A PROPOS DE L'INTRODUCTION DU CONCEPT DE NOMBRE DERIVE D'UNE FONCTION EN UN POINT PAR L'APPROCHE CINEMATIQUE EN CLASSE DE PREMIERE S

Caroline DUCOS
Irem de Poitiers

Résumé : Introduire la notion de nombre dérivé d'une fonction en un point par l'approche cinématique conduit les élèves de première S à faire émerger la notion de dérivée symétrique, qui n'est pas la notion que l'on veut enseigner. La lecture des programmes de sciences physiques et de mathématiques explique les raisons de cette émergence. Les conséquences du choix de la dérivée symétrique sont alors étudiées, du point de vue algébrique puis du point de vue graphique, pour constater que pour les fonctions rencontrées au lycée, la notion de dérivée symétrique et la notion de dérivée au sens usuel coïncident. Des raisons possibles du choix de la dérivée au sens usuel par les mathématiciens et de la dérivée symétrique par les physiciens sont évoquées. Il reste à savoir s'il est possible et souhaitable de construire la notion de nombre dérivé au sens usuel à partir de la notion de dérivée symétrique, et de voir quelle progression en cours de mathématiques permettrait de faire comprendre aux élèves le lien entre le travail effectué en cours de sciences physiques et celui effectué en cours de mathématiques.

Lors de la mise en place du nouveau programme de la classe de terminale S, l'équipe lycée de l'Irem de Poitiers a été sollicitée pour préparer, avec des formateurs de sciences physiques, un stage destiné aux enseignants de mathématiques et de sciences physiques de la série S, dont le but était de favoriser une interdisciplinarité entre ces deux disciplines. Cela a amorcé une réflexion sur l'introduction du concept de nombre dérivé d'une fonction en un point par l'approche cinématique en classe de première S.

I. Étude de l'introduction de la notion de dérivée par l'approche cinématique

Reportons-nous d'abord aux programmes de mathématiques et de sciences physiques de la classe de première S. Celui de mathématiques propose des démarches pour l'introduction de la notion de dérivée :

Dérivation
Approche cinématique ou graphique du concept de nombre dérivé d'une fonction en un point.
Plusieurs démarches sont possibles : passage de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée pour des mouvements rectilignes suivant des lois horaires élémentaires (trinôme du second degré dans un premier temps) ; zooms successifs sur une représentation graphique obtenue à l'écran de la calculatrice.

La lecture du programme de sciences physiques nous informe que la notion de dérivée n'apparaît que par l'intermédiaire du vecteur vitesse (la dérivée pour calculer une vitesse ne sera utilisée qu'en classe de terminale [1]) :

> « *Vecteur vitesse d'un point du solide.* »
> « *Sur un enregistrement réalisé ou donné, déterminer et représenter le vecteur vitesse* **V** *d'un point mobile.* »

Un commentaire rappelle la définition de vitesse d'un point d'un solide :

> « ***Vitesse d'un point d'un solide.***
> *La valeur de la vitesse moyenne est introduite comme le quotient de la distance parcourue par la durée. La mesure approchée de la valeur de la vitesse d'un point est obtenue par le calcul de la valeur de la vitesse moyenne entre deux instants voisins.* »

On comprend alors le déroulement de la séance dont il est question dans le document d'accompagnement des programmes de mathématiques de la classe de première S qui avait pour objectif d'introduire la notion de dérivée à partir de la vitesse instantanée :

> [...] *c'est sur proposition des élèves que l'on s'est orienté vers la dérivée symétrique.*

Comment aurait-il pu en être autrement ? Rappelons que la dérivée symétrique d'une fonction en un point a est définie, quand elle existe et est réelle, par la limite quand h tend vers 0 du rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

1 Cela laisse un temps de maturation du concept de dérivée et d'apprentissage des techniques de calcul, et évite que la notion soit nécessaire en sciences physiques avant d'avoir été étudiée en mathématiques…

D'après la définition donnée dans le programme de sciences physiques, la vitesse instantanée d'un mobile, disons en t_0 , est la vitesse moyenne entre deux instants voisins, que l'on peut choisir $t_0 + \Delta t$ et $t_0 - \Delta t$, avec Δt petit. Donc si f est la loi horaire, la valeur approchée de la vitesse instantanée est le quotient

$$\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0-\Delta t)}{2\Delta t}.$$

[Remarquons qu'il n'y a pas de calcul de limite, mais on n'obtient qu'une valeur approchée, comme cela est précisé dans le programme de sciences physiques.]

Nous nous sommes alors interrogés sur les différences et les liens éventuels entre les deux notions de dérivée.

II. Comparaison de la dérivée au sens usuel et de la dérivée symétrique : le point de vue algébrique

1. *Les définitions*

Les fonctions dérivables ne sont pas les mêmes selon la définition de la dérivée que l'on choisit. Plus précisément, si une fonction f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en a (au sens usuel), c'est-à-dire si :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ >0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

et $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existent et sont réelles, alors, par changement de variable, $\lim_{\substack{h \to 0 \\ >0}} \dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}$ existe et est réelle.

Or on a les égalités suivantes pour tout h strictement positif :

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right)$$

donc $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ a une limite réelle quand h tend vers 0 par valeurs positives (et par valeurs négatives par changement de variables), cette limite étant la moyenne de la dérivée à droite et de la dérivée à gauche. La dérivée symétrique en un point est donc égale à la moyenne de la dérivée à droite et de la dérivée à gauche en ce point (au sens usuel). Dans le cas d'une fonction dérivable en un point au sens usuel, la dérivée à droite et la dérivée à gauche en ce point existent et sont égales, ainsi la dérivée symétrique est égale à la dérivée au sens usuel en ce point. Mais si les dérivées à gauche et à droite d'une fonction en un point ne sont pas égales, la fonction est dite non dérivable en ce point au sens usuel, alors qu'elle est dérivable en ce point au sens de la dérivée symétrique. En conclusion, *une fonction dérivable au sens usuel est dérivable au sens symétrique, mais la réciproque est fausse.*

On est ainsi amené à considérer comme dérivables en un point (au sens symétrique) des fonctions dont la dérivée à gauche et la dérivée à droite en ce point ne sont pas égales. C'est le cas par exemple de la fonction valeur absolue en 0.

Remarquons que pour les trajectoires étudiées dans le cours de sciences physiques en classe de première S, les notions coïncident, puisque les lois horaires sont des fonctions dérivables (au sens usuel, donc au sens symétrique).

2. *Les vitesses de convergence*

En classe de première S, en sciences physiques, les élèves doivent déterminer des vitesses instantanées à partir d'enregistrements de trajectoires de mobiles à intervalles de temps constants. Ils ne peuvent donc calculer que des valeurs approchées de ces vitesses instantanées. L'utilisation d'un rapport comme

$$\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0-\Delta t)}{2\Delta t} \quad \text{ou} \quad \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

donne de meilleurs résultats que l'utilisation du rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand la fonction f est suffisamment régulière.

En effet, si la fonction f est C^3 sur un voisinage I de a, si elle est trois fois dérivable dans l'intérieur de I, et si la dérivée troisième de f est bornée par M sur I, l'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'écrire :

$$\left|f(a+h)-\left(f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)\right)\right| \leq \frac{|h|^3}{6}M \qquad (1)$$

et

$$\left|f(a-h)-\left(f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)\right)\right| \leq \frac{|h|^3}{6}M \qquad (2)$$

Pour h non nul, on obtient avec (1) :

$$\left|\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}-f'(a)+\frac{h}{2}f''(a)\right| \leq \frac{|h|^2}{6}M$$

et avec (2) :

$$\left|\frac{f(a)-f(a-h)}{h}-f'(a)+\frac{h}{2}f''(a)\right| \leq \frac{|h|^2}{6}M$$

d'où : $$\left|\frac{f(a)-f(a-h)}{h}-f'(a)+\frac{h}{2}f''(a)\right| \leq \frac{|h|^2}{6}M$$

Alors on a :
$$\left|\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}-f'(a)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}-2f'(a)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)+\frac{f(a)-f(a-h)}{h}-f'(a)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)-\frac{h}{2}f''(a)+\frac{f(a)-f(a-h)}{h}-f'(a)+\frac{h}{2}f''(a)\right|$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)-\frac{h}{2}f''(a)\right|+\left|\frac{f(a)-f(a-h)}{h}-f'(a)+\frac{h}{2}f''(a)\right|\right)$$
$$\leq\frac{|h|^2}{6}M$$

Or on obtient aussi avec (1) :
$$\left|\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right|-\left|\frac{h}{2}f''(a)\right|\right| \leq \frac{|h|^2}{6}M$$

d'où :
$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right| \leq |h|\left(\frac{|h|M}{6}+\frac{|f''(a)|}{2}\right)$$

Ainsi, l'approximation de $f'(a)$ par $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ est en h^2 et elle est donc meilleure que celle avec $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ qui est en h. C'est d'ailleurs la définition de la dérivée symétrique qui a été utilisée pour programmer le calcul du nombre dérivé sur les calculatrices. On pourra consulter à ce propos l'article de L. Trouche dans *Repères* n°34.

Ainsi voit-on justifiée l'utilisation de la dérivée symétrique plutôt que celle de la dérivée usuelle pour des calculs approchés de vitesses instantanées. Cependant, cette comparaison algébrique est délicate à présenter aux élèves, mais un éclairage graphique peut être intéressant.

III. Comparaison de la dérivée au sens usuel et de la dérivée symétrique : le point de vue graphique

1. *Interprétation graphique des définitions*

a. *Cas de la dérivée au sens usuel*

On considère une fonction f dérivable au sens usuel en a, C sa courbe représentative et A le point de C d'abscisse a. Soit h un nombre non nul suffisamment proche de 0 pour que f soit définie en $a+h$, et soit M le point de C d'abscisse $a+h$. Alors $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la sécante (AM), et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la tangente à C en A, cette tangente étant la « position limite » des sécantes (AM).

Donc la courbe d'une fonction dérivable en un point a au sens usuel admet une tangente au point d'abscisse a sécante à l'axe des ordonnées, et le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé en a.

b. *Cas de la dérivée symétrique*

On considère une fonction f dérivable au sens symétrique en a, C sa courbe représentative et A le point de C d'abscisse a. Soit h un nombre non nul suffisamment proche de 0 pour que f soit définie en $a + h$ et en $a - h$, soit M_1 le point de C d'abscisse $a + h$ et M_2 le point de C d'abscisse $a - h$. Alors $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ est le coefficient directeur de la corde (M_1M_2), et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ est le coefficient directeur de la « position limite » des cordes (M_1M_2) (qui existe même si la tangente à C en a n'existe pas).

Considérons par exemple la fonction valeur absolue en 0. Les points M_1 et M_2 ont pour coordonnées respectives $(h ; |h|)$ et $(-h ; |h|)$ donc toutes les cordes (M_1M_2) sont parallèles à l'axe des abscisses, et leur « position limite » est l'axe des abscisses, qui n'est pas tangent à la courbe en 0.

En revanche, si la fonction est aussi dérivable en a au sens usuel, la « position limite » des cordes est bien la tangente puisque ces deux droites passent par le point A et qu'elles ont le même coefficient directeur : la dérivée en a (symétrique ou au sens usuel, puisque dans ce cas elles sont égales).

c. *Cas des fonctions dérivables à gauche et à droite d'un point*

Pour mieux comprendre le lien et les différences entre les fonctions dérivables au sens usuel et les fonctions dérivables au sens symétrique, on va approfondir l'étude des conséquences graphiques des deux définitions. On va se contenter d'étudier le cas où la fonction admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en un point a. [2]

Si une fonction f admet une dérivée à droite en a et une dérivée à gauche en a, alors sa courbe représentative admet deux demi-tangentes au point d'abscisse a, non parallèles à l'axe des ordonnées, dont les coefficients directeurs sont, pour la demi-tangente à droite, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et pour la demi-tangente à gauche, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Ces deux demi-tangentes ont le même coefficient directeur (et sont donc incluses dans la même droite puisqu'elles passent par le point d'abscisse a de la courbe) si et seulement si ces deux limites sont égales. Cela revient à dire d'une part que la courbe admet une tangente au point d'abscisse a, sécante à l'axe des ordonnées, contenant les deux demi-tangentes (le point d'abscisse a n'est donc pas un point anguleux de la courbe), d'autre part que le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite réelle quand h tend vers 0, égale à $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et à $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ autrement dit la fonction est dérivable en a au sens usuel, et donc au sens symétrique. Si la dérivée à droite et la dérivée à gauche sont

2 Cela restreint les fonctions considérées, car une fonction peut être dérivable en un point au sens symétrique mais ne pas avoir de dérivée à droite et à gauche en ce point, par exemple la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$.

différentes, la courbe n'admet pas de tangente au point d'abscisse a sécante à l'axe des ordonnées, la fonction est dérivable en a au sens de la dérivée symétrique[3], alors qu'elle ne l'est pas au sens usuel.

En résumé, si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite réelle quand h tend vers 0 sans distinction de signe, alors au point d'abscisse a la courbe n'a pas de point anguleux parce que les deux demi-tangentes (non parallèles à l'axe des ordonnées) sont incluses dans la même droite, elle admet donc une tangente sécante à l'axe des ordonnées. Choisir de dire qu'une fonction f est dérivable en a si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite réelle quand h tend vers 0, plutôt que de choisir la notion de dérivée symétrique, implique de restreindre la propriété d'être dérivable aux fonctions dont la courbe a une tangente sécante à l'axe des ordonnées au point d'abscisse a.

C'est cette raison qu'invoque le document d'accompagnement des programmes de mathématiques de la classe de première S pour justifier l'utilisation de la dérivée au sens usuel plutôt que la dérivée symétrique.

2. *Conséquence pour l'approche cinématique*

Ce document propose, à partir de l'étude de la vitesse d'« *un mobile dont la distance à un point origine est donnée en fonction du temps par la fonction* $d : t \longmapsto t^2$ », de « *lire graphiquement les vitesses moyennes [...] et de procéder à une première association intuitive entre « pente » de la courbe et « vitesse ». Le passage de vitesse moyenne à vitesse instantanée […] se traduit alors par une recherche de position limite de sécante, que l'on convient d'appeler tangente à la courbe au point d'abscisse 2.* » Or si on respecte le programme de sciences physiques, pour obtenir la vitesse à un instant donné, on utilise la vitesse moyenne entre deux instants voisins, ce qui revient à utiliser les cordes, dont la « position limite » est aussi la tangente à la courbe pour la fonction carré (fonction utilisée dans la situation relatée par le document d'accompagnement des programmes). Ainsi, on ne peut pas justifier la notion de tangente comme limite de sécantes, mais plutôt comme limite de cordes (celles définies plus haut), ce qui revient au même dans le cas de la fonction étudiée dans cette situation, et dans le cas des fonctions rencontrées en sciences physiques en classe de première S (parce que ces fonctions sont dérivables au sens usuel). On ne voit donc pas comment amener les élèves à la notion de dérivée au sens usuel, et pourtant le document d'accompagnement des programmes suggère :

> *« Confrontation à la fonction valeur absolue, en 0 : pas de tangente et pourtant un « nombre dérivé ». D'où la recherche d'une nouvelle définition rompant apparemment avec la « symétrie » conservée jusque-là et l'utilisation (tant pour la recherche d'une vitesse instantanée que pour celle de la tangente) du rapport* $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. »

En effet, nous avons vu que dans le cas de la fonction valeur absolue, les cordes avaient une position limite et le nombre dérivé en 0 au sens symétrique est le coefficient directeur de cette droite limite. Le problème est donc plutôt de savoir pourquoi il est plus judicieux d'utiliser les sécantes plutôt que les cordes. D'autant plus que, comme nous allons le voir, la dérivée symétrique est particulièrement pertinente dans la situation relatée par ce document.

3 On rappelle qu'alors la dérivée symétrique est la moyenne de la dérivée à droite et de la dérivée à gauche (voir le paragraphe II1).

Figure 1

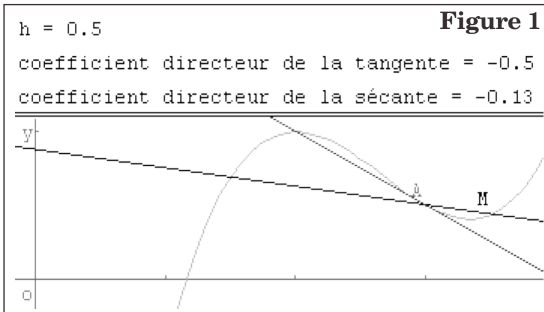
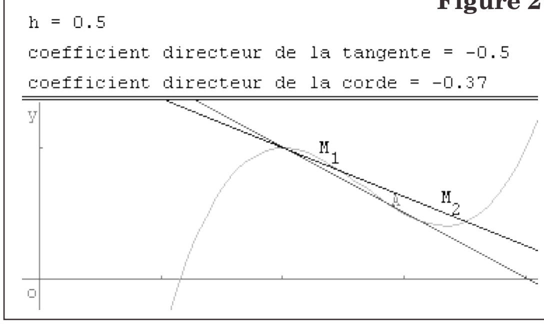


Figure 2



3. *Comparaison graphique des deux dérivées dans le cas d'une fonction dérivable au sens usuel*

On rappelle que dans ce cas, la fonction est aussi dérivable au sens de la dérivée symétrique.

a. *Cas général*

On peut peut-être aborder le sujet avec les élèves en montrant les deux aspects graphiquement (par exemple avec un logiciel de géométrie), après avoir établi le lien entre dérivée au sens usuel et coefficients directeurs de sécantes d'une part, et dérivée symétrique et coefficients directeurs de cordes, d'autre part.

On considère une fonction f définie et dérivable (au sens usuel) sur un intervalle, A(a ; $f(a)$) un point de la courbe C représentative de f, T la tangente à C en A. On considère d'une part la sécante passant par le point A et le point M de C d'abscisse $a + h$ (Figure 1), et d'autre part la corde passant par les points M_1 et M_2 de C d'abscisses respectives $a - h$ et $a + h$ (Figure 2).

On peut faire les observations suivantes :

- Pour des courbes suffisamment « lisses », les positions de la corde et de la sécante tendent vers la position de la tangente quand h tend vers 0. Il n'y a donc pas de contradiction entre le point de vue du physicien et celui du mathématicien, c'est-à-dire que calculer

  $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{ou} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

  donne le même résultat : le coefficient directeur de la tangente.
- La vitesse de convergence : la corde semble converger plus vite que la sécante vers la position de la tangente. On peut l'observer sur le graphique, ou en comparant les coefficients directeurs, pour une même valeur de h.
- En physique, c'est le point de vue « symétrique » qui est retenu. Ce choix est judicieux car il donne un outil efficace pour tracer le vecteur vitesse : quand on est « assez près » de la position étudiée, la corde « donne » de façon approchée la direction de la tangente, donc du vecteur vitesse.

L'article de J.-L. Gasser dans Repères-Irem n°34 donne une interprétation avec les sécantes et les tangentes, où l'on voit intuitivement que le rapport utilisé par les physiciens donne une meilleure approximation que le taux d'accroissement. On comprend aussi pourquoi on choisit la direction du vecteur vitesse parallèle à la droite reliant les points pré-

Figure 3

h = -0.5
coefficient directeur de la tangente = 1
coefficient directeur de la sécante = 0.75

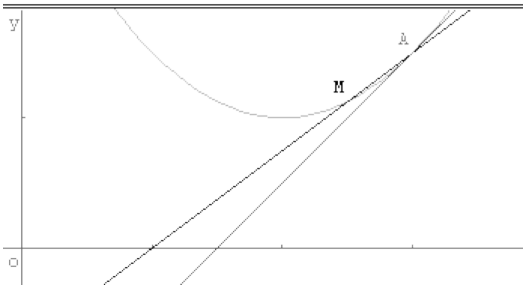
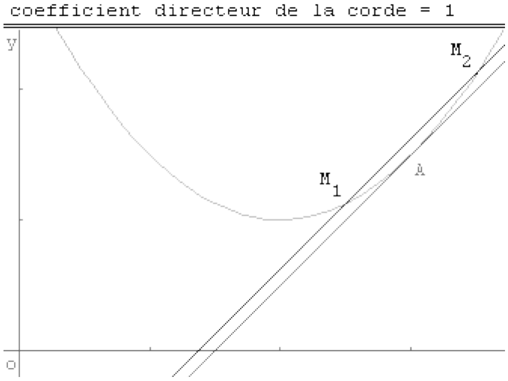


Figure 4

h:0.5
coefficient directeur de la tangente = 1
coefficient directeur de la corde = 1



cédent et suivant du point considéré pour avoir une meilleure approximation.

b. *Cas des paraboles*

Quand la loi horaire est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2, la direction de la corde est la même que celle de la tangente (que l'on soit près ou non du point étudié). On le retrouve aisément par le calcul (cela peut être fait avec des élèves de première S [4]) :

4 Mais c'est un calcul qui présente de réelles difficultés. De nombreuses lettres sont utilisées, et elles n'ont pas toutes le même statut : elles représentent une fonction, des variables, des paramètres… Les élèves ne sont pas habitués à manipuler de telles expressions en mathématiques, et pourtant ils ont à le faire en sciences physiques.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, avec a, b, c des réels, a non nul.

D'une part, on a pour tout réel x_0 et pour tout réel h non nul,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{a(x_0+h)^2 + b(x_0+h) + c - ax_0^2 - bx_0 - c}{h}$$

$$= 2ax_0 + b + ah$$

Le quotient a donc une limite quand h tend vers 0 égale à $2ax_0 + b$, donc f est dérivable et $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

D'autre part, si on cherche à déterminer la dérivée symétrique :

$f(x_0+h) - f(x_0-h) =$
$a(x_0+h)^2 + b(x_0+h) + c - a(x_0-h)^2 - b(x_0-h) - c$
$= 4ax_0h + 2bh$.

D'où $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = 2ax_0 + b$, et ceci sans passage à la limite.

Ceci explique aussi l'efficacité de la méthode des sécantes enseignée en sciences physiques pour déterminer graphiquement le vecteur vitesse, dans le cas d'une trajectoire parabolique. En revanche, on n'a trouvé aucune raison justifiant le choix des mathématiciens d'utiliser la dérivée au sens usuel plutôt que la dérivée symétrique. On a alors cherché des explications dans les origines du concept de dérivée.

IV. Les origines du calcul de dérivée

Les extraits suivants proviennent de la brochure *Des tangentes aux infiniment petits* de l'Irem de Poitiers.

« *Dès l'antiquité, les Grecs [...] rencontrent des courbes [...] et ils s'intéressent à [...] la détermination et la construction des tangentes à ces courbes [...]. [Ils] fourniront des résultats éparts en particulier par* ***Archimède*** (-287,-212) *qui propose une construction de la tangente en un point de la spirale [...].*
Il faut attendre le XVII*ème siècle pour voir apparaître des méthodes plus générales pour déterminer des tangentes :* ***Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665), Roberval (1602-1675)*** *créent chacun leur propre méthode.*
Ces méthodes donneront naissance aux quantités infinitésimales*, au calcul différentiel (ou calcul sur les différences).*
Séparément ***Newton (162-1727)*** *et* ***Leibniz (1645-1716)*** *réaliseront la synthèse des travaux de leurs brillants devanciers. Si les travaux de Newton sont remarquables, ce sont ceux de Leibniz qui ont prévalu en mathématiques et en physique grâce aux notations plus adaptées. [...] La théorie de Leibniz [...] a été précisée par le Marquis de* ***L'Hospital (1661-1704)*** *et par Lazare* ***Carnot (1753-1823)***.»

Carnot définit de la façon suivante ce qu'est une différentielle.

« *On entend par le mot différentielle la différence de deux valeurs successives d'une même variable, lorsque l'on considère le système auquel elle appartient, dans deux ou plusieurs états consécutifs, dont l'un est regardé comme fixe, et les autres comme se rapprochant continuellement, et simultanément du premier, jusqu'à en différer aussi peu que l'on veut.* »

Ainsi, on retrouve le choix d'une quantité fixe $f(a)$, ou d'un point fixe A, et d'une quantité proche $f(a + h)$, ou d'un point proche M, comme pour la dérivée au sens usuel et la sécante, et non pas de deux quantités proches de $f(a)$, à savoir $f(a + h)$ et $f(a - h)$, ou de deux points proches de A, à savoir M_1 et M_2, comme pour la dérivée symétrique et la corde.

Le choix par les mathématiciens de la dérivée au sens usuel plutôt que de la dérivée symétrique pourrait donc être une conséquence historique de la naissance du concept de dérivée : c'est ce qui a été appelé ici dérivée au sens usuel qui a d'abord été construit. Ensuite, la dérivée symétrique (qui donne les mêmes résultats dans les cas les plus courants ou les moins pathologiques si on préfère) s'est avérée plus efficace pour les calculs approchés, ce qui peut expliquer qu'elle est utilisée par les physiciens pour la vitesse instantanée (du moins en classe de première S), et par les concepteurs de machines comme les calculatrices (voir l'article de L. Trouche dans Repères-IREM N°34.)

V. Une progression possible, si on avait le temps...

1. *La dérivée dans les programmes de sciences physiques*

Nous avons vu comment le choix d'introduire la notion de dérivée par l'approche cinématique conduit à rencontrer d'abord la dérivée symétrique et non pas la dérivée au sens usuel, que les professeurs de mathématiques ont à enseigner. Pour éviter ce problème, il suffirait de faire le choix d'une autre approche, comme l'approche « graphique » citée par le programme de mathématiques de la classe de première S, où l'on suppose qu'il s'agit d'étudier les tangentes comme positions limites de sécantes. D'autant plus que l'étude de tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable est au programme de mathématiques de la classe de première S. Mais comment tenir compte de l'exploitation de la dérivée en sciences physiques, pour une meilleure compréhension des élèves, pour que ceux-ci puissent donner du sens aux notions qu'ils rencontrent et pour qu'ils puissent faire le lien entre le travail fait en mathématiques et celui fait en sciences physiques ? Reprenons les programmes de cette discipline.

En classe de première S, l'exploitation graphique de la dérivée est utilisée avec le vecteur vitesse de la façon suivante.

> *« Vecteur vitesse d'un point du solide. »*
> *« Sur un enregistrement réalisé ou donné, déterminer et représenter le vecteur vitesse **V** d'un point mobile. »*

D'après des collègues de sciences physiques, la méthode utilisée pour trouver la direction du vecteur vitesse est de tracer une corde (comme défini au paragraphe III1b). Nous avons vu en effet au paragraphe III3b que dans le cas d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2, la corde et la tangente sont parallèles. Il s'agit ici d'exploiter la dérivée symétrique.

Voyons maintenant le programme de la classe de terminale S.

En physique :

> *« Tracé des vecteurs vitesse et accélération sur des enregistrements de mouvements divers de solides »*
> *« Tracés de vecteurs accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme »*

En chimie pour des vitesses de réaction :

> *« Utilisation d'un tableur-grapheur pour tracer la courbe $x = f(t)$ par exemple et déterminer la vitesse à différentes dates. »*
> *« La détermination de la valeur des vitesses ne doit pas donner lieu à des calculs ; il s'agit seulement de comparer ces vitesses (à l'aide des coefficients directeurs des tangentes des courbes si l'on ne dispose pas de tableur). »*

Cette fois-ci le lien avec la tangente est explicite. Que va comprendre un élève à qui on a enseigné une méthode utilisant des cordes en première puis une méthode utilisant des tangentes en terminale ?

La notion de dérivée comme limite d'un taux d'accroissement (ou de variation selon le programme de sciences physiques) n'est utilisée en sciences physiques qu'en classe de terminale S.

En physique :

> *« L'accélération d'un mobile, notion nouvelle pour les élèves dans le cours de physique, est également un taux de variation, si on la comprend comme la vitesse de la vitesse. [...] Du point de vue théorique, un taux de variation instantané est représenté par une dérivée, notion introduite dans le cours de mathématiques en classe de première S. »*
>
> *« Introduction de* $\frac{\Delta v_G}{\Delta t}$.
>
> *Accélération :* $a_G = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_G}{\Delta t} = \frac{dv_G}{dt}$. »

En chimie pour des vitesses de réaction :

> *« Définition de la vitesse volumique de réaction exprimée en unité de quantité de matière par unité de temps et de volume.* $v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt}$
>
> *où x est l'avancement de la réaction et V le volume de la solution. »*

Le problème est qu'à la lecture de ce programme, on ne sait pas s'il s'agit de dérivée au sens usuel, auquel cas on pourrait utiliser tous les résultats du cours de mathématiques, ou de dérivée symétrique, ce qui permettrait de faire le lien avec la vitesse instantanée vue en classe de première. En effet, que signifie Δv_G [5] ? Est-ce la différence entre les vitesses à deux instants proches d'un instant de référence fixe, l'un antérieur, l'autre postérieur, comme en sciences physiques en classe de première ? Dans ce cas, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_G}{\Delta t}$ représente la dérivée symétrique. Quel lien peut-on faire avec $\frac{dv_G}{dt}$, autre notation pour v'_G, la dérivée introduite en cours de mathématiques ? Ou Δv_G représente-t-il la différence entre les vitesses à un instant de référence fixe et un instant proche de celui-ci ? Cette dernière interprétation permettrait de retrouver la dérivée comme la limite du taux d'accroissement vue en mathématiques. Mais quel lien peut-on faire avec la vitesse instantanée du cours de sciences physiques de la classe de première ?

Ainsi, que ce soit pour l'aspect graphique ou l'aspect algébrique de la dérivée, le lien entre les notions étudiées en mathématiques et en sciences physiques n'est pas naturel, si l'on n'a pas comparé dérivée symétrique et dérivée au sens usuel. Est-il possible de donner du sens pour les élèves au travail fait dans les deux disciplines ? Le professeur de mathématiques pourrait y contribuer.

2. *La dérivée en cours de mathématiques*

a. *Introduction de la notion*

Il semble périlleux d'introduire la notion de dérivée par l'approche cinématique, même si le lien avec la vitesse devra être explicité, pour une meilleure compréhension du cours de sciences physiques.

On pourra donc introduire le nombre dérivé par le coefficient directeur de la tangente (elle-même position limite de sécante).

b. *Le lien avec le cours de sciences physiques de première*

Ensuite [6] on pourra faire constater de façon expérimentale (voir le paragraphe III3b) que le coefficient directeur des cordes d'une parabole (définies comme au paragraphe III1b) est le même que le coefficient directeur de la tangente, pour en déduire que la limite du rapport de la définition de la dérivée symétrique est le même que la limite du rapport de la définition de dérivée au sens usuel, et donc que dans ce cas particulier les deux notions coïncident. On pourra éventuellement le démontrer, si le niveau de la classe et le temps disponible le permettent… On aura ainsi justifié la méthode des cordes vue en sciences physiques pour déterminer le vecteur vitesse dans le cas d'une trajectoire parabolique. Une concertation entre le professeur de mathématiques et le professeur de sciences physiques de la classe sera utile pour déterminer le moment opportun pour aborder cet aspect, car cette méthode peut-être étudiée introduite en sciences physiques puis justifiée en mathématiques, ou expliquée en mathématiques puis utilisée en sciences physiques.

5 Signalons que cette notation figure aussi dans le programme de mathématiques de la classe de première S, sans plus de précision : *« On construira point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par : $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ en utilisant l'approximation $\Delta f \approx f'(a)\Delta t$. »*
Ce peut-être source de difficultés pour les élèves en terminale, car en mathématiques on choisira l'interprétation $f(a+h) - f(a)$ et en sciences physiques en terminale on utilisera la forme $f(a+h) - f(a-h)$ pour la méthode d'Euler.

6 ou avant : voir l'article de P. Michel dans Repères-IREM N°24.

c. *Le lien avec le cours de sciences physiques de terminale*

Il sera sans doute utile de voir l'efficacité de cette méthode dans d'autres cas (voir le paragraphe III3.a). Peut-être même sera-t-il possible dans certaines classes d'aller plus loin et d'aborder le fait qu'une fonction dérivable au sens usuel est dérivable au sens de la dérivée symétrique mais que la réciproque est fausse, ne serait-ce que par des interprétations graphiques.

Cela permettra de montrer que la vitesse instantanée est la dérivée de la loi horaire dans les cas où la loi horaire est dérivable au sens usuel, même avec la définition du cours de sciences physiques. Il en sera ainsi de même pour les autres notions abordées en classe de terminale, quel que soit le sens donné à la notation Δv_G .

d. *Pourquoi deux définitions pour la dérivée ?*

Il faudra enfin expliquer le choix des mathématiciens par un « rappel » historique (voir le paragraphe IV). La dérivée a été élaborée en particulier pour répondre au problème de recherche de tangente. La notion de dérivée symétrique est plus efficace dans les calculs approchés, mais elle peut exister même quand il n'y a pas de tangente (voir le cas de la fonction valeur absolue), ce qui ne convient pas pour le problème initial.

e. *Des notations différentes selon les disciplines*

Il restera le problème de la notation, qui se posera en classe de terminale (f' en mathématiques et $\frac{dx}{dt}$ en sciences physiques), que l'on n'a pas abordé, mais pour lequel plusieurs approches sont proposées dans la brochure *Des tangentes aux infiniment petits* de l'Irem de Poitiers.

RÉFÉRENCES

GASSER J.-L. *Réflexions inspirées par le sujet du BAC de physique série S 1996*. Repères – Irem n°34, janvier 1999, pp. 95-110. TOPIQUES éditions. Pont-à-Mousson, 1999.

GAUD D., GUICHARD J., SICRE J.-P., CHRÉTIEN C. *Des tangentes aux infiniment petits*. Irem de Poitiers, septembre 1998.

MICHEL P. *Tangente à une courbe et dérivation*. Repères – Irem n°24 juillet 1996, pp. 35-42. TOPIQUES éditions. Pont-à-Mousson, 1996.

TROUCHE L. *Variations sur la dérivation*. Repères – Irem n°34 janvier 1999, pp. 111-126. TOPIQUES éditions. Pont-à-Mousson, 1999.

Programme de mathématiques de la classe de première S, BOEN hors série n°7 du 31 août 2000.

Programme de sciences physiques de la classe de première S, BOEN hors série n°7 du 31 août 2000.

Programme de sciences physiques de la classe de terminale S, BOEN hors série n°4 volume 9 du 30 août 2001.

Document d'accompagnement, Mathématiques, Premières ES, L, S, CNDP, 2005, téléchargeable à l'adresse www.cndp.fr/archivage/valid/86906/86906-13718-17372.pdf.