UN GRAND CUBE DANS UN PETIT

Jean LEFORT
Irem de Strasbourg

Aussi curieux que cela puisse paraître, il est possible de creuser un « tunnel » dans un cube pour y faire passer un cube plus grand, certes plus grand de peu, mais néanmoins plus grand. En effet nous allons voir qu'il est possible de faire passer un cube d'arête $\sqrt{6}-\sqrt{2}\approx 1{,}035276$ à travers un cube d'arête 1.

Nous allons essayer de faire un « tunnel » dans un cube d'arête 1 de façon à pouvoir y faire passer un autre cube d'arête 1. Par « tunnel » nous entendons que ce qui reste du cube après percement est non seulement en un seul morceau mais est un anneau. En langage savant nous dirions qu'il est isotope à un tore. Si cela est possible, c'est qu'il reste de la matière dans le cube percé et que l'on peut ainsi agrandir très légèrement le trou pour faire passer un cube d'arête légèrement plus grande que 1.

La première idée qui vient à l'esprit est de présenter l'un des cubes de biais. Par exemple grande diagonale debout. L'autre cube étant dans la position standard.

Vu de dessus le cube, appelons-le A, dont la grande diagonale est verticale, apparaît comme un hexagone de côté $\sqrt{6}/3$. Cet hexagone est évidemment inscrit dans un cercle de même rayon, donc la distance entre deux sommets diamétralement opposés est de $2\sqrt{6}/3$. Par ailleurs comme les diagonales des faces sont vues en vraie grandeur, la distance entre deux côtés opposés (donc parallèles) de l'hexagone vaut $\sqrt{2}$.

Il est donc possible de placer à plat et en travers un cube B dont la distance entre deux arêtes parallèles est justement $\sqrt{2}$ mais ce faisant, nous ne répondons pas à la question puisque le cube A est alors partagé en deux morceaux qui sont certes reliés par deux points, mais c'est insuffisant. (figure 1).

Mais il est possible de faire pivoter le cube B de manière à placer une face parallèlement à une arête du cube A. (figure 2). En effet si nous faisons coïncider les centres des cubes A et B nous voyons qu'il reste un peu de place et qu'ainsi nous répondons à la question.

Reste à savoir si nous pouvons faire mieux, soit en prenant une position intermédiaire, soit en choisissant d'autres agencement dans l'espace avec un cube A qui n'ait pas exactement sa grande diagonale verticale.

Extrayons de la figure le triangle IJK (figure 3) de façon que l'angle I soit égal à 45°, l'angle J à 60° et par suite l'angle en K à 75°. La longueur IK est la demi-diagonale du plus grand carré que l'on puisse inscrire dans cette position dans l'hexagone. Nous avons :

$$\frac{IK}{\sin 60°} = \frac{IJ}{\sin 75°}$$

ce qui prouve que $IK = \frac{\sqrt{6}}{3}\frac{\sin 60°}{\sin 75°} = \sqrt{3} - 1$.

Mais si la dem-diagonale vaut $\sqrt{3} - 1$ alors le côté est $\sqrt{2}$ fois plus grand et vaut $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Nous avonsdonc bien prouvé ainsi qu'il est possible de creuser un « tunnel » dans un cube d'arête 1 pour y faire passe un cube d'arête légèrement supérieure à 1 et strictement inférieure à $\sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1{,}035276$. On peut

fig. 1

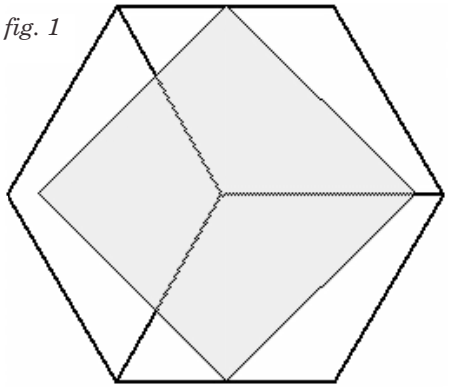


fig. 2

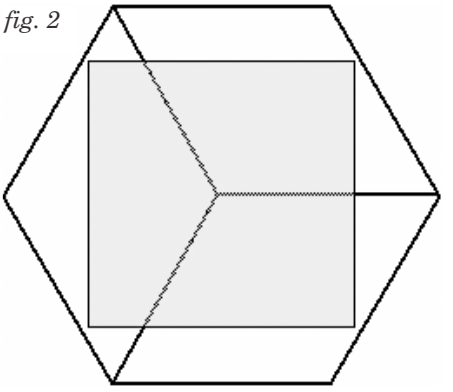
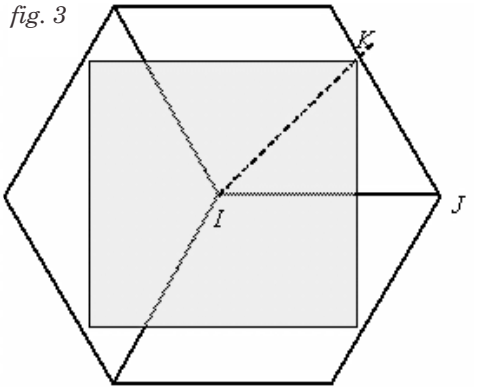


fig. 3



donc introduire, par exemple, un cube d'arête 30 dans un cube d'arête 29, puisque $30/29 \approx 1{,}034\,48...$ [1]

Les dessins suivants donnent une vue perspective pour deux cubes d'arête 1. Sur la figure 4 les deux cubes sont imbriqués l'un dans l'autre. Sur la figure 5 on voit clairement la forme du cube évidé et la façon dont le cube plein le traverse.

Note : Le lecteur trouvera sur le site http://irem2.u-strasbg.fr/spip/article.php3?id_article=106 de l'Irem de Strasbourg une animation ainsi qu'un fichier Maple permettant de modifier l'animation.

fig. 4

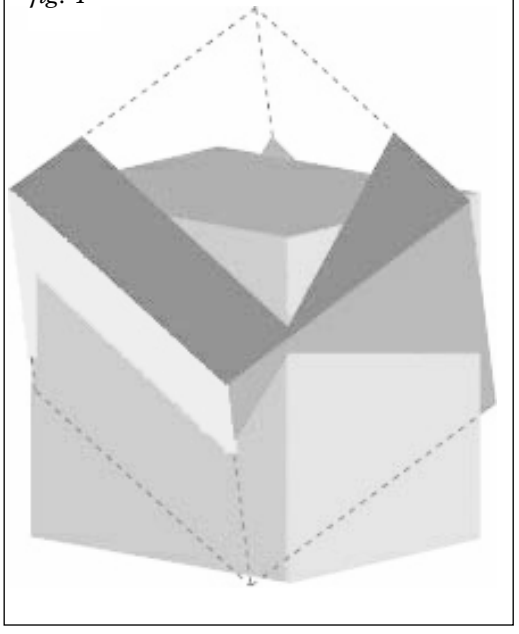


fig. 5

