« MONSIEUR, LES MATHS ÇA ME SERT A QUOI ? »

Problèmes de construction sur l'église Saint Pierre de Caen

Matthieu GAUD
IUFM de Caen

Lors de ma première année d'enseignement[1], j'ai eu en responsabilité une classe de seconde dont une très large majorité d'élèves suivaient l'option arts plastiques. Le choix de cette option préfigurait déjà en grande partie leur future orientation en série littéraire. Ceci fut précisé au cours d'une enquête distribuée au début de l'année, dans laquelle il ressortait que 80% soulignaient leur désir de choisir une voie littéraire.

La représentation des mathématiques était pour ces derniers figée par une vision trop scolaire de celles-ci qui apparaissaient dès lors vides de sens et dénuées d'intérêts.

Etait-il possible d'intéresser des élèves aux mathématiques alors qu'ils étaient motivés par les arts plastiques ?

Etait-il possible de montrer que les mathématiques aidaient les élèves à comprendre le monde dans lequel ils vivaient ?

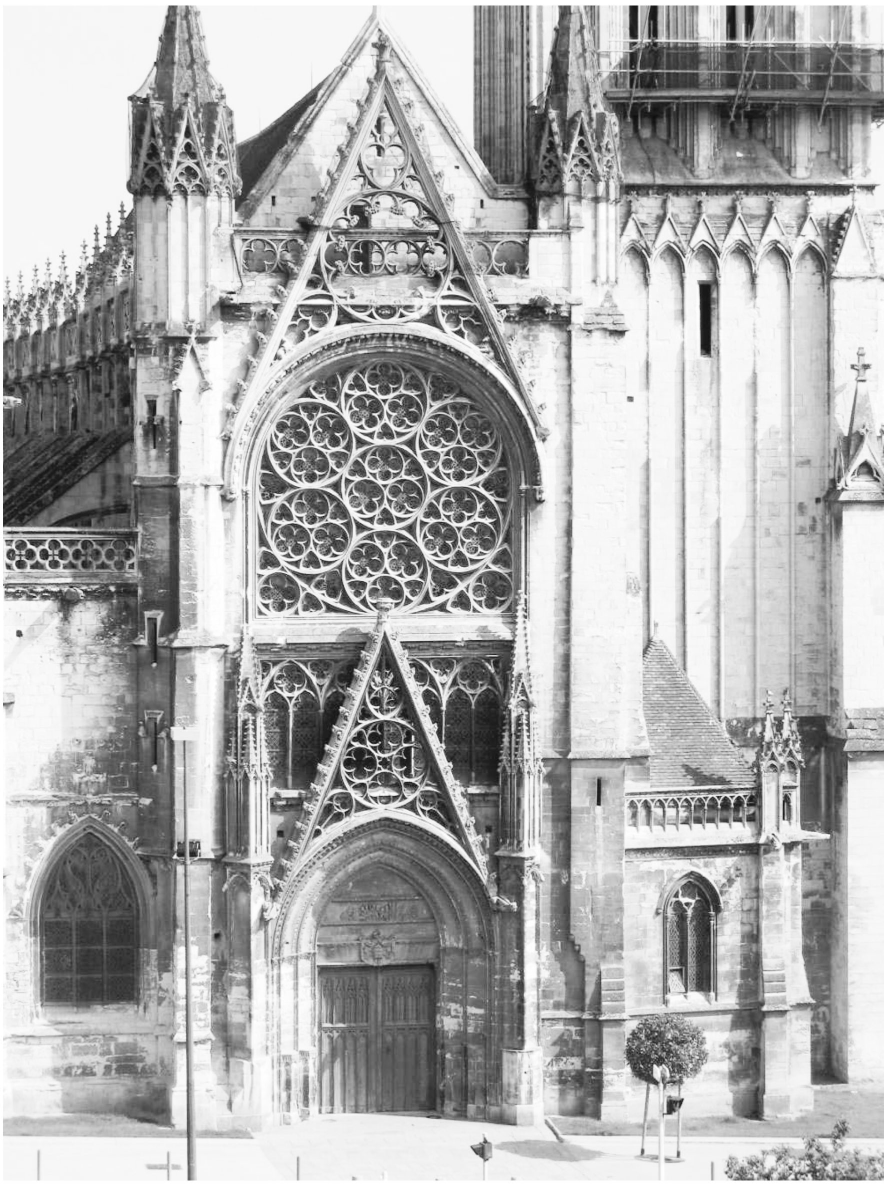
Etait-il possible de faire comprendre en quoi des connaissances mathématiques aidaient à rendre les citoyens responsables de leurs actes en toute connaissance de cause ?

Telles furent les questions que je me suis posées en début d'année.

N'ayant aucune expérience, je me suis efforcé de rechercher des situations « du monde » proches des préoccupations artistiques des élèves. Cela m'a conduit à travailler sur différents tableaux[2], sur les formats de papier[3] mais aussi sur l'architecture et en particulier sur un monument familier des

1 J'étais plc2 en 2006-2007 et j'enseignais au lycée Jules Dumont d'Urville, à Caen.
2 *L'Ecole d'Athènes* de Raphaël et *Les Ambassadeurs* de Hans Holbein le Jeune

3 J'ai proposé une activité mathématique récapitulant les différents formats de papier (le format international A et les formats français)



Façade de l'église Saint Pierre de Caen

élèves : l'église Saint Pierre de Caen. Mon espoir était de faire évoluer la vision étriquée des élèves vis-à-vis des mathématiques…

Repères historiques utiles pour la classe

Pour situer dans le temps cette église, il m'a semblé utile de rappeler aux élèves quelques éléments historiques [4] : l'Eglise Saint Pierre de Caen fut bâtie à partir du XIème siècle. Si les textes mentionnant l'Eglise Saint Pierre remontent au XIème siècle, on ne retrouve plus aujourd'hui de vestiges antérieurs au XIIIème siècle. L'échelonnement des travaux, qui se poursuivirent jusqu'au XVIème siècle ne détruit cependant pas l'unité d'ensemble. A l'extérieur, la façade (XIVème siècle) ornée d'une immense rose est d'une extrême légèreté, où les vitraux sont mêlés à des pierres taillées extrêmement finement. Le clocher gothique (XIVème), détruit, comme les voûtes pendant la guerre, a été reconstruit à l'identique. Les bas-côtés et les parties hautes de la nef (XVème siècle) de style flamboyant contrastent très nettement avec l'abside Renaissance. Celle-ci commencée vers 1518 et terminée sans doute un demi-siècle plus tard, est l'un des exemples les plus parfaits de la première Renaissance caennaise (comme l'Hôtel d'Escoville).

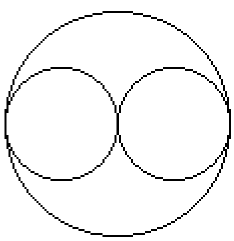
Le passage du XIème au XIIème siècle fut marqué par l'apparition d'une nouvelle archi-

4 Après coup, je pense qu'il aurait été bien que les élèves fassent une recherche documentaire et que ce travail se fasse en liaison avec ma collègue d'histoire-géographie !

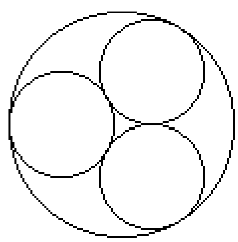
tecture : l'architecture gothique. Auparavant, l'architecture romane était constituée principalement de voûtes au profil elliptique. La voûte en anse de panier figure dans de nombreux ouvrages romans et sa représentation géométrique se faisait « aisément » à la règle et au compas. Son inconvénient vient du fait qu'elle est assez ramassée.

Les constructions géométriques de la rosace : point de vue mathématique

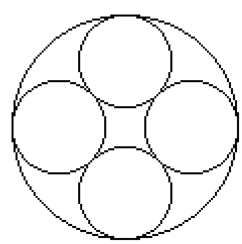
Dans la rosace de la façade apparaissent des constructions géométriques. On retrouve fréquemment ces figures géométriques ci dessous dans les églises gothiques :



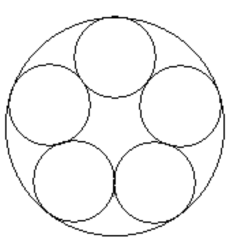
Deux cercles dans un cercle donné



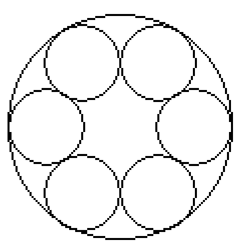
Trois cercles dans un cercle donné



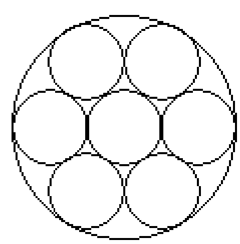
Quatre cercles dans un cercle donné



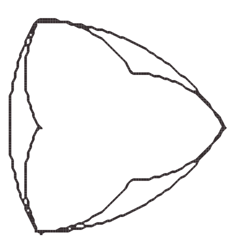
Cinq cercles dans un cercle donné



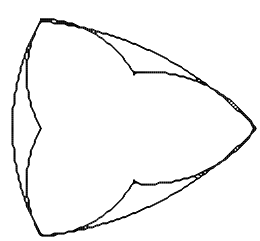
Six cercles dans un cercle donné



Sept cercles dans un cercle donné



Triangle équilatéral circulaire avec arcs internes

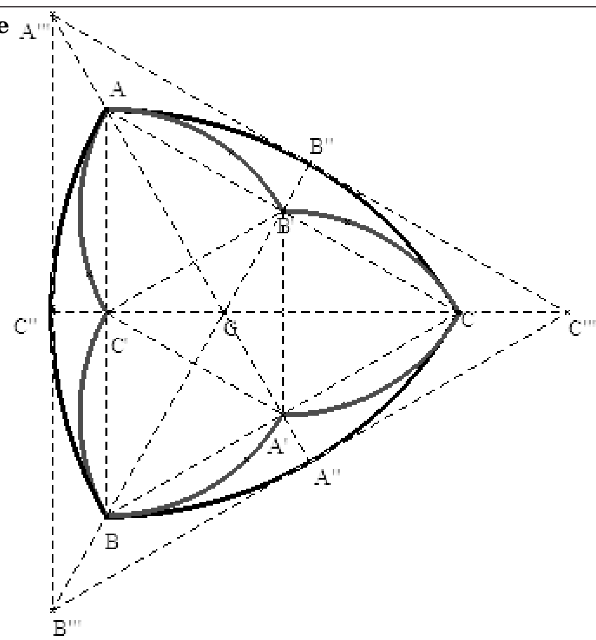


Triangle isocèle elliptique avec arcs internes

Ces constructions sont fondées uniquement sur l'usage d'outils géométriques rudimentaires, bien souvent la règle et le compas ou bien la corde ! Inscriptions et circonscriptions de cercles sont des problèmes qui remontent à l'antiquité grecque et sont liés mathématiquement aux constructions à la règle et au compas de polygones réguliers simples : triangles équilatéraux, carrés, pentagones, hexagones[5]. Constructions approchées et exactes à la règle et au compas peuvent être évoquées à propos de ces constructions mais seules certaines constructions exactes ont été abordées avec les élèves.

Les triangles équilatéraux circulaire et isocèle elliptique[6] sont peu connus, aussi voici des méthodes possibles de construction.

Le triangle équilatéral circulaire



Soit ABC un triangle équilatéral et A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB]. Soit G le barycentre de ABC. Soit $\overset{\frown}{CA}$ (resp. $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{BC}$) l'arc de centre B (resp. C et A) d'origine C (resp. A et B) et de fin A (resp. B et C). On appelle B" (resp. A" et C") le point d'intersection de (BB') avec l'arc $\overset{\frown}{CA}$ (resp. de (AA') et $\overset{\frown}{BC}$, et (CC') et $\overset{\frown}{AB}$). Soit h l'homothétie de centre G qui envoie B' sur B". L'image du triangle équilatéral ABC par h est le triangle équilatéral A'''B'''C''' dont les côtés sont parallèles à ceux de ABC et passent par A", B" et C".

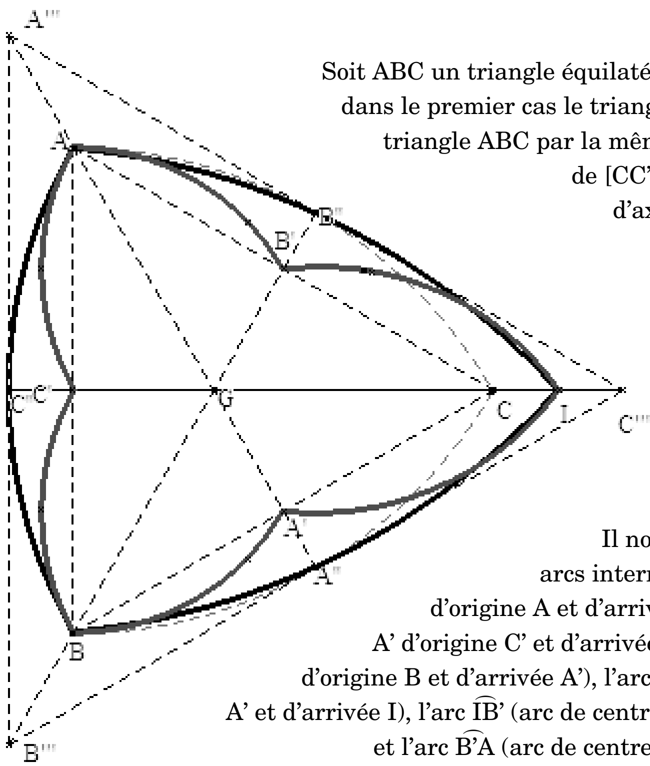
Il nous reste à tracer les différents arcs internes : l'arc $\overset{\frown}{AC'}$ (arc de centre B' d'origine A et d'arrivée C'), l'arc $\overset{\frown}{C'B}$ (arc de centre A' d'origine C' et d'arrivée B), l'arc $\overset{\frown}{BA'}$ (arc de centre C' d'origine B et d'arrivée A'), l'arc $\overset{\frown}{A'C}$ (arc de centre B" d'origine A' et d'arrivée C), l'arc $\overset{\frown}{CB'}$ (arc de centre A" d'origine C et d'arrivée B') et l'arc $\overset{\frown}{B'A}$ (arc de centre C' d'origine B' et d'arrivée A).

Nous pouvons remarquer qu'en appelant a la longueur du côté du triangle équilatéral ABC, nous pouvons calculer le rapport d'homothétie k qui sera égal à $2(\sqrt{3}-1)$. Ceci peut faire l'objet d'un travail de recherche d'un niveau première et on peut alors s'intéresser à la manière de construire à la règle et au compas $2(\sqrt{3}-1)$, ce qui peut être intéressant pour revisiter certaines connaissances du collège.

5 On trouve aussi des heptagones dans les églises !

6 Ceci reste une appellation personnelle.

Le triangle isocèle elliptique



Soit ABC un triangle équilatéral. Nous construisons comme dans le premier cas le triangle A'''B'''C''' image du premier triangle ABC par la même homothétie. Soit I le milieu de [CC''']. Soit f l'affinité orthogonale d'axe (AB), de direction GC et qui transforme C en I..

Alors f(ABC) = ABI , f(AC) = AI et f(BC) = BI . En conservant l'arc AB , nous obtenons donc le triangle voulu.

Il nous reste à tracer les différents arcs internes : l'arc $\widehat{AC'}$ (arc de centre B' d'origine A et d'arrivée C'), l'arc $\widehat{C'B}$ (arc de centre A' d'origine C' et d'arrivée B), l'arc $\widehat{BA'}$ (arc de centre C' d'origine B et d'arrivée A'), l'arc $\widehat{A'I}$ (arc de centre B'' d'origine A' et d'arrivée I), l'arc $\widehat{IB'}$ (arc de centre A'' d'origine I et d'arrivée B') et l'arc $\widehat{B'A}$ (arc de centre C' d'origine B' et d'arrivée A).

Toutes ces constructions n'ont pas été étudiées en classe mais peuvent être source de nombreux exercices. Mes intentions pédagogiques pour ces deux travaux de recherche étaient la construction de figures géométriques en utilisant l'algèbre. L'objectif était que les élèves reproduisent à la règle et au compas des figures présentes dans le monde réel et donc trouvent une utilité à l'utilisation du calcul littéral.

Dans les deux expérimentations, le travail à effectuer était de résoudre un problème de géométrie donc d'aboutir à une méthode de construction exacte. Cependant, afin de ne pas alourdir l'exercice, j'ai suggéré aux élèves d'utiliser la calculatrice pour avoir des valeurs approchées mais j'ai souligné le fait que ces valeurs approchées ne nuisaient pas à l'obtention d'une méthode de construction correcte.

Contrairement à ce que la consigne indiquait, les bâtisseurs du Moyen Age ne procédaient pas comme cela. Dans le cas présent, la grande ouverture était faite en premier et les remplages (c'est-à-dire le décor non structurant) ensuite. Les remplages étaient d'abord dessinés sur papier ou sur parchemin à partir de gabarits déjà existants et ensuite au sol.

Deux exemples de problèmes de construction traités avec les élèves

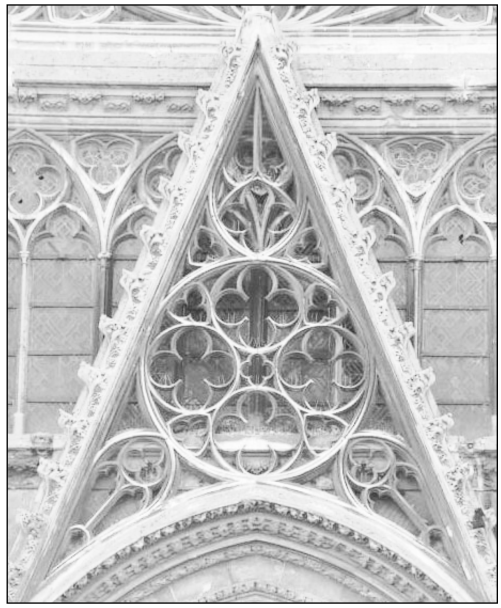
Nous pouvons distinguer sur la façade de l'église Saint Pierre deux parties distinctes : la première située juste au dessus du porche et la seconde au dessus de la précédente présentant une figure géométrique plus élaborée. Elles constitueront les objets des deux travaux faits en classe, travaux dont le déroulement en classe avec les consignes, les documents distribués ainsi que des copies d'élèves sont présents en annexes. Avant de proposer ces deux travaux aux élèves, nous avions travaillé sur le thème d'étude relatif aux nombres constructibles à la règle et au compas (présente dans le livre de seconde de Bréal). Cette activité me permettait d'approfondir a posteriori en activité accompagnée les deux travaux ci-dessous et de faire un lien entre les relations algébriques et les constructions géométriques.

1. — *La géométrie du triangle à travers un premier travail sur l'église Saint Pierre*

Texte proposé aux élèves :

On se propose de reproduire une partie de la figure située sur la façade de l'église Saint Pierre à Caen, à savoir les 4 cercles inscrits dans un cercle. Comment peut-on faire sans tâtonner?

La question était simple et courte, compréhensible par tous les élèves : à partir d'un cercle C de rayon R, construire dans ce cercle, quatre cercles de rayons identiques r tels que



ces cercles soient tangents intérieurement au grand cercle et tangents extérieurement à deux autres.

Analyse de la situation :

La situation fait apparaître que les connaissances mises en jeu au niveau de l'analyse sont nombreuses et parfois oubliées par les élèves :

— les cercles tangents,

— le théorème de Pythagore

— le calcul littéral avec une difficulté supplémentaire consistant à trouver une quantité en fonction d'une autre.

Trouver $r = R(\sqrt{2} - 1)$, où R désigne le rayon du grand cercle et r le rayon des petits cercles est une tâche difficile pour les élèves et dont j'avais largement sous-estimé la difficulté. La construction effective pouvait se faire en partant du premier cercle par rotation de centre O et d'angle 90° encore fallait-il justifier que par cette rotation, les cercles étaient tangents.

Mes objectifs étaient triples :

— mettre les élèves en situation de recherche,

— confronter les élèves à une situation de la vie où l'usage du calcul littéral pouvait prendre son sens.

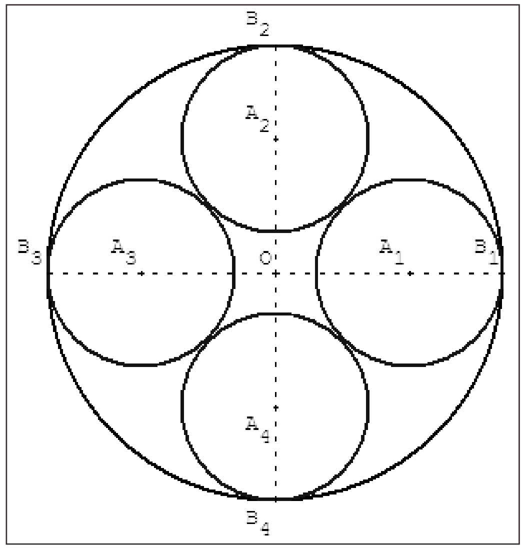
— essayer de comprendre comment les élèves recherchaient. Pour ce faire, je leur ai demandé d'écrire comment ils procédaient (narration de recherche)

Ce travail a été fait en tout début d'année scolaire. J'ai mené le début de l'analyse avec eux en leur expliquant que la connaissance des rayons des petits cercles devait permettre la construction. Ce faisant, j'orientais la recherche vers l'utilisation de l'algèbre volontairement ayant remarqué leurs manques à ce niveau tant d'un point de vue technique que du point de vue motivation à le pratiquer. Je leur avais aussi distribué quelques informations utiles sur les cercles tangents.

La partie analyse c'est-à-dire le calcul littéral a été difficile pour les élèves, et il m'a semblé peu opportun d'imposer un second calcul afin de vérifier que la construction fonctionnait, d'autant plus qu'il fallait construire dans le cas général $r = R(\sqrt{2} - 1)$!

Je me suis contenté de dire que la construction avec les rayons ainsi calculés était exacte et qu'il pouvait la vérifier la feuille que je leur avais donnée.

La première réaction des élèves ne fut pas entièrement positive. Ce problème rompait avec leurs habitudes scolaires et étant sortie du

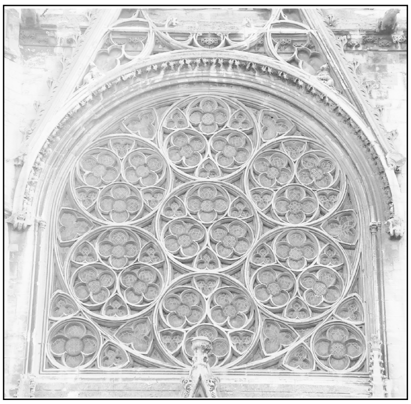


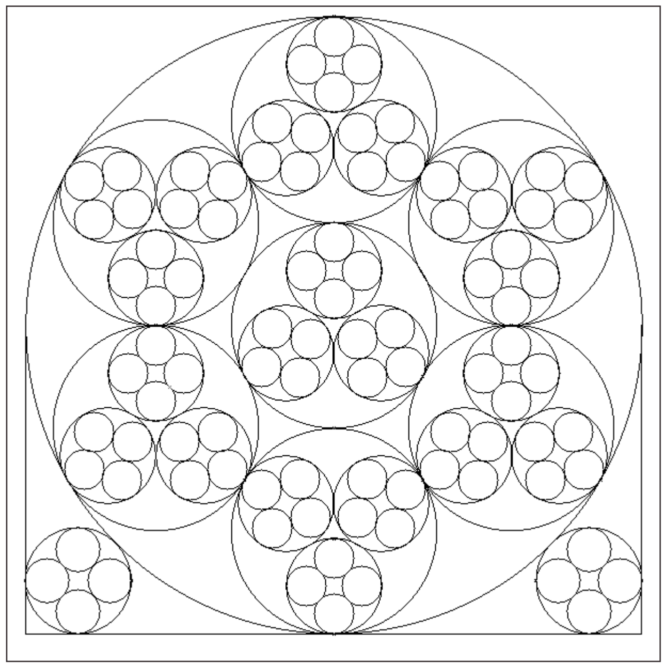
« monde » la situation proposée ne pouvait être à leurs yeux que très complexe. Si certains travaux m'ont agréablement surpris (certains ayant mobilisé leur entourage), et ont rendu un travail quasi parfait, d'autres ne savaient pas mettre en œuvre une démarche de recherche souhaitant qu'on leur donne tout de suite l'outil mathématique à utiliser. Cela pouvait s'expliquer par le manque d'habitude à pratiquer ce type de tâche.

2. — *La géométrie des transformations à travers un second travail sur l'église Saint Pierre*

Texte proposé aux élèves : *A la manière des bâtisseurs du Moyen-âge, reproduire à la règle et au compas la figure géométrique située sur la façade de l'église Saint Pierre à Caen. (Autrement dit, on souhaite construire à la règle et au compas, la figure ci-contre).*

Dans cette expérimentation, je poussais la réflexion plus loin car j'envisageais la par-



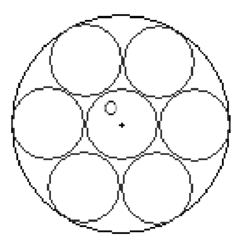


tie synthèse du problème de construction. A partir d'une feuille où les deux parties du problème étaient guidées, je leur ai demandé de faire par groupes la partie 1, sachant que nous ferions ensemble la réciproque du problème dans la partie 2. Nous avons effectué cette activité en fin de deuxième trimestre, après avoir étudié le chapitre sur les transformations fin janvier. En effet, la partie 2 nécessitait l'application d'une rotation avec les propriétés de conservation des contacts. L'objectif de cette séance était de réinvestir le résultat du premier travail, d'envisager la réciproque du problème de construction et surtout de poursuivre le travail sur les constructions à la règle et au compas.

Analyse de la situation

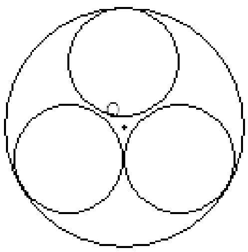
La partie 1 est divisée en quatre étapes. Les trois premières sont indépendantes et ont pour but d'établir des relations entre les rayons des petits cercles, alors que la quatrième étape a pour but d'établir les relations entre les rayons des petits cercles et celui du grand cercle initial.

- Lors de la première étape, un grand cercle de rayon r est donné.



On inscrit dans ce grand cercle sept cercles de même rayon qui sont chacun tangents extérieurement à trois autres cercles et intérieurement au grand cercle. Il s'agit de déterminer la relation entre r_1 et r, r_1 étant le rayon du petit cercle. Cette question ne met en jeu que l'alignement des centres des cercles tangents.

• Lors de la deuxième étape, un autre grand cercle de rayon r est donné.



Nous voulons inscrire dans ce cercle trois petits cercles C_1 , C_2 et C_3 de même rayon r_2 , tels que ces cercles soient tangents intérieurement au grand cercle et que chaque petit cercle soit tangent extérieurement aux deux autres. Cette étape est plus délicate que la précédente, c'est pourquoi une démarche est proposée dans laquelle on prend un triangle équilatéral MNP (les points sont les centres des trois cercles). Cette situation fait apparaître les mêmes connaissances mises en jeu dans le premier travail, à savoir :

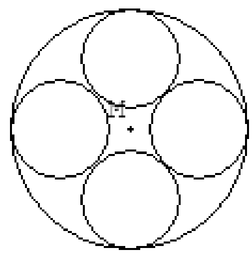
— les cercles tangents extérieurement et intérieurement

— la longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral connaissant la longueur des côtés et donc l'utilisation du théorème de Pythagore

— le calcul littéral avec le calcul d'une quantité en fonction d'une autre

— la simplification d'un quotient d'irrationnels par l'utilisation de la quantité conjuguée.

• Lors de la troisième étape, un autre grand cercle de rayon r est donné. Nous réinvestissons le résultat du premier travail sur l'église Saint Pierre et de ce travail, nous connaissons la relation entre r et le rayon r_3 des quatre cercles C_1 , C_2 , C_3 et C_4 tels que ces cercles sont tangents intérieurement au grand cercle et tangents à deux autres. Il s'agissait ici uniquement d'appliquer la quantité conjuguée pour simplifier une fraction d'irrationnels.



• La quatrième étape consiste à considérer la figure entière (représentée précédemment) et d'établir les relations entre chaque rayon des différents cercles et celui du grand cercle initial. L'objectif final de cette activité étant quand même de reproduire la figure géométrique en utilisant uniquement la règle et le compas, l'objectif de cette quatrième étape était donc de simplifier au maximum les écritures littérales, savoir faire dont j'avais une nouvelle fois sous estimé la difficulté.

La deuxième partie consiste à démontrer que les relations entre les rayons sont suffisantes. La synthèse dans le cas des quatre cercles et des trois cercles nécessite des notions hors programme — dans le cas des trois cercles, on voit apparaître l'utilisation de la formule d'Al Kashi —, je la limite au cas des sept cercles qui ne nécessite que l'utilisation des transformations (translations et rotations), notions qui étaient à la portée des élèves car vues peu de temps auparavant et la construction de cercles tangents extérieurement et intérieurement.

En général, les groupes m'ont rendu plus que ce que je leur avais demandé. En effet, non seulement, les relations entre les rayons avaient été établies mais une figure de l'ensemble était faite.

La construction des deux cercles extérieurs au plus grand cercle était facultative. Leur construction nécessite d'abord la construction des bissectrices intérieures au rectangle, puis la construction de perpendiculaires à ces bissectrices passant par les points d'intersection des bissectrices avec le cercle. Ensuite, il suffit de construire le cercle inscrit à un triangle. Deux groupes ont réussi ces constructions, ce qui m'a agréablement surpris.

D'où une certaine satisfaction…

Conclusion

Ces travaux m'ont permis de voir la difficulté d'emploi de l'algèbre dans des situations où elle est très utile. L'utilité des synthèses des constructions n'a pas vraiment été perçue, ce qui me semble, avec le recul, normal car le saut est important avec le collège.

Il est difficile d'évaluer la portée de ce travail avec les élèves. Tout au plus je peux assurer que les mathématiques sont un peu sorties du carcan où les élèves les avaient enfermées. J'avais espoir de les motiver à une étude plus systématique du calcul littéral qui aurait permis d'améliorer leur performances techniques et ainsi de résoudre d'autres situations de ce type. Mais je me suis vite rendu compte que ces travaux étaient trop isolés dans l'année pour déclencher une réelle dynamique en ce sens.

J'avais bien envisagé des prolongements sur les sangaku (voir annexe) mais je n'ai pas eu le temps de les pratiquer. Reste pour moi une ébauche de travail à poursuivre dans mes futures années d'enseignement.

Je dois aussi rendre justice à mes élèves du bienfait qu'ils m'ont apporté : je regarde les églises, les tableaux d'un autre œil guettant au hasard de mes promenades des situations d'enseignements (voir annexe)…

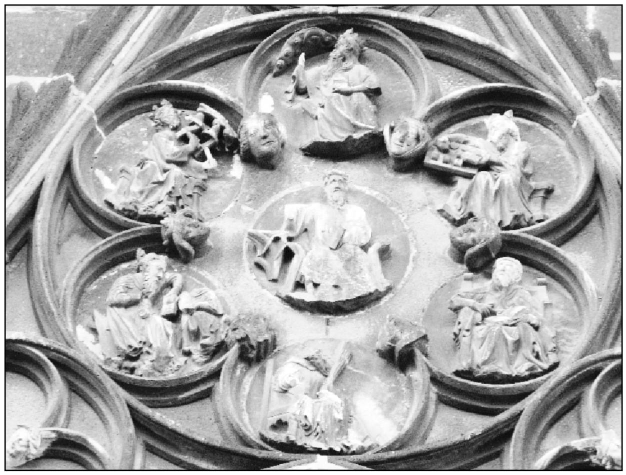
Bibliographie

— Rothman, Tony, Fukagawa, Hidetoshi. Géométrie et religion au Japon. *Pour la science*, juillet 1998, n°249, 114 pages.

— Mathématiques Bréal 2de – édition 2004, par une équipe de l'IREM de Poitiers, Edition Bréal, 2004.

ANNEXE 1

Promenades clermontoises lors de mes premières journées APMEP



Nous pouvons remarquer que la construction nécessitant six cercles de même rayon inscrits dans un grand cercle apparaît dans de nombreuses cathédrales. L'une des plus belles illustrations figure sur la façade nord de La cathédrale Notre-Dame de l'Assomption (XIIIème s) de Clermont-Ferrand où sont représentées sept figurines décrivant les sept disciplines enseignées dans les universités de l'époque :

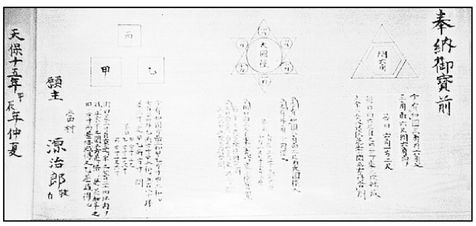
1. en bas, Priscien pour la *grammaire* qui enseigne à un élève un bâton à la main
2. à gauche, Cicéron, isolé sur une chaire monumentale pour la *rhétorique*
3. à droite, Aristote pour la *dialectique* appuyant d'un geste péremptoire son argumentation
4. au centre, Euclide ou la *géométrie*
5. au sommet, Ptolémée ou *l'astronomie* observant quelques nuées
6. Pythagore pour la *musique* jouant du carillon
7. Boèce pour l'*arithmétique* qui calcule sur un objet rond.

ANNEXE 2

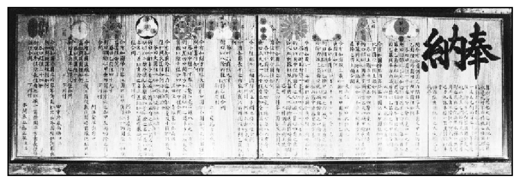
Les sangaku

De nombreux temples japonais sont décorés de tablettes votives appelées sangaku. Les sangaku sont des tablettes en bois gravées de problèmes mathématiques, accrochées en offrande dans les temples japonais du XVIIème au XIXème siècle. Beaucoup d'entre elles représentent des figures géométriques de construction parfois complexe accompagnées de calculs métriques. La plupart des tablettes ne fournissent aucune indication quant aux méthodes utilisées par leur construction. La période d'isolement du Japon (1635-1854) fut florissante pour les arts et les mathématiques. C'est pendant cette période de prospérité que se développe la pratique des sangaku, véritables objets d'art.

Nous renverrons le lecteur au livret pédagogique du manuel Seconde de l'édition Bréal ou l'article de T. Rothman et H. Fukagawa paru dans la revue *Pour la science* pour plus d'information sur l'origine et l'histoire des sangaku. Les figures géométriques que l'on trouve sur les édifices religieux européens sont des figures fondées sur l'utilisation de la règle non graduée et du compas, donc des droites et des cercles, tandis que les figures géométriques japonaises sont avant tout fondées sur le cercle et l'ellipse. Néanmoins, nous pouvons voir des similitudes entre les figures géométriques européennes et celles japonaises. Voici quelques exemples :



Sangaku trouvé à Nara



Sangaku trouvé à Yamagata

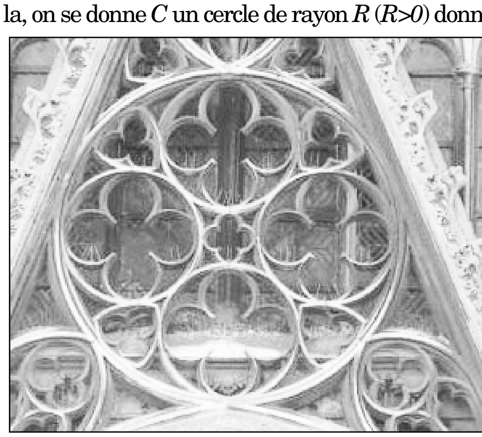
ANNEXE 3

La géométrie du triangle à travers un premier travail sur la façade de l'église Saint Pierre de Caen

Prénom : Nom :	Appréciation :

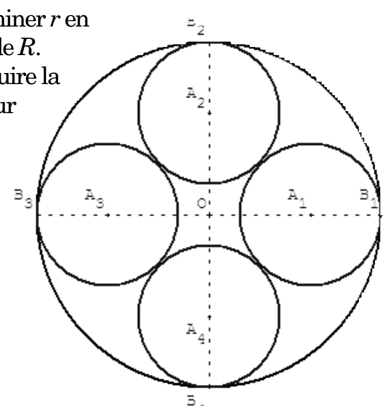
Introduction à la géométrie :
Travail de recherche à rendre pour lundi 25 septembre 2006

On se propose de reproduire la figure géométrique située sur la façade de l'église Saint Pierre à Caen, à savoir les 4 cercles inscrits dans un cercle. Pour cela, on se donne C un cercle de rayon R ($R>0$) donné.

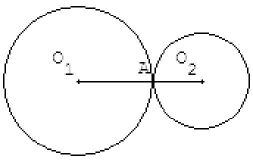


Construire dans ce cercle, 4 cercles de rayons identiques r ($r>0$), tels que ces cercles soient tangents intérieurement au grand cercle et tangents à deux autres.

1. Déterminer r en fonction de R.
2. Construire la figure pour $R = 4cm$.

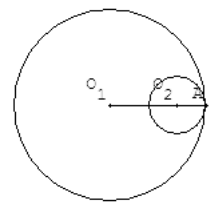


Rappels : *Cercles tangents extérieurement :*



Rappelons que deux cercles de centres O_1 et O_2 , de rayons respectifs r_1 et r_2 sont dits tangents *extérieurement* si et seulement si $O_1O_2 = r_1 + r_2$.
Dans ce cas, les deux cercles ont un unique point commun (noté ici A) et $A \in [O_1O_2]$.

Cercles tangents intérieurement :



Rappelons que deux cercles de centres O_1 et O_2 , de rayons respectifs r_1 et r_2 sont dits tangents *intérieurement* si et seulement si $O_1O_2 = r_1 - r_2$.
Dans ce cas, les deux cercles ont un unique point commun (noté ici A) et $O_2 \in [O_1A]$.

Recherche

ANNEXE 4

Extraits de travaux d'élèves

Pour construire la figure géométrique, nous avons tracé un cercle de rayon R et nous avons tracé ses deux diamètres qui sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Nous avons nommés les extrémités des diamètres B1, B2, B3 et B4. Ces points reliés forment un carré, inscrit dans le cercle.

(1,5) La distance OA1 est R-r. Suite à la figure déterminée précédemment, je conclus que OA1 = OA2 = OA3 = OA4. Ce qui nous amène à conclure, avec la propriété des diagonales d'un carré, que A1 A2 A3 et A4 forment un carré. Pour connaître la longueur d'un côté de ce carré, j'applique la règle des cercles tangents intérieurement. Donc A1A2 = 2r.

Le triangle A1OA2 est rectangle donc j'utilise le théorème de Pythagore pour calculer OA en fonction de r.

$OA_1^2 + OA_2^2 = A_1A_2^2$

Je remplace OA1 et OA2 par OA car OA1 = OA2 = OA et A1A2 par 2r.

$2OA^2 = (2r)^2$
$2OA^2 = 4r^2$
$OA^2 = 2r^2$
$OA = r\sqrt{2}$

TBien

Il faut que je détermine maintenant r en fonction de R.

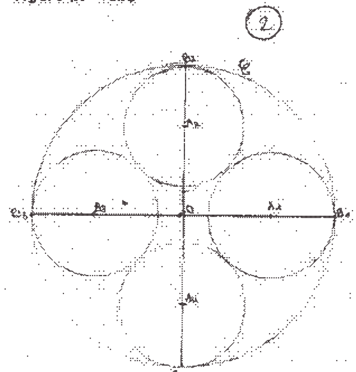
$OB = r + OA$
$OB = R \quad OA = r\sqrt{2}$
$R = r + r\sqrt{2}$
$R = r(1+\sqrt{2})$
$\boxed{r = \dfrac{R}{1+\sqrt{2}}}$

TBien

(2)

Figure (R=4cm)

(2)



(1,5)

Etapes de construction de la figure

Je trace le cercle C de centre O et de rayon R, qui a pour valeur 4 cm. Dans ce cercle, je trace deux diamètres perpendiculaires sur lesquels je note les centres de quatres cercles de rayon r, tangents intérieurement à C.

$r = \dfrac{4}{1+\sqrt{2}}$

$r \approx 1,66$ cm (0,5)

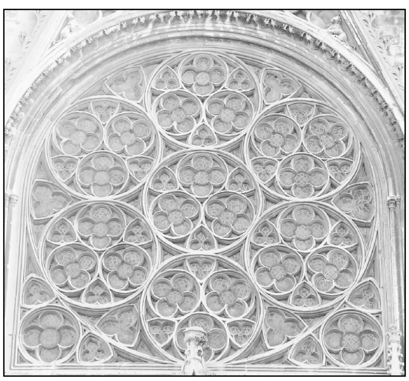
ANNEXE 5

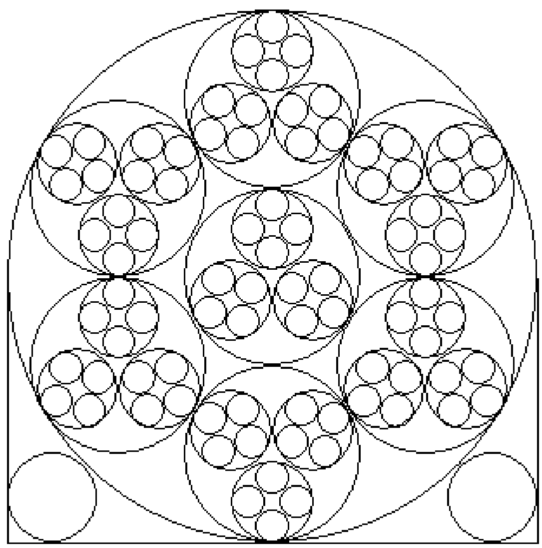
La géométrie des transformations à travers un second travail sur la façade de l'église Saint Pierre de Caen

Prénom/Nom : Prénom/Nom : Prénom/Nom : (Prénom/Nom :)	Appréciation :

Travail de recherche : problème de construction.

A la manière des bâtisseurs du Moyen-Age, reproduire à la règle et au compas la figure géométrique située sur la façade de l'église Saint Pierre à Caen. Construire la figure suivante :



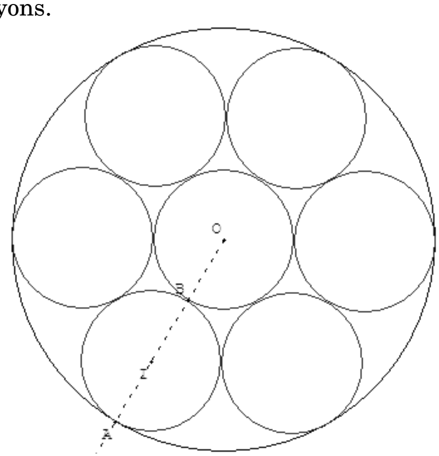


Problème

Partie 1 : détermination des relations entre les rayons.

A. *Sept cercles inscrits dans un grand cercle*

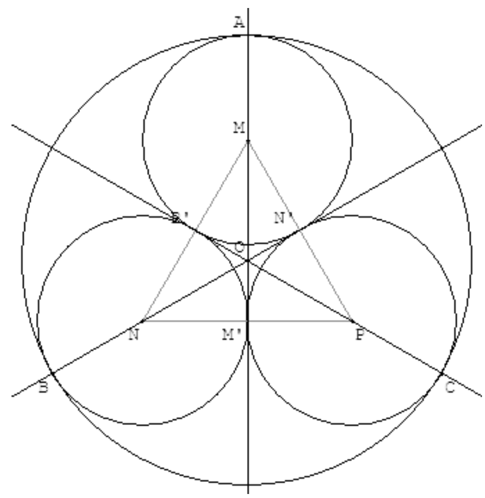
Nous supposons que la figure est construite. Soit Γ un cercle de centre O et de rayon r. Nous voulons inscrire dans ce grand cercle 7 cercles de même rayon qui soient chacun tangents extérieurement à 3 autres cercles et intérieurement au grand cercle. Soit r_1 le rayon de chaque petit cercle. Déterminer la relation entre r et r_1 .



B. *Trois cercles inscrits dans un grand cercle*

Nous supposons que la figure est construite. Soit Γ un cercle de centre O et de rayon r.

On souhaite inscrire dans ce cercle trois cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ de même rayon r_2, tels que ces cercles soient tangents intérieurement au cercle $\mathscr{C}$ et que chaque cercle soit tangent extérieurement aux deux autres (voir figure ci-contre). On note O le centre du cercle Γ. M, N et P désignent respectivement les centres des trois cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.



Soient A, B et C les trois points de tangence entre Γ et les trois cercles.
On admettra que MNP est un triangle équilatéral de côté $2r_2$.

a. Déterminer MM' en fonction de r_2.

b. En déduire la longueur OM.

c. Montrer que $r_2 = \dfrac{r}{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+1} = (2\sqrt{3} - 3)r$.

d. Déterminer les éléments caractéristiques d'une transformation transformant le cercle de centre M en le cercle de centre N. On note $\mathscr{R}_1$ cette transformation.

C. *Quatre cercles inscrits dans un grand cercle*

Nous supposons que la figure est construite. Soit Γ un cercle de centre O et de rayon r.
Du premier travail de recherche, nous savons qu'étant donné un cercle Γ de rayon r, il est possible de construire 4 cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ inscrits de même rayon r_3 ($r_3 > 0$), tels que ces cercles soient tangents intérieurement au grand cercle et tangents à deux autres. De plus, nous avons : $r_3 = \dfrac{r}{1+\sqrt{2}}$. Montrer que $r_3 = (\sqrt{2}-1)r$.

D. *Quatre cercles de même rayon, inscrits dans trois cercles de même rayon, inscrits dans sept cercles de même rayon, inscrits dans un grand cercle*

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon r. Soient 3 réels r_1, r_2 et r_3 tels que $r_1 > r_2 > r_3 > 0$.
A l'aide des parties A, B et C,

1. Déterminer la relation entre r_1 et r .
2. Déterminer la relation entre r_2 et r .
3. Déterminer la relation entre r_3 et r .

Partie 2 : les relations entre les rayons sont-elles suffisantes ?

Dans cette partie, nous voulons montrer que :

si nous avons les relations entre les rayons établies dans la partie 1,

alors les différents cercles sont tangents intérieurement au grand et tangents extérieurement.

Nous nous limiterons ici au cas des sept cercles et nous admettrons cette réciproque dans le cas des quatre cercles et dans le cas des trois cercles.

Soit O un point du plan, un réel r et soit Γ le cercle de centre O et de rayon r . On suppose que $r_1 = r/3$. Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon r_1 . Soit B un point du cercle $\mathscr{C}_1$. La demi droite [OB) coupe le cercle Γ en A. Soit I le milieu de [AB].

1. Construire une figure en prenant $r = 9$ cm.
2. Déterminer la relation entre AI et OB.
3. On note $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre I passant par A. Justifier que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangents extérieurement en B et que $\mathscr{C}_2$ et Γ sont tangents intérieurement en A.
4. Construction du cercle $\mathscr{C}_3$.
   a. On note (δ) la droite tangente à $\mathscr{C}_2$ passant par O. Soit D le point de tangence.

   Déterminer l'angle $\widehat{\mathrm{IOD}}$.

   b. Construire le point E tel que OE = OI et $\widehat{\mathrm{IOE}} = 60°$. En déduire la nature du triangle IOE.

   c. En déduire la transformation t ainsi que ses éléments caractéristiques qui trans forme I en E.

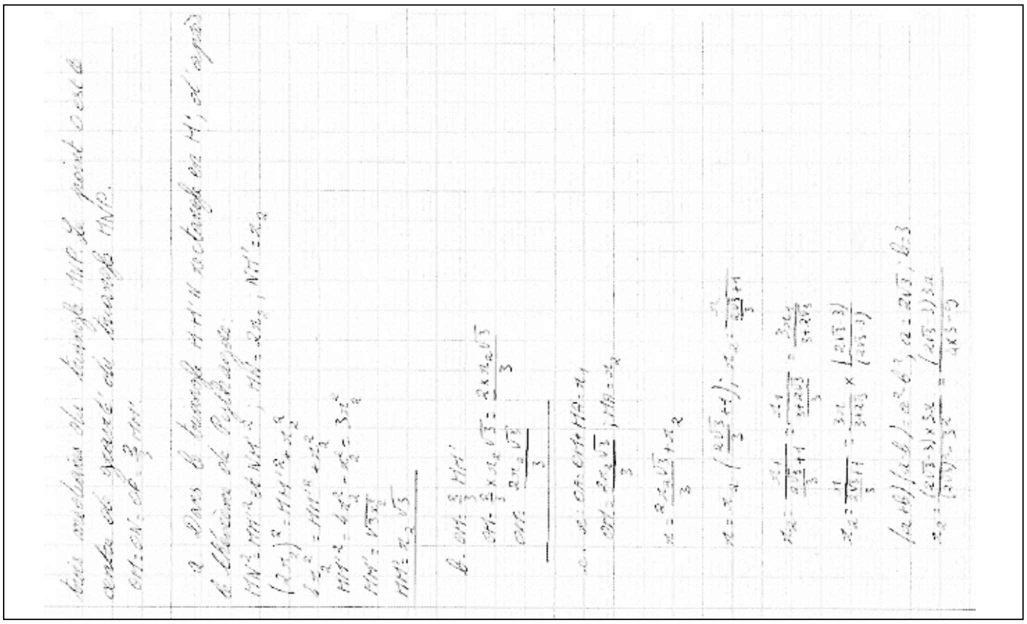
   d. Soit $\mathscr{C}_3$ le cercle de centre t(I) et de rayon r_1 . Montrer que :
      i. $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangents extérieurement en D ;
      ii. $\mathscr{C}_2$ et Γ sont tangents intérieurement en t(A) ;
      iii. $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_1$ sont tangents extérieurement en t(B).
5. En reprenant le raisonnement de la question précédente, construire les cercles $\mathscr{C}_4$, $\mathscr{C}_5$, $\mathscr{C}_6$ et $\mathscr{C}_7$ vérifiant :
      i. $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_5$ et $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_6$ et $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_7$ et $\mathscr{C}_1$ sont tangents extérieurement ;
      ii. $\mathscr{C}_4$ et Γ , $\mathscr{C}_5$ et Γ , $\mathscr{C}_6$ et Γ , $\mathscr{C}_7$ et Γ sont tangents intérieurement ;
      iii. $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_5$, $\mathscr{C}_5$ et $\mathscr{C}_6$, $\mathscr{C}_6$ et $\mathscr{C}_7$, $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_3$ sont tangents extérieurement.

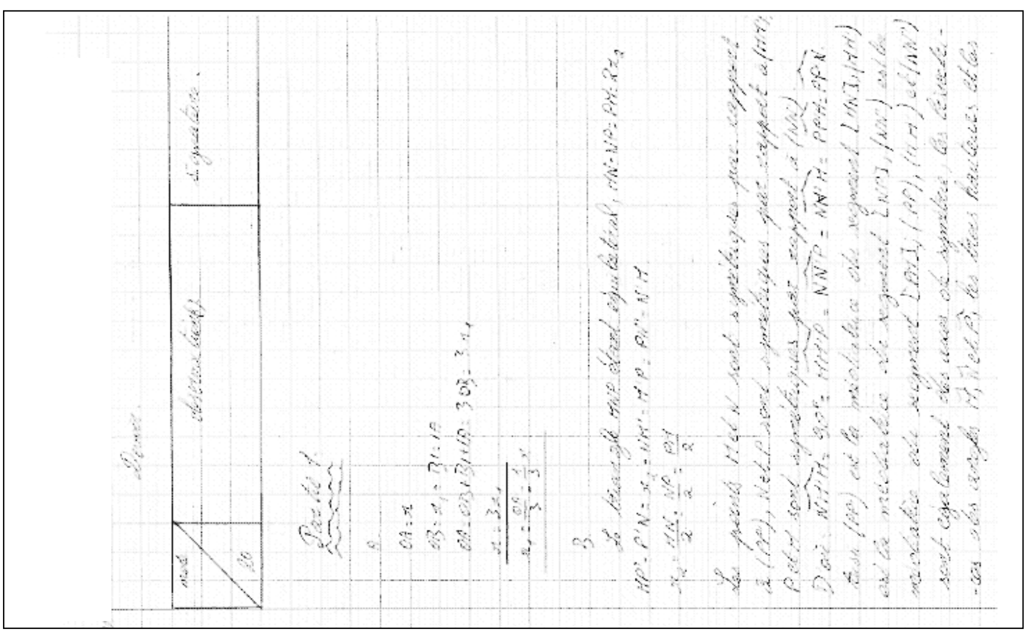
   Montrer que $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_7$ sont tangents extérieurement.
6. Conclure.

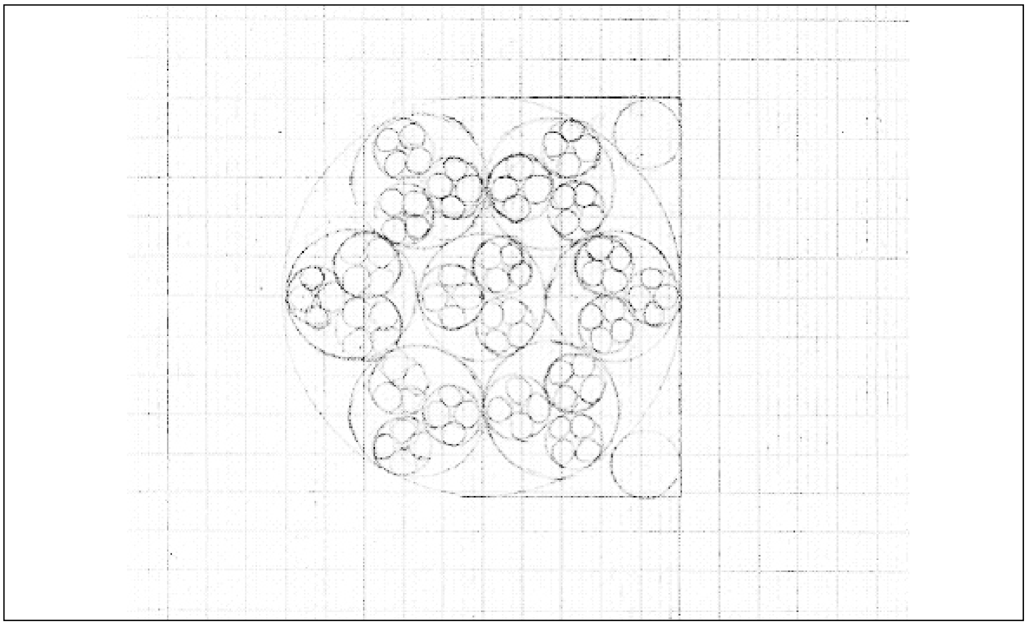
Partie 3 : construction. Construire la figure (présentée en page 4) en prenant $r = 9$ cm.

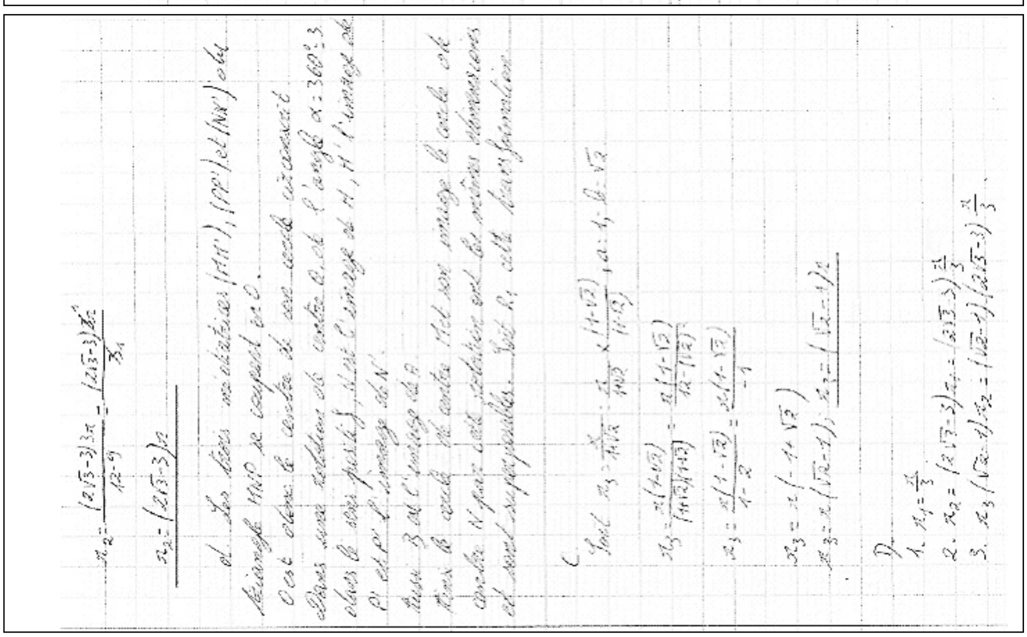
ANNEXE 6

Extraits de travaux d'élèves









$x_2 = \frac{(2\sqrt{3}-3)3x}{12-9} = \frac{(2\sqrt{3}-3)\cancel{3}x}{\cancel{3}_1}$

$\underline{x_2 = (2\sqrt{3}-3)x}$

d. Les trois médiatrices (MM'), (PP') et (NN') du triangle MNP se coupent en O.
O est donc le centre de son cercle circonscrit.
Dans une rotation de centre O, et l'angle $\alpha = 360° : 3$ dans le sens positif, N est l'image de M, M' l'image de P' et P' l'image de N'.
Aussi B est l'image de A.
Donc le cercle de centre M et son image le cercle de centre N par cette rotation ont les mêmes dimensions et sont superposables. Soit R_1 cette transformation.

C.
Soit $x_3 = \frac{x}{1+\sqrt{2}} = \frac{x}{1+\sqrt{2}} \times \frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})}$; $a = 1$; $b = \sqrt{2}$

$x_3 = \frac{x(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{x(1-\sqrt{2})}{1^2-(\sqrt{2})^2}$

$x_3 = \frac{x(1-\sqrt{2})}{1-2} = \frac{x(1-\sqrt{2})}{-1}$

$x_3 = x(-1+\sqrt{2})$
$x_3 = x(\sqrt{2}-1)$; $\underline{x_3 = (\sqrt{2}-1)x}$

D.
1. $x_1 = \frac{x}{3}$
2. $x_2 = (2\sqrt{3}-3)x_1 = (2\sqrt{3}-3)\frac{x}{3}$
3. $x_3 = (\sqrt{2}-1)x_2 = (\sqrt{2}-1)(2\sqrt{3}-3)\frac{x}{3}$.