LA NAISSANCE DE LA GEOMETRIE : LA GEOMETRIE AVEC LES YEUX DES EGYPTIENS

Yvo JACQUIER
Peintre et chercheur
Prague

Voici l'explication d'un peintre contemporain, adossé à une solide culture mathématique acquise lors de ses études pour devenir ingénieur. Elle est le fruit d'une recherche de plus de sept ans qui, au travers de l'étude d'oeuvres d'art, l'a amené à une vision originale de la géométrie et de ses origines. On pourra consulter son riche site internet : http://www.jacquier.org (NdR)

I. — Présentation

Cet article s'adresse en priorité aux mathématiciens. Il rassemble des éléments qui les concernent directement. Les démonstrations sont accessibles à un large public; en revanche seuls les professionnels sont habilités à adouber ce travail, sur le plan scientifique et pédagogique, travail qui explique le passage historique d'une géométrie «avec les yeux», à celle où le calcul s'associe à la construction des figures.

1. *Définitions*

Art : Le champ où s'inscrit ce travail de recherche a lieu d'être précisé : il comprend peinture, sculpture et architecture dans l'histoire.

Composition : La composition est comparable au bois de coffrage du bâtiment. Le propre de ce bois est de se retirer à la fin du chantier. Un ensemble de figures géométriques guide le trait de l'artiste ou de l'architecte, jusqu'à se faire digérer par l'œuvre.

Figure géométrique et structure géométrique : Les figures peuvent être envisagées séparément, comme c'est la «tradition» dans l'histoire, mais elles deviennent véritablement intéressantes quand elles se lient entre elles pour former un réseau, une trame plus complexe capable d'assumer, et de donner un sens à l'œuvre qui se bâtit sur elles.

Géométrie sacrée : La géométrie sacrée est la pratique ancestrale de l'art de la composition. Elle se sert de structures géométriques pour construire des œuvres d'art. Cette géométrie a un sens, porté par les valeurs numériques des figures, identifiables sur un quadrillage.

2. *La géométrie comparée*

La géométrie comparée est la Science qui étudie les œuvres construites avec une géométrie sacrée. La méthode consiste à comparer les œuvres entre elles pour faire ressortir des structures communes. Un principe s'ajoute, celui de la double-preuve, qui éclaircit les nombreux résultats de l'étude et écarte les schémas secondaires. A ce jour, aucune œuvre majeure, depuis le paléolithique jusqu'à la Renaissance et même au-delà (Ingres), n'échappe à la pratique de la géométrie sacrée. Elle s'est éteinte avec la tradition des ateliers, « remplacée » par des discours…

Les dix œuvres qui ont marqué l'étude

- La Vénus de Lespugue	21 000 av J-C, Gravétien
- La fresque de Osiris et Ay	1 350 av J-C, Égypte
- La Vierge de Vladimir	XIIe siècle (Byzance) and XVe siècle (Rublev ?)
- La façade de la Maison à la Cloche	XIVe siècle, Prague
- La Sainte Trinité	1420/28, Rublev
- La naissance de Vénus	1485, Botticelli
- L'Autoportrait	1500, Dürer
- La Vierge au Rosaire	1506, Dürer
- Melencolia I	1514, Dürer (Polyèdre et «Die drei Meisterstiche»)
- Les Tarots de Nicolas Conver	1760, modèle de Dürer

Les points communs de toutes ces œuvres

L'étude révèle une véritable culture de la composition dont la première caractéristique est sa formidable UNITE. La pratique inconsciente et instinctive des primitifs devient lucide et réfléchie au Néolithique. Les structures se développent par étapes depuis l'Égypte jusqu'à Durer sans jamais se contredire : les valeurs numériques identifiables par la mesure grâce au quadrillage ne changent jamais de sens. Pour les anciens, la géométrie est indéformable, éternelle et insondable : c'est la langue de Dieu, rendue accessible par la lecture des nombres.

Les trois grands maîtres

Les trois grands maîtres de la géométrie sacrée sont Rublev (qui préfigure les fractales), Botticelli (qui transcende les canons), et enfin Durer qui réunit vingt et une cartes en un seul système. Sa version des Tarots de Marseille constitue une véritable encyclopédie des symboles.

II. — L'Egypte et la géométrie

1. *Le contexte*

L'ordre des choses

Peut-on imaginer les hommes pratiquer le calcul sans prendre note de leurs procédés et de leurs résultats ? Évidemment non. Le calcul naît ainsi avec l'écriture, ou plus exactement : la première écriture concerne les livres de comptes, qui lui donnent un côté «concret». La géométrie précède l'algèbre de plusieurs milliers d'années. L'on s'accorde à situer la transition entre une géométrie de formes pures et une géométrie soumise à l'analyse des nombres entre l'Égypte et la Grèce. Les Sumériens et les Babyloniens ont aussi leurs pratiques, mais le grand «bond en avant» de la géométrie se produit bel et bien quelque part entre ces deux écoles : il n'est pas un homme illustre en Grèce qui ne fasse ses classes en Égypte (voir l'annexe 1 : Les Grecs en Égypte). Pythagore, comme les autres, hérite des problèmes que s'y posent les géomètres... La géométrie est la première forme palpable de l'intelligence abstraite, et l'Égypte est sa première haute école.

Les résultats de la géométrie comparée

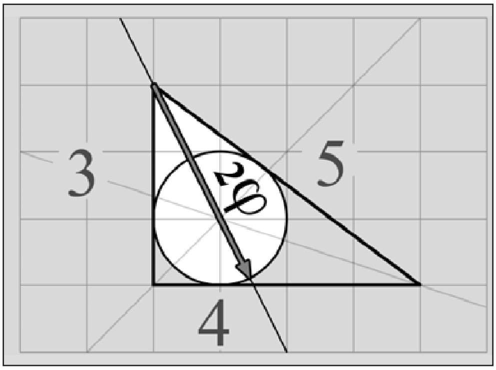
Il serait difficile de comprendre l'Egypte sans les apports de la géométrie comparée. Les formes mises en évidence, y compris la pratique du quadrillage, remontent à l'Antiquité. Sans prendre en compte leur intérêt et leur usage, tels qu'ils se sont manifestés par la suite, comment en expliquer la naissance ? Sans la réalité des systèmes de composition qui le prennent pour module, le modeste triangle 3-4-5 reste un outil rudimentaire, une vulgaire équerre posée sur le sol pour rassurer le maçon. En revanche, la mise en évidence de sa structure interne bouleverse son approche, et précise les circonstances qui font de lui un triangle sacré. Il n'y a dans cette révélation aucun rideau de fumée, aucun concept sur la magie, qu'elle soit pharaonique ou pythagoricienne. Rien que des faits mathématiques issus de l'étude des œuvres d'art qui succèdent à l'antiquité du triangle. Un travail réel (voir l'annexe 2 : Exemples de l'art égyptien).

2. *La démarche*

Le recours à l'étude et au bon sens

Les éléments biographiques manquent cruellement pour reconstituer une histoire précise et cohérente de la naissance de la géométrie, depuis le néolithique sortant de ses cavernes jusqu'à la Grèce de Thalès ou d'Euclide.

Pour dépasser ce flou, nous disposons des apports de la géométrie comparée, et de notre bon sens. Deux lacunes se révèlent, qui n'en font qu'une historiquement : la méconnaissance de la géométrie égyptienne. D'une part celle des œuvres produites grâce à elle, de l'autre l'état exact de son savoir (symbolisé par la proportion dorée du triangle 3-4-5).



Les deux aspects peuvent être séparés selon la barrière Science/Science Appliquée, ou rassemblées sous la bannière de «géométrie avec les yeux». Les Égyptiens font de leur religion un art, et l'un comme l'autre progressent avec la géométrie. La philosophie entend dominer cette trinité...

Sans l'étude des œuvres, cette relation fondamentale est quasiment inaccessible. En cela, il est très difficile de dissocier historiquement l'aspect strictement mathématique de l'aspect strictement artistique. Dans les faits, les deux forment une seule et même culture, et ils sont le reflet l'un de l'autre. Les quelques tentatives de «calibrage» des œuvres égyptiennes confessent leur précarité par l'absence de la proportion dorée du triangle sacré en tant que base. Cette particularité du triangle est LA clé de toute la géométrie sacrée, depuis l'Égypte ancienne jusqu'au-delà de la Renaissance !

D'autre part, ce point précis (sur la précieuse proportion dorée du triangle sacré) n'est l'objet sinon d'aucune publication, au moins d'aucune publicité. Or, si publication il y avait, elle aurait intéressé les pédagogues des mathématiques au plus haut point.

Le point sur l'histoire

En résumé, l'Antiquité a approché les mathématiques selon deux façons :

— une logique de mesure (Sumer) qui aboutit au calcul avec des tables.

— une logique d'angles (Egypte) qui aboutit à la géométrie sur un quadrillage. Historiquement, Pythagore reprend le témoin de la géométrie développée par les Égyptiens. La question se pose alors de savoir où cette géométrie en est de ses développements. Et avec quels outils ?

3. *Les outils de la géométrie égyptienne*

L'on peut admettre que les Égyptiens n'inventent pas le théorème de Pythagore avant lui, et que celui-ci ne vole pas son brevet à l'Égypte.

Ensuite, la géométrie fait appel en priorité à deux outils de démonstration : les triangles semblables et le théorème de Pythagore. S'il est possible de construire une figure sans faire appel au second, *i.e.* de mettre en évidence des propriétés remarquables sans autre argument que celui des triangles semblables, l'on peut attribuer ce résultat aux Egyptiens. Deux arguments de poids plaident en ce sens. Ils disposent de trois millénaires pour parvenir à ces résultats, et ils laissent derrière eux quelques pâtés sur le sable qui étonnent encore les architectes aujourd'hui...

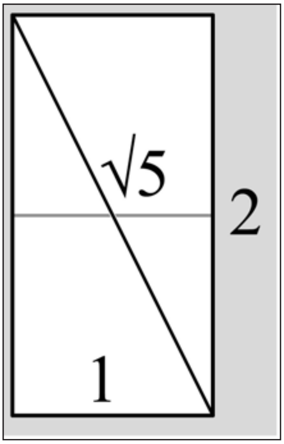
Le double carré et sa diagonale

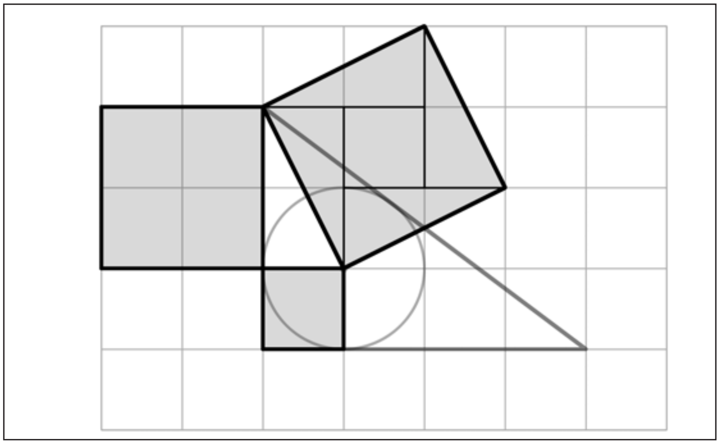
Ce simple segment réclame cinq étapes successives pour expliquer sa progression dans la géométrie. En résumé :

1 - Il lui faut d'abord un quadrillage. Cette logique est initiale.
2 - La diagonale du double-carré devient alors remarquable.
3 - Le segment devient une entité de mesure à part entière (notée arbitrairement Δ au cours de cette étude)
4 - La diagonale révèle sa mesure exacte : $\sqrt{5}$ (Ceci, avant, après ou avec Pythagore...)
5 - L'irrationalité de $\sqrt{5}$ est un débat sinon postérieur, du moins écarté de celui qui nous occupe : le nombre d'or égyptien, tout de géométrie, est construit à partir d'un modeste triangle 3-4-5 sur un quadrillage. Il n'est pas nécessaire de définir la nature profonde de $\sqrt{5}$ pour construire avec ϕ (*Phi, le nombre d'or*)...

Si les égyptiens identifiaient la mesure de cette diagonale du double-carré, ils disposeraient de deux exemples de mesure concernant l'angle droit (double-carré et triangle 3-4-5). Même allergique au calcul, une telle civilisation trouverait forcément la clé de Pythagore. L'on peut même affirmer que cette diagonale du double-carré est une clé pour le fameux théorème, puisque le rapprochement des deux figures y conduit tout droit.

Il est à noter que pour les Égyptiens comme pour les Sumériens ou les Babyloniens, l'angle droit du triangle 3-4-5 est axiomatique. La $\sqrt{5}$ intervient donc, comme proposition à la diagonale, dans le même esprit que le 5 du triangle au départ. La démonstration du théorème de





Pythagore par les surfaces ne concurrence pas l'affirmation précédente : tout au contraire, elle s'inscrit dans son prolongement logique. Les surfaces sont le meilleur moyen de traduire physiquement la réalité des racines carrées (un carré de surface 5 a pour côté $\sqrt{5}$). Un parallèle mériterait d'être fait avec le principe de la double-preuve adopté par la géométrie comparée. Il ne suffit pas de vérifier que $\sqrt{5}$ est une distance convenable comme diagonale d'un double-carré. Cette chose étant «posée» par intuition provoque l'esprit, qui prend conscience d'une autre réalité : celle du triangle rectangle...

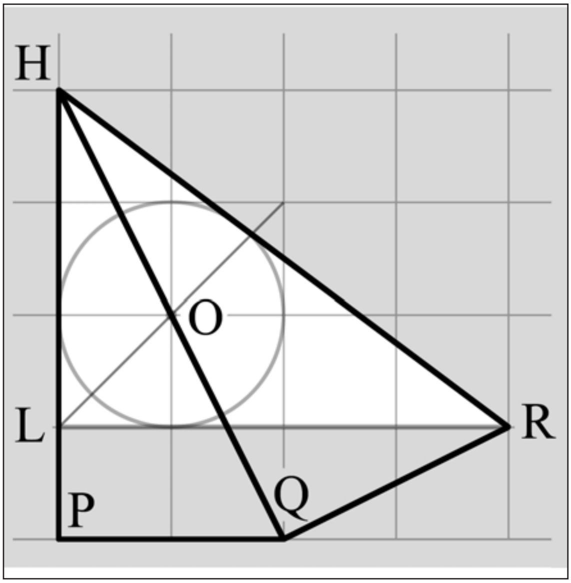
Le quadrillage

La tradition des bâtisseurs de Cathédrales fait état de cette origine, mais pas seulement : ses vestiges figurent dans les collections du Louvre (http://cartelfr.louvre.fr/cartelfr/visite?srv=car_not_frame&idNotice=3578) et des conférenciers font état de cette pratique :

« Les mathématiques égyptiennes étaient l'expression intellectuelle du principe organisationnel universel de la civilisation égyptienne appelé « Maât » et signifiant à la fois le bien, la vérité, la justice, la justesse, l'exactitude, la rigueur, l'ordre cosmique et social, l'harmonie, la beauté, la grâce, la simplicité. Tous les raisonnements mathématiques portaient la signature de ce principe, car ils se terminaient par la formule « cela est conforme à Maât », d'où dérive la formule moderne CQFD, « ce qu'il fallait démontrer ». De la même manière, nous pouvons dire que l'art égyptien était conçu comme l'expression esthétique de Maât, qui était parfois représenté par une femme avec un outil de sculpture. La perfection d'une œuvre d'art était conçue comme « la conformité à Maât », tout comme une œuvre mathématique.

C'est pourquoi les artistes égyptiens ont inventé dès la fin de la période de Nagada la « méthodes des quadrillages » encore appelée la « méthode des carreaux » qui permet de reproduire et d'agrandir une figure « quadrillée » dans le plan ou dans l'espace avec la précision et la perfection mathématique, ce qui était indispensable pour réaliser des fresques ou des statues géantes en respectant les proportions. » (Pascal K. Adjamagbo; http://www.africamaat.com/spip.php?page=comment&id_article=1210)

Nous allons maintenant montrer que la géométrie des Égyptiens se passe de Pythagore pour établir les propriétés incroyables du triangle sacré. Elle laisse au grand mathématicien le soin de préciser la diagonale du double-carré. Pour le remercier de ce service en Or rendu à la géométrie, celle-ci lui fait implicitement cadeau du théorème qui portera son nom...



III. — Le triangle sacré des Egyptiens

C'est le triangle 3 - 4 - 5 admis comme rectangle.

1. *Son cercle intime*

Soit HLR, un triangle 3-4-5. Soient les points P, Q, et O du quadrillage, facilement identifiables sur la figure. Les triangles HPQ et HQR sont semblables. Selon quoi l'angle PHQ est égal à l'angle QHR.

Le coefficient qui les différencie est :

$$HR/HQ = HQ/HP = QR/PQ = \sqrt{5}/2 \approx 1{,}118.$$

Mais pour les Égyptiens, là n'est pas la question.

O est donc sur la bissectrice de l'angle en H du triangle 3-4-5 (triangle sacré). Or, O est aussi sur la bissectrice de l'angle en L. Le centre du cercle inscrit au triangle est au croisement des trois bissectrices. Deux suffisent, c'est donc O, et le rayon du cercle est donc 1. CQFD

Le diamètre du cercle intime du triangle est 2

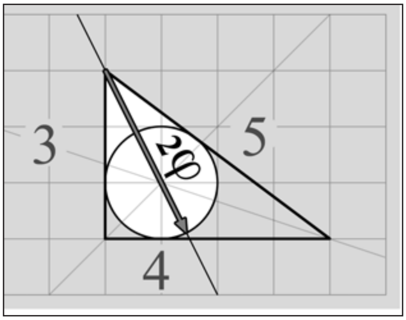
Bien évidemment, les propriétés du triangle sont à la liste des arguments de la démonstration. Ce n'est pas sur ce point que se sépare la Grèce de L'Egypte. Ces propriétés se passent de calcul, au même titre que celles des triangles semblables.

2. *La divine proportion*

La propriété cachée du triangle sacré

La bissectrice dorée venant de l'angle qui unit les segments 3 et 5 du triangle, porte la proportion dorée (entre le sommet et le cercle inscrit). Ce fait est absent de tout manuel de mathématiques et de toute littérature sur les œuvres sacrées. La géométrie comparée a mis cet élément fondamental en évidence, et en a précisé le rôle exact dans les systèmes de construction. L'arithmétique affirme de très belles choses qui ne rendent pas compte de l'usage, de la réalité que prend le nombre d'or au cœur de la géométrie sacrée : géométrie pour et avec les yeux.

Visuel 1 — **Le triangle sacré**



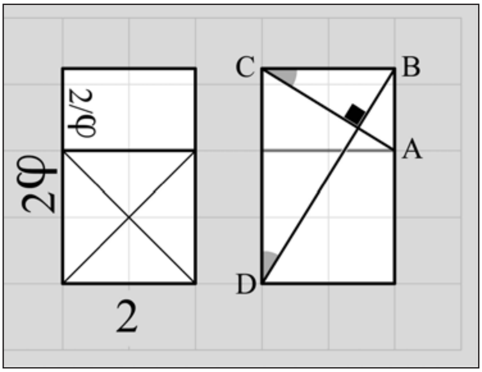
Réf. : www.jacquier.org/triangle-sacre.html

En résumé, le triangle rectangle 3-4-5 compte trois bissectrices qui sont les diagonales d'un simple, d'un double et d'un triple carré. Nous avons vu que son cercle inscrit a pour rayon 1.

Enfin et surtout, voici la proportion dorée, ici représentée par une flèche, sur la bissectrice d'ordre 2, et baptisée pour cette raison «bissectrice dorée».

Visuel 2 — **Le rectangle doré de côté 2**

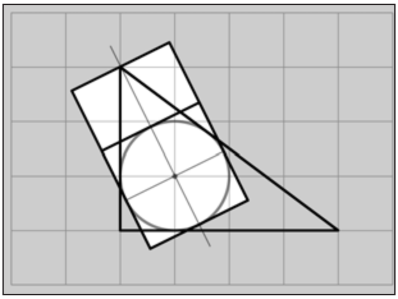
La propriété égyptienne du nombre d'or n'est pas celle du nombre et de ses vertus en matière de calcul, mais celle de sa proportion géométrique particulière. Si l'on retranche un carré à un rectangle doré, le rectangle résiduel a la même proportion. Avant de le placer sur le triangle sacré, voici un rectangle doré, dont le petit côté est de 2 carreaux.



Conséquence de la particularité évoquée plus haut : les deux rectangles, grand et petit, voient leurs diagonales se croiser à angle droit, du fait de leur orientation différente (tournée d'un quart de tour).

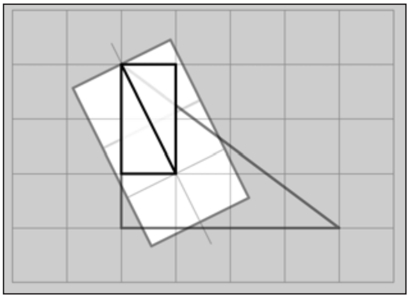
Sur la figure, les triangles ABC et DBC sont semblables (le grand est ϕ fois plus grand que le petit). Cette similitude des triangles, qui équivaut à celle des rectangles, implique l'orthogonalité des diagonales. Et c'est cette propriété qui caractérise le rectangle doré chez les Égyptiens.

***Visuel 3* — Placement du rectangle doré**



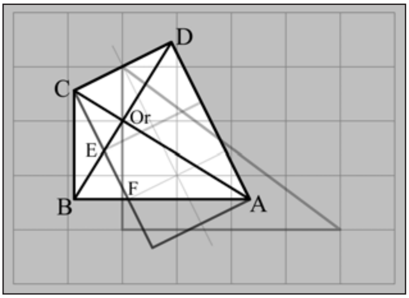
Le rectangle doré se place à cheval sur sa bissectrice, exactement là où elle donne la mesure de $2.\phi$, entre le sommet et la base du cercle.

***Visuel 4* — Le module**



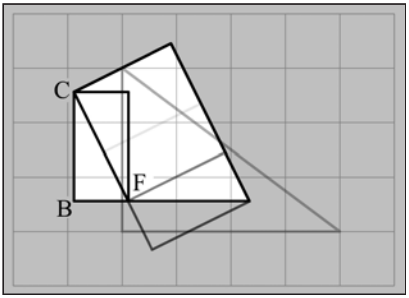
On appelle module le double-carré et sa diagonale. Il ne cesse de revenir tout au long de l'étude. La diagonale est notée Δ au lieu de $\sqrt{5}$. Nous avons vu que le rayon du cercle est 1. Selon quoi, la hauteur du rectangle fait $\Delta + 1$: $\Delta + 1 = 2.\phi$.

***Visuel 5* — Le Grand Cerf-volant**



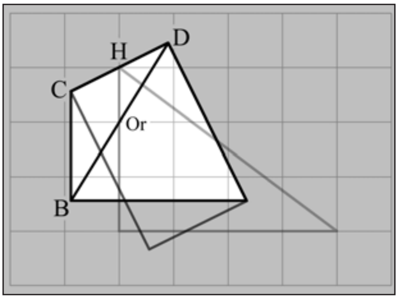
Peut-être le papyrus permet-il cette construction... Nous souhaitons vérifier que les deux diagonales se croisent à angle droit, ce qui serait la preuve que cette surface du rectangle en produit une autre plus petite de mêmes proportions quand on lui retire un carré. Sont ici matérialisés les deux premiers étages en double carrés du rectangle doré. Soit B le point à la verticale de C et à l'horizontale de A. Un point important désigné par point d'Or «semble» au croisement des diagonales...

***Visuel 6* — Le placement du module**



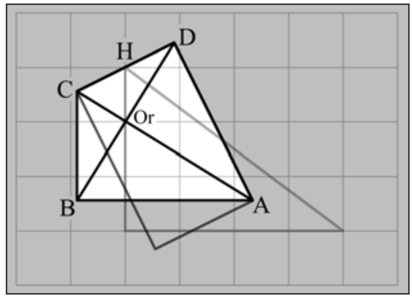
L'angle BCF est égal par construction à l'angle en F de la partie claire du premier étage (double-carré) donc (B)FA est bien horizontale. Ensuite, ce qui est vrai au niveau de la bissectrice est tout aussi vrai pour les bords du rectangle. Comme le «premier étage» fait 1 de haut, pour rejoindre le point F, l'on peut placer le module avec CF = Δ. La somme reste la même, à savoir : hauteur du rectangle = $\Delta + 1$. BF = 1, et le trait horizontal fait Δ par construction du «premier étage». La somme des deux, $1 + \Delta$, horizontale, est égale à la hauteur du rectangle !

***Visuel 7* — La partie avant du cerf-volant**



Nous venons d'établir que les deux segments «arrières» sont équivalents, de valeur 1 + Δ. Maintenant, il y a égalité aussi entre BC et CD, soit 2. Le cerf-volant est symétrique.
Le point Or se distingue à la verticale de H, sommet du triangle et milieu de CD. Il est situé au 1/3 supérieur de la verticale du triangle 3-4-5, et au milieu de BD selon Thalès, puisque la distance de H à Or vaut 1, moitié de CB.

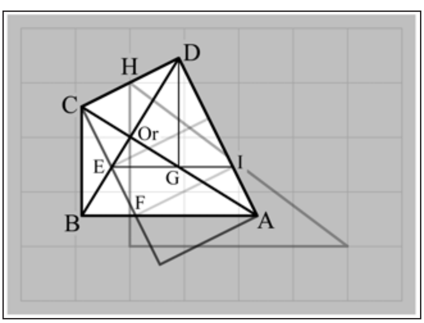
***Visuel 8* — Placement de la diagonale au rectangle**



La ligne médiane AC du Cerf-Volant ne peut passer que par le point d'Or établi comme milieu de BD. Et les deux lignes internes sont à angle droit : cette méthode est la première dans le temps pour tracer les angles droits à l'aide de piquets fichés en B et D, et de deux cordes tendues, dont on a repéré le milieu (A et C). Le compas perpétue le principe dans une ambiance plus aristocratique.

L'on a fixé le cadre du Cerf-Volant et deux droites qui se croisent à angle droit au point d'or. Si l'une est la diagonale du rectangle doré (AC), rien ne prouve pour l'instant que le point E, l'un des quatre sommets du petit rectangle doré, soit sur la ligne venant de D pour piquer sur B.

***Visuel 9* — L'assaut final**



Soit G le point situé deux carreaux à l'aplomb de D (DG = 2). G est situé entre I et E selon l'égalité des triangles CBF et DGI (DI = Δ). EI = Δ si l'on considère le deuxième étage du rectangle doré. GI = 1, toujours selon l'égalité des triangles, donc EG = Δ - 1 De même CF = Δ, et EF = 1 (deuxième étage du rectangle doré). CE = GE = Δ – 1, et E est sur la médiatrice de CG. Continuons cette logique de la corde raide...

B est à la verticale de C et G à la verticale de D. CB = CD = DG =2. Donc BCDG est un losange de côté 2 et CB = BG = 2. D, E et B, et par voie de conséquence, Or, sont alignés sur la médiatrice de CG.

Les diagonales CA et ED sont orthogonales. CQFD

Voilà comment l'on peut, avec un matériel de démonstration minimum, sans Pythagore ni trigonométrie, mettre le rectangle doré du triangle sacré en évidence. Les deux diagonales du rectangle et du petit rectangle sont à angle droit.

Avis au lecteur : peut-être est-il possible, avec les mêmes règles, de simplifier cet assaut final...

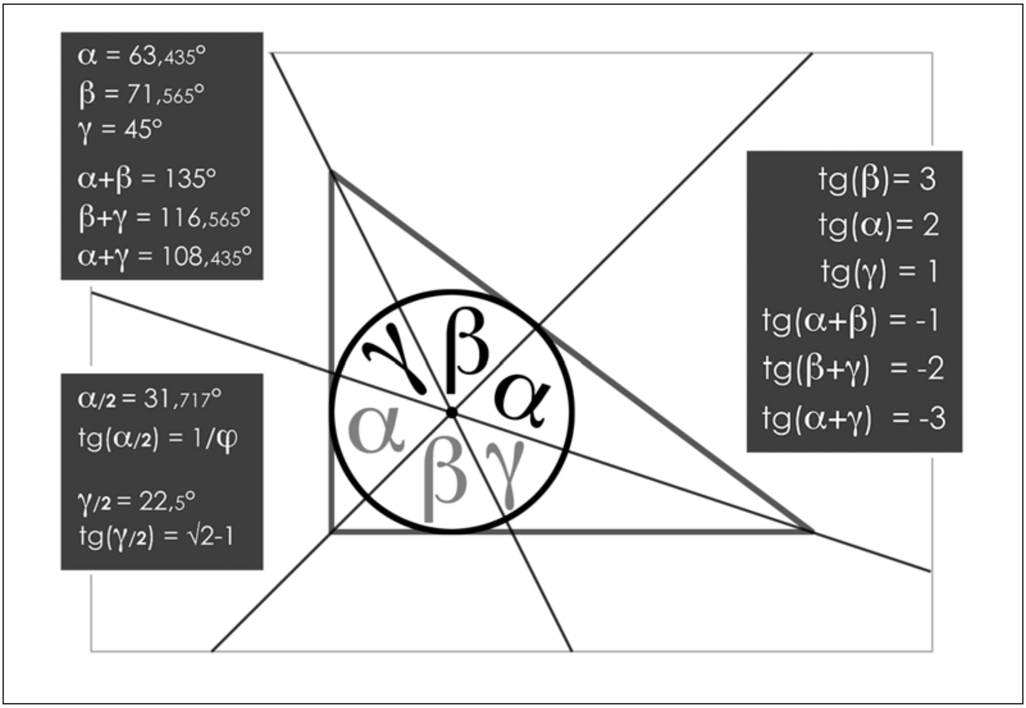
3. *Ses angles*

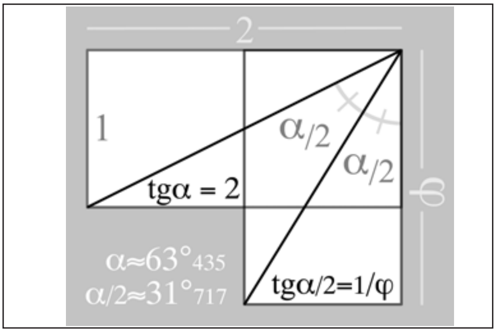
La trigonométrie permet de constater l'extraordinaire organisation interne du triangle 3-4-5. Les bissectrices définissent naturellement trois angles en se croisant au centre du cercle inscrit.

Premier constat

L'ordre d'une bissectrice est le nombre de carrés dont elle est naturellement la diagonale.

Suivant cette définition, les bissectrices d'ordre 1, 2 et 3 se croisent au centre du cercle inscrit. Deux à deux, elles forment deux angles : l'un est aigu et l'autre est obtus. La tangente de l'angle aigu n'est autre que l'ordre de la troisième bissectrice (logique trinitaire), et la tangente de l'angle obtus est encore l'ordre de la troisième, mais précédé du signe "-". Par exemple : les bissectrices d'ordres 1 et 3, venant du bas du triangle, forment un angle aigu α dont la tangente est 2, ordre de la bissectrice qui vient du haut du triangle (bissectrice dorée). L'angle obtus, $(\alpha+\beta)$, a pour tangente -2.



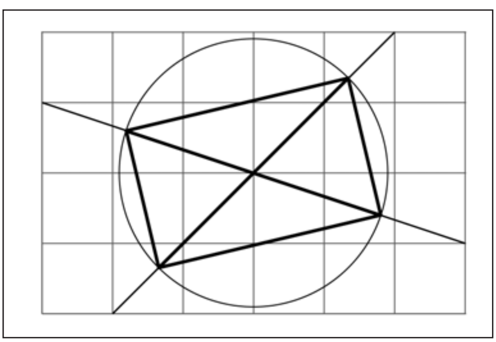


Deuxième constat

L'angle α de tangente 2 est aussi le grand angle de la diagonale du double carré, et sa moitié le petit angle de la diagonale du rectangle doré. La figure ci-dessus montre le lien de la bissectrice dorée avec les deux chiffres qui la marquent : l'ordre 2 du double carré, et ϕ. L'angle α a pour tangente 2, et sa moitié $1/\phi$ ($= \phi - 1$) ! (voir *visuel* 9, en A)

Comme les autres, cette propriété sort de la concrétude de la géométrie, et pas des calculs dont le nombre d'or est l'objet. Et on peut s'étonner de ne pas toutes les trouver au rayon des classiques de la géométrie scolaire...

Troisième constat : la deuxième apparition du nombre d'or dans le triangle 3-4-5



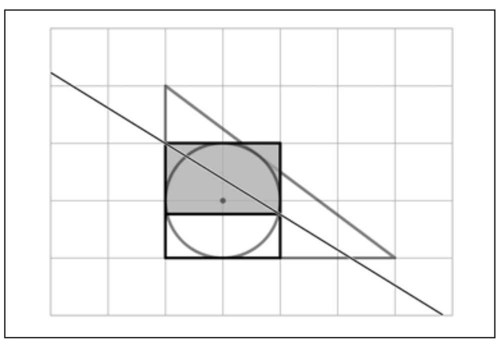
Comment construire un rectangle doré sur un quadrillage de 4 × 6 ? Traçons deux droites à partir des points situés à un carreau de l'angle du quadrillage, et passant par le centre du quadrillage (respectons le même sens de rotation). Ces deux droites sont des diagonales dorées : un cercle pointant au centre décidera de la taille du rectangle doré qui prendra les deux droites pour diagonales. Le rôle du quadrillage dans la géométrie sacrée est ici explicite : construire, comprendre, et retenir (clarté et simplicité).

4. *Le carré du Pape*

Ce carré tire son nom du cercle de diamètre $2.\phi$ qu'il accompagne. Le cercle du Pape a une grande importance dans la composition des Tarots (version de Durer/Conver). Il décrit parfaitement la courbe du vêtement du Pape, exposé par la lame V des arcanes majeurs.

Première étape

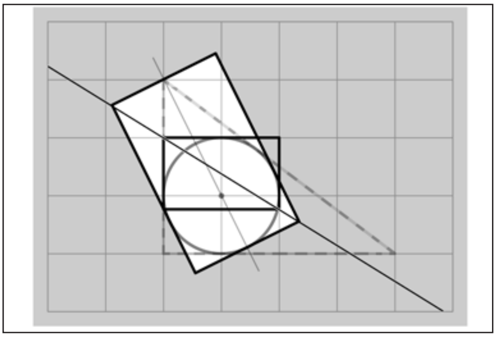
Voici une autre façon de présenter l'insondable foisonnement des rapports entre le triangle sacré et le nombre d'or. Toutes les démonstrations se font avec les mêmes arguments que les deux premières, sans Pythagore ni racine carrée : c'est une géométrie avec les yeux et pour les yeux (par la concrétude de la représentation picturale). La première étape consiste à diviser le carré du cercle intime selon ϕ et à



tracer une diagonale du rectangle (qui mesure 2 sur $2/\phi$).

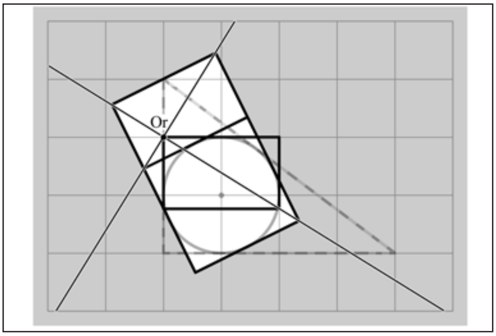
Deuxième étape

Un rectangle de largeur 2, comme le cercle intime, et de hauteur $2.\phi$, se place à cheval sur la bissectrice dorée venant du sommet du triangle, et prend la première diagonale comme la sienne :



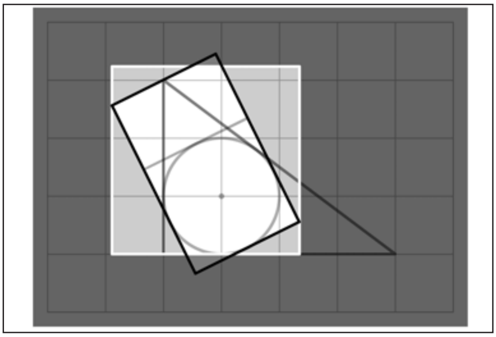
Troisième étape

Considérons le petit rectangle doré inscrit au rectangle incliné. Sa diagonale croise la première à angle droit, caractéristique des divisions dorées, en un point appelé Point d'Or. Ce point est également sur le segment 3 du triangle, à la hauteur 2, à 1 unité du sommet :

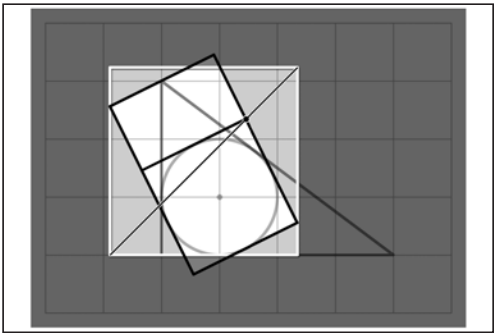


Quatrième étape

Le carré du Pape, de largeur $2.\phi$, s'accorde avec le rectangle incliné. Les coïncidences vont encore plus loin :

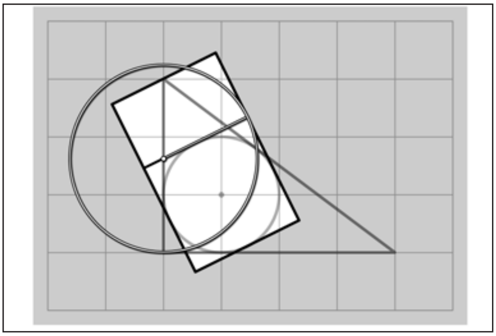


Posé au niveau de la base du triangle, le carré du pape est l'objet d'une autre coïncidence : la diagonale du carré passe par le point de séparation du petit rectangle doré et de son carré associé. Ce qui porte à trois le nombre de points remarquables :



Cinquième étape

Enfin, le cercle du pape, de rayon ϕ (de même largeur que le carré), se pose sur l'axe du Ciel de façon précise. Son centre est sur la droite qui sépare le petit rectangle doré de son carré.



La distance au bord du rectangle est ϕ, la distance à la Terre également.

IV. — CONCLUSION

1. *Les deux étapes de l'approche du nombre d'or*

L'Antiquité a vécu deux étapes dans l'approche du nombre d'or. La plus connue, et même la seule que révèle l'écrit (l'histoire ne se réfère qu'à lui, particulièrement quand il s'agit de peinture et de mathématiques), correspond à l'école grecque. Evaluer, mesurer, comparer à l'unité, sont ses obsessions. Cette école prend l'irrationalité des nombres pour une provocation, et comme tout ce qui la préoccupe, le nombre d'or est le résultat d'un calcul, d'une équation. Pour les Grecs, l'expression la plus puissante du nombre d'or est le *Pentagramme*, et ses projections en trois dimensions dans les solides de Platon. Pythagore le prend pour signe de ralliement. C'est son mandala, son viatique, la question éternelle attisant ses instincts de pugiliste et d'homme dressé. La version cachée du nombre d'or est égyptienne. Les Egyptiens inventent la géométrie «juste avec les yeux», sur un quadrillage grâce auquel ils peuvent tout construire et tout démontrer (sans calcul et sans irrationnel).

Leur figure de référence est le triangle sacré, qui sert soit-disant (?) à l'arpentage dans les civilisations avoisinantes (Sumériens, Babyloniens etc). Les Égyptiens identifient la proportion dorée du triangle, et ils en comprennent le rôle autant que l'intérêt. Bien après les Pyramides, Pythagore va à cette école, et il découvre le « Δ du Nil » désignant la diagonale du double carré (révélation du Soleil de LouxOr). Il émet alors une option : et si $\Delta = \sqrt{5}$? Et tout s'éclaire ! Il dispose désormais de deux exemples avec les triangles 1-2-$\sqrt{5}$ et 3-4-5. Son célèbre théorème est né. Le pentagramme est connu de toutes les civilisations antiques. Son rôle n'est cependant pas le même. La géométrie comparée établit le statut exact des figures, leur rôle et leur rapport avec les autres à l'intérieur des systèmes de composition. Le triangle sacré est selon les cas, une simple corde à treize nœuds pour tracer des angles droits ou la figure de base d'une géométrie sacrée à la complexité époustouflante... Le pentagramme est, de même, sujet à différents statuts dans l'antiquité et c'est Pythagore qui en développe le premier les aspects miraculeux...

Les Egyptiens ne pensaient pas la géométrie comme nous, arrière-petits enfants d'Euclide. Ils se fiaient à l'évidence que le quadrillage offrait à leurs yeux. Mais parce que leur mode de pensée est perdu, nous n'avons d'autre choix que celui de pratiquer l'école de Jules Ferry, id est de justifier le passage d'une ligne à l'autre par des propriétés dûment énoncées et certifiées au départ. Le système hypothéticodéductif des Grecs prend alors une allure rétro-active. Pourtant il n'en est rien : les Égyptiens se sont refusés à dépasser l'évidence, et avec elle ils sont allés très loin !

2. *L'immense rôle du théorème de Pythagore*

De l'Antiquité à la Renaissance

« ... *Aussi l'Égypte a-t-elle été le berceau des arts mathématiques* » écrit Aristote dans *La Métaphysique*. Le premier des Grecs à apprendre la géométrie avec les yeux des Égyptiens est Thalès (voir l'annexe 1: Les Grecs en Égypte). Avec ses semblables il inaugure une voie en posant la définition de l'axiome. Le théorème de Thalès se confond pratiquement avec l'axiome des triangles semblables. Certes, le résultat procède du calcul, mais celui-ci ne réclame aucune stratégie particulière de démonstration, aucun décrochement. C'est Pythagore qui inaugure cette autre voie : il développe des surfaces qui ne sont pas dans la figure initiale, et il joue avec elles dans le but d'obtenir un résultat qui n'est pas trivial. En ce sens, ce théorème est le premier d'un genre nouveau, que l'on peut qualifier de créatif. C'est la porte d'entrée d'un édifice qui s'achèvera par Les *Eléments* d'Euclide.

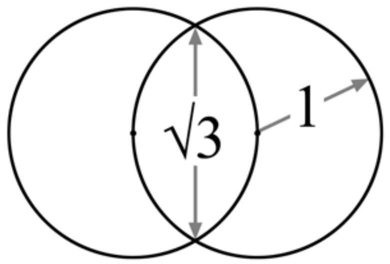
Le Théorème de Pythagore est le principal outil de mesure dont dispose la géométrie jusqu'à l'apparition de la trigonométrie. Pour exemple, le calcul des sphères du polyèdre de Durer (voir http://www.melencoliai.org/). Cette question est restée irrésolue pendant des siècles au point que nombre d'universitaires pensaient qu'il était mal défini. En réalité, Durer n'aurait jamais exhibé une question mathématique irrésolue dans une œuvre majeure. La solution ne pouvait en conséquence se résoudre que sur un plan, avec Pythagore. Et il n'y a pas trente-six façons de couper le polyèdre (toute figure se ramène à des angles droits)... Ce solide repose sur la géométrie du pentagramme.

Pythagore applique son théorème

Pythagore ne lie pas les formes aux nombres pour résoudre des problèmes de comptabilité : il cherche à répondre à l'obsession que résume son célèbre « Tout est nombre ! ». Le rôle «technique» que justifie son «théorème de mesure» n'intègre pas la dimension spirituelle du personnage. Il enseigne à ses disciples ce qu'il a compris en Égypte (et également avec la musique, toute d'harmonie), et pour lui, les nombres sont la clé de l'interprétation comme de la constitution des symboles. Pour reconstituer cette histoire dans l'histoire, il suffit d'admettre que Pythagore applique son théorème à toutes les figures usuelles, à commencer par celle du triangle 3-4-5. Il prend conscience que toutes les valeurs naturelles y sont représentées, depuis le 1 jusqu'au 7.

En voici la liste : 1 est le rayon du cercle intime -2 est son diamètre -3, 4 et 5 sont les côtés du triangle -6 est sa surface -7 est la pente de l'hypoténuse quand l'ensemble s'incline de 45° -enfin le nombre d'or s'y affirme par deux fois : la divine proportion se pose sur la bissectrice dorée quand les autres bissectrices sont les diagonales d'un rectangle doré. π échappe à l'assaut de la géométrie (en 1882, Ferdinand von Lindemann démontre qu'il est vain). Reste donc la racine du trois, si chère au vocabulaire des géomètres du sacré... L'établissement de cette valeur avec son nouvel outil est l'occasion pour Pythagore de mettre de l'ordre dans la mythologie.

En effet, les mythes les plus primitifs attribuent à la terre un genre féminin, et au ciel un genre masculin. Un stade végétal, en quelque sorte (pollinisation). Aphrodite/bientôt Vénus représente un progrès : son mythe nous explique la sexualité des poissons (quand le ciel vient féconder l'écume de mer). La figure du Vesica Piscis (Composée de deux cercles jumeaux -le centre de l'un sur le cercle de l'autre) est l'une des plus simples, et donc des plus anciennes. De celles qui servent de diapason aux géomètres du sacré pour identifier leurs valeurs.



Vesica Piscis

La vulve explicite qu'il représente, féminine donc, est pudiquement qualifiée de «déïque», et les Pythagoriciens la considèrent comme sacrée. Ce symbole est aussi attribué à Vénus, ou plus exactement aux entités qui portent le même type de sens avant elle : le féminin sacré. Or selon le théorème de Pythagore, la hauteur de l'intersection fait $\sqrt{3}$ fois le rayon. La racine exprime l'origine, la source, le mystère d'un élément. Mais même sans cette définition/explication qui entrera tôt ou tard dans la tradition, le Vesica Piscis se rapporte explicitement au 3, entrainant avec lui les deux valeurs symboliques qu'il porte : féminin et sacré. Pythagore «découvre» ainsi un 3 féminin et céleste. Et à cette occasion, l'on peut noter que le mot «céleste» gagne en nuance par rapport au ciel de la fécondité évoqué plus haut. Cette nouvelle définition est en rupture avec les mythes archaïques, où le ciel est masculin. Mais Pythagore doit choisir entre un héritage de type primitif et la vérité que les mathématiques dévoilent à ses yeux. La symbolique, qui deviendra tradition avec le temps, lui donnera évidemment raison de choisir les mathématiques ! Dernière réflexion : les anciens se relient à des croyances quand ils n'ont pas les moyens de faire autrement, mais dès que l'outil d'observation ou de construction le permet, leur raison se met en marche.

ANNEXE 1 : *Complémentarités*

Cette publication doit beaucoup à l'aide aussi bienveillante qu'experte, de Jean-Paul GUICHARD et Henri LOMBARDI, qui ont accepté d'être les tuteurs de l'auteur de cet article. Merci à eux !
Henri LOMBARDI est notamment l'auteur d'un article qui s'inscrit dans le prolongement de celui-ci, sur les possibilités du quadrillage dans la géométrie euclidienne : « Eloge du papier quadrillé ». (Repères-IREM, N° 45, 2001; http://www.univ-irem.fr/spip.php?article=71&id_numero=45)

ANNEXE 2

Les Grecs en Egypte

- Thalès (-625, -547) Il étudie la géométrie en Egypte.
- Pythagore (-580, -497) Il apprend la langue pharaonique en Egypte, puis «les doctrines secrètes relatives aux dieux».
- Démocrite (-460, -370) Ce philosophe apprend la géométrie en Egypte.
- Eudoxe (-406, -355) Cet astronome passe 15 mois avec les Prêtres Egyptiens.
- Platon (-428, -347) Suite à sa rencontre avec les Pythagoriciens, il séjourne en Egypte chez les prêtres du haut clergé.

Pythagore en Egypte

XXVIe dynastie (-664 à -525)

—> Pythagore (-580 à -497)

—> Amasis (-571 à -526)

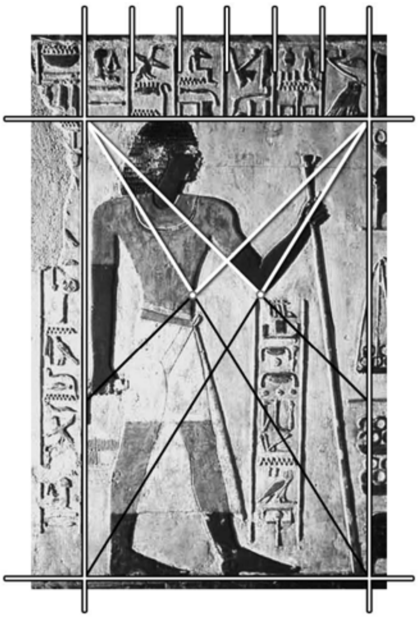
Général d'origine libyenne (berbère), Amasis bat Apriès, passé à l'ennemi babylonien Nabuchodonosor II après qu'il l'ait déchu, en -567. Personnage haut en couleurs d'origine plébéienne, Amasis est un souverain novateur et réformateur. Il reconquiert le Proche Orient jusqu'à Chypre, qui lui assure une flotte commerciale considérable.

Son long règne est propice à une intense activité architecturale. Saïs, Naucratis, Memphis, Abydos, Karnak, Philæ, Siwa... Jusqu'en -545, la renaissance saïte (de saïs, ville du premier pharaon unificateur Ménès) est à son apogée. Allié de Cyrène, de Crésus de Lydie, de Polycrate de Samos, et de Delphes, il noue de nombreux contacts avec les cités grecques et accueille de nouveaux contingents ioniens et cariens. Il invite à la cour de grands penseurs, philosophes ou mathématiciens grecs tels Thalès de Milet et Pythagore (sur la recommandation de Polycrate, tyran de Samos). Pour financer cette politique, il lève des impôts, prélevant même une part des revenus du clergé, ce qui lui vaut une certaine impopularité.

Les Egyptiens (Amasis), les Lydiens (Crésus) et les Babyloniens (Nabonide) s'allient en vain contre le fondateur de l'empire perse : Cyrus le Grand. Après sa conquête de la Lydie, puis la prise de Babylone, Cyrus publie une déclaration, inscrite sur un cylindre d'argile connu sous le nom de « Cylindre de Cyrus », contenant une description de ses victoires, une documentation de sa lignée royale et actes compatissants. Elle est souvent mentionnée comme étant la « première charte des droits de l'homme », et décrète les thèmes normaux de la règle persane : tolérance religieuse, abolition de l'esclavage, liberté du choix de profession et expansion de l'empire. Puis il vainc Amasis en -526, ainsi que son successeur un an plus tard.

ANNEXE 3

Exemples de l'art égyptien



Premier exemple - Le souverain Benia

18e dynastie, autour de 1500 ans avant notre ère (bien avant Pythagore et bien après les pyramides)

Placement du cadre doré et identification du quadrillage

- En bas : les pieds du souverain
- A gauche : le fil vertical des inscriptions
- En haut : le bas des hiéroglyphes et la tête de Benia
- Ceux-ci sont six en largeur et fixent le bord droit

Ensuite, les diagonales du rectangle coupent les bissectrices à 45° en deux points qui sont ancrés dans la réalité du sujet (coude et ligne de l'abdomen).

Enfin, détail important, un trait que l'on pourrait prendre pour l'index de sa majesté souligne la diagonale dorée. C'est une marque de composition. L'étude ne souffre pas trop de la relative vétusté du sujet ni de la déformation optique de la photo.

Second exemple - Slab stellae de la princesse Néfertiabet

Sœur de Khéops - 4e dynastie
(≈ -2500 ≈ Pyramides).
Calcaire peint - Giza, musée du Louvre.

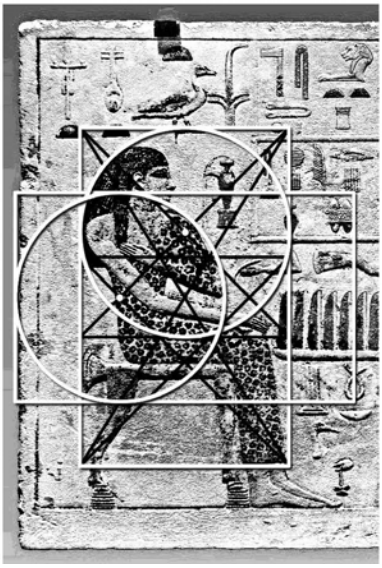
Un second exemple de Croix Grecque

Les cercles inscrits aux rectangles sont valorisés.

- Celui du haut dessine la chevelure
- Celui de gauche enveloppe le bras

Non représentés ici (pour rester lisible)

- Celui de droite esquisse le décolleté
- Celui du bas pointe l'arrière du trône et la main (motif)



ANNEXE 4

Remarques sur le nombre d'or

— Les différentes appellation du Nombre d'Or sont : Nombre scandaleux car irrationnel (selon Platon). Proportion d'extrême et moyenne raison (selon Euclide). Proportion d'Euclide (selon Fibonacci). Section dorée (sectio aurea, selon Vinci). Divine proportion (selon Pacioli). Section d'or (der goldene Schnitt, selon Zeising). Nombre d'Or (fixé par Ghyka). Phi (ϕ -expression mathématique, selon Theodore Cook). Proportion dorée (selon l'usage courant).

— Les débats politico-religieux autour du nombre d'or ne doivent pas troubler l'étude mathématique de ce nombre, qui reste la meilleure façon de reconstituer la pensée des anciens (selon l'hypothèse minimale qu'ils faisaient preuve de logique).

— ϕ (Phi, le nombre d'or) n'est pas transcendant, mais π (Pi) y arrive... La particularité algébrique du nombre d'or est dans l'équation « $\phi^2 = \phi + 1$ », et la solution de cette équation est $\phi = (1+\sqrt{5})\div 2 \approx 1{,}618\ 034\ldots$ Ce nombre est irrationnel, en cela qu'aucune fraction de nombres entiers ne peut l'exprimer. En revanche, ϕ n'est pas transcendant : il est la solution à une équation polynomiale, en l'occurrence « $X^2 - X - 1 = 0$ ». La définition algébrique de la transcendance se traduit concrètement en géométrie : un nombre transcendant échappe à la règle et au compas ! On peut construire ϕ, mais ça n'est pas possible avec π (le problème de la quadrature du cercle est insoluble). Ne soyons pas étonnés si la géométrie sacrée, héritière de la géométrie égyptienne, fait référence au nombre π (notamment par son approximation 22/7), mais sans le développer.

— L'origine du nombre d'or, en tant que pratique, remonte à l'Égypte pré-dynastique (vraisemblablement la civilisation de Nagada). À cette époque, le désert ne l'a pas encore séparée de l'Afrique noire. Nagada se développe sur le haut Nil, à une latitude où le solstice trace précisément, sur la table d'orientation, la diagonale d'un double-carré. La civilisation égyptienne est une civilisation du Soleil, et elle pratique le nombre d'or comme les angles avec virtuosité. Curieusement, un même type de civilisation s'épanouit en Amérique centrale, à la même latitude...

— Le nombre d'or est en grande partie responsable de la solidité des systèmes de composition. C'est grâce à ses propriétés que les figures géométriques trouvent les coïncidences, les liens qui les unissent. Ce nombre est dans la nature profonde du triangle 3-4-5, enfoui dans sa structure interne. En cela, la logique dorée ne se résume pas à une série de rectangles emboîtés. Le pentagramme expose également cette proportion, mais il s'appuie toujours sur une trame, un quadrillage dirigé par la figure initiale du triangle. De façon générale, l'on attribue à tort à la géométrie sacrée un esprit de proportions (ou de canons). Mais l'harmonie ne se suffit pas d'une simple multiplication, qui deviendrait magique dès qu'elle fait intervenir le nombre d'or. Botticelli dénonce même cette erreur dans son tableau « La naissance de Vénus » : la belle ne respecte pas les fameux canons de Vitruve, et elle se transforme en sirène par la vraie magie de la géométrie : un Vesica Piscis où s'inscrivent quatre triangles 3-4-5. Des tentatives plus contemporaines font état de «tracés régulateurs», mais ils réduisent également le propos de la géométrie. La totalité d'une structure ne peut pas être révélée tant que son quadrillage n'est pas dûment établi.