotidiennement des manifestations du hasard et s'en font des représentations tributaires des biais psychologiques mis en évidence par de nombreuses recherches [Lecoutre, Kahneman et al.]. Leur pratique des jeux les habituent à comparer « les chances » dans des situations aléatoires simples, sans que celles-ci soient nécessairement exprimées par des rapports ou pourcentages. Ainsi, au niveau élémentaire, l'estimation d'un gain se fait souvent par un nombre entier de « chances », évidemment non transférable d'une situation à l'autre.

5 Extrait d'un texte de la Fondation Jean Piaget, *Piaget et l'épistémologie,* par M.-F. Legendre :
« *La constitution des notions de hasard et d'irréversibilité suppose néanmoins l'intervention d'opérations déductives. Piaget constate en effet qu'avant la constitution des premières opérations logico-mathématiques et spatio-temporelles élémentaires, l'enfant ne différencie pas ce qui est possible et ce qui est nécessaire et il ne comprend pas l'irréversibilité liée aux phénomènes de brassage et de mélange.* » ...
« *À l'étape ultérieure, les opérations combinatoires et les proportions, propres au niveau formel, permettent d'inventorier les possibilités et de les doser en attribuant à chaque cas isolé une probabilité à titre de fraction de la distribution de l'ensemble total. C'est à ce niveau qu'apparaît le jugement de probabilité résultant d'une synthèse du hasard et des opérations, par assimilation du premier aux secondes, et dont la signification est de marquer les limites de l'action du sujet à une certaine échelle* ». …(Fondation Jean Piaget, Piaget et l'épistémologie par M.-F. Legendre).

Nous pensons donc qu'il serait souhaitable que dès l'école primaire, les enfants soient placés dans des situations familières où le hasard intervient, afin d'organiser leurs idées et anticiper sur les biais psychologiques évoqués. Par exemple, l'observation systématique des variations des issues d'une expérience aléatoire quand elle est répétée dans les mêmes conditions, peut amener les élèves à faire des comparaisons pour organiser leurs paris. Les enfants seraient ainsi sollicités pour passer d'une appréhension qualitative de possibilités à la recherche d'une première quantification de type préprobabiliste, préparant une véritable compréhension de la notion de probabilité en liaison avec la construction de la proportionnalité. S'il nous semble donc que l'enseignement d'une définition laplacienne à l'école élémentaire est prématuré, cela n'interdit pas, bien au contraire, de faire travailler les enfants dans des situations aléatoires variées pour développer leurs intuitions et leurs perceptions du hasard reproductible [Lahanier-Reuter].

Cette première synthèse que nous présentons à partir de problèmes du RMT, concerne des faits observés, analysés sur la base des explications des élèves, mais elle reste statique : un recueil de données, des tableaux, des inventaires de procédures significatives. Il est temps de revenir à la dynamique du RMT et de ses problèmes qui vivent au-delà de leur conception, de leurs phases de résolution et d'analyses a posteriori : pour être repris en classe à des fins didactiques. *Les pots de bonbons* et les autres problèmes de cette famille ont une caractéristique que nous n'avons pas encore prise en compte : ils permettent à tous les groupes d'élèves de s'approprier la situation, d'en percevoir les enjeux, de faire intervenir des relations entre les nombres donnés pour expliquer leur stratégie. Un indice incontestable : nous n'avons pas trouvée de « feuille blanche » parmi les copies examinées.

On peut donc être certain qu'en proposant *Les pots de bonbons* et *La main dans le sac* à des classes de niveaux 6, 7 ou 8, par groupes, sans intervention de l'enseignant, on obtiendra des stratégies, procédures et solutions diverses, qui pourront être confrontées lors d'un débat collectif en classe. Nous n'allons pas entrer dans les modalités de gestion de cette phase collective, mais nous pouvons facilement en imaginer les potentialités :

— conflit entre procédures reposant sur les écarts ou sur les rapports ;

— conflit entre les procédures additives qui conduisent au pot I avec les couples de nombres (6 ;10) et (8 ;14) pour *Les pots de bonbons*. et les mêmes procédures additives qui conduisent au sac B avec les couples de nombres (6 ;10) et (9 ;14) pour *La main dans le sac ;*

— passage à la vérification sur de très grands nombres de tirages dans une approche par les « fréquences » et les tendances du phénomène, vu que les conflits ne pourront vraisemblablement pas être résolus (à moins que l'enseignant n'impose sa vérité) ;

— …

Il est vrai qu'il faudra du temps pour le débat, l'organisation des tirages, le recueil et l'analyse des données expérimentales. Il semble cependant que le jeu en vaut la chandelle lorsqu'on imagine toutes les connaissances mathématiques mises en œuvre, avec du sens, pour se convaincre que c'est bien dans le pot I ou dans le sac B qu'il faut plonger la main.

Références bibliographiques

BERNOULLI, Jakob (1713). *Ars Conjectandi,* 4ème partie. Traduit du latin par Norbert MEUSNIER dans *Jacques Bernoulli et l'Ars conjectandi,* Irem de Rouen, 1987.

BRÊCHET,. Michel, et all (2003). *Nombres et opérations, (Méthodologie et commentaires)* 2003 CIIP (Conférence intercantonale de l'Instruction publique de la Suisse romande et du Tessin) et LEP (ÉEditions Loisirs et pédagogie).

KAHNEMAN, D., SLOVIC, P., & TVERSKY, A. (1982). *Judgement under uncertainty, heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

LAHANIER-REUTER, Dominique (1999). *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques,* PUF, col. Éducation et Formation.

LAPLACE, Pierre-Simon de (1814). *Essai philosophique sur les probabilités* (5ème édition, 1825), Editions Bourgois, 1986.

LECOUTRE, Marie-Paule & FISCHBEIN, Efraïm (1998). Évolution avec l'âge de misconceptions dans les intuitions probabilistes en France et en Israël, *Recherches en didactique des mathématiques* 18/3, 332

PIAGET, Jean (1951). *La Genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, Jean Piaget , Barbel Inhelder eds., PUF 1951.

VERGNAUD, Gérard (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques,* 10/2-3, pp.135-169.