LA RUBRIQUE « POINT DE VUE » :

Un lieu de débat pour les enseignants de Mathématiques

La rubrique « POINT DE VUE » *est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession.*

Elle accueille dans ce numéro un texte du groupe « Suites » de l'Irem de Strasbourg, à propos des "ROC" (Restitutions Organisées des Connaissances) *envisagées au Bac.*

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ trois pages…

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

Point de vue

DIFFICULTES DE LA RESTITUTION ORGANISEE DE CONNAISSANCES, EN PARTICULIER DANS LE DOMAINE DES SUITES

GROUPE « SUITES » (*)
Irem de Strasbourg

Le contexte

Le thème des suites dans l'enseignement de l'analyse.

La notion de suite occupe dans les débuts de l'enseignement de l'analyse une place qui se justifie à la fois d'un point de vue épistémologique — les suites de Cauchy ne constituent-elles pas une réponse possible au problème fondamental de l'arithmétisation de la droite réelle ? — et du point de vue de son emploi, en mathématiques et dans bien d'autres disciplines, facilité par les développements de l'informatique.

D'un pays à l'autre, la place accordée aux suites est néanmoins très variable. Dans certains cursus, comme en Belgique, on limite les exigences en fin d'enseignement secondaire aux connaissances touchant aux suites arithmétiques et géométriques, et à des compétences spécifiques concernant le raisonnement par récurrence.
Voir : http://www.enseignement.be/gen/syst/documentation/comptermenu.asp

Dans les pays où l'enseignement est organisé par unités conduisant à l'obtention de crédits, comme par exemple au Canada ou aux Etats-Unis, les suites peuvent se trouver dans des unités de mathématique pure ou dans des unités du type *mathématiques et applications financières*. Voir par exemple, pour l'enseignement canadien en langue anglaise, le site officiel de l'Ontario : http://www.edu.gov.on.ca/eng/document/curricul/secondary/grade1112/math/math.html
ou rechercher le « Standard 7 » dans un site

(*) François Pluvinage, Nicole Vogel, Michèle Chagnard, Jacky Dudt, Claudine Kahn, Bernard Koch, Bernard Langer, Gilbert Le Cam, Claudine Mitschi, Odile Schaladenhaufen, Francine Schmitt.

assez bien représentatif des exigences aux USA : http://www.brownsburg.k12.in.us/curriculum/Secondary/Mathematics/PreCalculusBHS.pdf

En France, le thème des suites dans les programmes 2001-2002 de l'enseignement secondaire (classes de 1ère et Terminales S) occupe une place plus importante que dans les programmes précédents. Si de plus on tient compte de la réduction d'ensemble des horaires de mathématiques, le poids de ce chapitre s'en trouve encore accru.

Classe de première S : programme arrêté le 9 août 2000. *BO hors série n°7 du 31 août 2000.*
Classe terminale S : programme arrêté le 20 juillet 2001. *BO hors série n°4 du 30 août 2001.*

C'est pourquoi, l'Irem de Strasbourg a souhaité que l'un de ses groupes de travail consacre son activité à une réflexion et à des expérimentations sur l'enseignement des suites en 1ère et en Terminale, voire en DEUG de math.

Les exercices comportant une Restitution Organisée de Connaissances

Deux références sur le sujet sont la note de service n° 2003-070 du 29-4-2003 :

http://www.education.gouv.fr/bo/2003/19/MENE0300942N.htm

et les exemples d'exercices diffusés par l'Inspection Générale de Mathématique qui peuvent être consultés par exemple sur le site EduSCOL :

http://eduscol.education.fr/index.php?./D0056/exmathsS.htm

Il est intéressant par ailleurs de consulter le document de l'Inspection Générale de mathématiques sur l'état de la discipline en 2002 :

ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/syst/igen/maths_discipline.pdf

car ce document expose des préoccupations sur l'acquisition d'une culture mathématique, incluant notamment la place du raisonnement et de la démonstration.

Parmi les trente-deux exemples d'exercices contenus dans le document précité, six portent explicitement sur les suites (Exercices n°6, n°13, n°14, n°22, n°26, n°31). Nous y reviendrons plus loin.

Essais et observations

Approche du thème des suites par le groupe et constats

Sans se préoccuper directement de la question des sujets de baccalauréat, le groupe « Suites » s'est proposé d'examiner comment les élèves, en 1ère et en Terminale, pouvaient accueillir le thème, quelles difficultés principales s'y rencontraient, quel temps pouvait y être consacré.

Voici quelques-uns des points repérés lors de cette étude :

— Problème récurrent et persistant encore parmi les étudiants de DEUG des inductions hâtives (suites considérées comme complètement déterminées à partir des trois, quatre ou cinq premiers termes),
— Difficultés dans la manipulation des indices,
— Difficulté de la notion de variable,
— Multiplicité problématique des comportements à l'infini : une suite peut être

convergente, ce qui ne s'accompagne pas nécessairement de monotonie contrairement à une intuition présente a priori chez beaucoup d'élèves, ou divergente, et dans ce cas elle peut avoir une « limite infinie » ou pas de limite du tout,

— Nouveauté de l'égalité à l'infini pour les limites : dans une égalité du type :

$$\lim_{n \to \infty} n - \sqrt{n} = +\infty ,$$

le symbole $+\infty$ apparaît une fois derrière une flèche et une fois derrière le signe « = ». Cet emploi incite par exemple à écrire, lorsque u et v ont toutes deux comme limite $+\infty$, que :

$$\lim_{n \to \infty} u_n - \lim_{n \to \infty} v_n = 0 ,$$

— Difficulté de notions comme « pour tout n », « il existe n »... On constate que même les étudiants de DEUG maîtrisent mal l'usage des quantificateurs, et pourtant leur compréhension intuitive est indispensable même si on ne les formalise pas dans les démonstrations de limites, de majorants ou pour formuler la négation de certaines propriétés,

— Manque de maîtrise du calcul.

Difficultés spécifiques à la restitution organisée de connaissances

Une des ambitions des programmes actuels est de définir la convergence et la notion de limite infinie d'une suite.

On lit dans les programmes de 1ère S : « Le travail demandé [...] à propos de la définition de la convergence est de nature épistémologique ; il sera présenté aux élèves comme tel et pourra permettre d'amorcer une réflexion, poursuivie en terminale, sur la nature des mathématiques. » Ou encore : « En analyse, [...] la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'études, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées : la nature et le niveau des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes (qu'en géométrie). Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des argumentations conçues et exposées à l'aide de schémas (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). »

On peut raisonnablement en déduire qu'en première et terminale S, l'enseignant se doit de présenter une définition rigoureuse de la convergence et de la limite infinie d'une suite, de les rendre accessibles au maximum d'élèves et de leur montrer quelques exemples d'utilisation, mais que le travail de l'élève est simplement de comprendre ce que son professeur lui expose et éventuellement de savoir l'appliquer en classe lors d'un travail bien encadré, ce qui exige déjà de réelles capacités d'abstraction.

La simple compréhension de ces définitions nécessite une bonne maîtrise des inégalités, de l'implication et des quantificateurs même s'ils ne sont pas traduits en langage formel. Elle exige de plus une connaissance très fine de la langue qui n'est pas très cultivée actuellement, ni par l'école, ni par la société.

La définition d'une suite tendant vers $+\infty$ donnée comme prérequis de l'exercice n° 31 de la liste de l'Inspection Générale en 2005 illustre bien ce niveau de complexité :

« Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».

D'autre part, bien que la formulation des quantificateurs en langage « naturel » entraîne un niveau de complexité linguistique incompressible, les définitions qui les utilisent peuvent être exprimées de différentes manières dont l'expérimentation nous apprend qu'elles ne sont pas perçues comme équivalentes.

Par exemple, la définition suivante d'une suite tendant vers $+\infty$:

> « Dire qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ signifie que :
> pour tout réel A arbitrairement choisi,
> on peut trouver un rang N à partir duquel tous les u_n sont supérieurs à A »,

bien qu'équivalente d'un point de vue sémantique à la définition de l'exercice n° 31 ne l'est pas du point de vue de l'apprenant.

De nombreux tests et expérimentations nous ont montré que, même en DEUG, ces difficultés ne sont pas dépassées.

Or la restitution organisée des connaissances se place à un niveau nettement plus élevé. Restituer des connaissances nécessite non seulement d'avoir compris les définitions et les démonstrations du cours, mais en plus de savoir les mémoriser, autre type d'exercice dévalorisé depuis des années par l'Education Nationale elle-même et auquel les lycéens ont donc été peu préparés.

Les restituer de façon organisée exige en plus de savoir les réinvestir, les reformuler, les transformer et les intégrer à des démonstrations.

Il semble que cela n'est accessible qu'à un très petit nombre d'élèves de terminale S.

Observations sur les exercices relatifs aux suites de la liste proposée par l'Inspection Générale de Mathématique (http://eduscol.education.fr/D0056/maths-S-ex2005.pdf)

Exercice n° 6 :

Les questions 1 à 3 semblent raisonnables, car assez proches du cours, bien qu'on puisse s'interroger sur l'énoncé de la question 1 : « Donner la traduction mathématique de la propriété P1 » qui laisse penser que P1 : « la suite (u_n) est majorée » n'est pas du langage mathématique.

Par contre la question 4 : « Une suite vérifiant la propriété P4 vérifie-t-elle nécessairement la propriété P2 (on demande de justifier la réponse) ? » avec
— P2 la suite (u_n) n'est pas majorée ;
— P4 la suite (u_n) tend vers $+\infty$;
cumule :
— Une difficulté de formulation — Une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ vérifie-t-elle nécessairement la propriété « elle n'est pas majorée » ? — qui tient autant à l'usage implicite de plusieurs quantificateurs qu'à l'usage d'une négation.
— Un gros problème de démonstration : pour prouver qu'une suite tendant vers $+\infty$ n'est pas majorée, il faut savoir expliciter la propriété « la suite (u_n) n'est pas majorée », ce qu'on peut difficilement exiger de la part d'élèves qui n'ont rien appris sur les quantificateurs.

Exercice n° 13 :

La partie A propose : « Soit (u_n) une suite croissante non majorée.
1. Soit M un nombre réel et n_0 un entier naturel tel que $u_{n_0} \geq$ M .
   Démontrer que pour tout entier naturel n, si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq$ M .

2. Quelle conséquence peut-on en tirer pour la suite (u_n) ?
3. Enoncer le théorème du cours ainsi démontré. »

La question 1 est claire. Les questions 2 et 3 ne le sont pas, car on peut aussi faire la démonstration de la question 1 pour une suite (u_n) croissante *et* majorée, par M ou par un autre réel. « Soit » ne donne aucune indication sur l'existence d'un n_0 .

Cet énoncé montre bien la difficulté de faire des démonstrations rigoureuses sans utiliser les quantificateurs. Si nous-mêmes n'y arrivons pas, il n'est sûrement pas raisonnable de le demander à des lycéens.

Exercice n° 14 : La démonstration du C exige d'utiliser la propriété « la suite n'est pas majorée » comme dans la question 4 de l'exercice n°6. Cependant, comme il s'agit ici d'un théorème du cours, le travail demandé aux élèves est de restituer une démonstration et non d'en construire une nouvelle. Le niveau de difficulté est donc plus raisonnable, mais le travail sur les contre-exemples est peut-être une piste plus intéressante pour les exercices de restitution organisée de connaissances.

L'exercice n° 22 est d'un niveau totalement décalé par rapport aux autres, et semble sans grand intérêt si on n'intègre pas cette question à un exercice plus complet. Il ne vaut sans doute pas trois points, qui est pourtant le barème minimum pour un exercice de bac.

Exercice n° 26 (spécialité) : Cet exercice donne les dix premiers termes d'une suite (u_n) et pose des questions du type :
— Montrer que u_n n'est jamais …
— Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang, u_n est …

Nous avons élaboré un questionnaire du type Vrai – Faux, que nous avons soumis à une dizaine de classes de 1ère S, terminale S ou groupes d'étudiants de DEUG maths.

Nous avons posé entre autres les deux questions suivantes :

« (u_n) est une suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ et telle que $u_0 = 5$; $u_1 = 8$; $u_2 = 11$; $u_3 = 14$. Répondre par Vrai ou Faux :
a) On est sûr que cette suite est arithmétique.
b) On est sûr que cette suite est croissante. »

Ces deux questions sont les plus mal réussies de tout le test, qui comporte pourtant de bien plus grandes difficultés a priori. Les taux de réussite moyens pour ces deux questions sont respectivement de
— 20% et 20% pour les élèves de terminale S testés,
— 36% et 31% pour les étudiants de première année de DEUG de math testés,
— 24% et 22% pour l'ensemble des lycéens et étudiants testés.

On peut alors imaginer les réponses à la question : « Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang, u_n est divisible par 3^2 mais pas par 3^3 ? »

La plupart des jeunes répondront sans doute : « Oui, à partir du rang 5, u_n est divisible par 3^2 mais pas par 3^3 » — ce qui est la réponse correcte — mais en ne regardant que les termes de rang compris entre 5 et 10. Pire, les assez rares élèves qui n'extrapolent pas les propriétés des suites à partir des premiers termes auront plus de mal à trouver la bonne réponse.

Exercice n° 31 : On retrouve dans la partie I une question déjà posée sous une autre forme dans le n° 14, mais la définition donnée ici en prérequis ne simplifie pro-bablement pas le problème, car, comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, les élèves ont peut-être l'habitude de travailler sur un énoncé un peu différent qui leur est plus familier.

Qu'attend-on comme réponse à la question 2b ? Que signifie la question 2c « Conclure quand à la convergence de la suite (u_n) » ? Faut-il simplement dire que (u_n) est divergente ou aussi prouver qu'elle tend vers $+\infty$?

En conclusion, ces exercices abordent essentiellement trois types de difficultés :

— Savoir utiliser dans une démonstration le fait d'être « non majorée » (exercices 6, 13, 14, 31).
Dans les exercices 14 et 31, il s'agit de restituer la démonstration d'un théorème du cours, reprise également dans le numéro 13. L'exercice 6 demande de trouver une nouvelle démonstration de ce genre et nous semble donc trop difficile.

— Rechercher des contre-exemples.

— Etudier des propriétés d'une suite à partir de conjectures - vraies ou fausses - sur les premiers termes.

Il nous semble qu'on accorde ici une place trop importante au premier point dont l'évaluation en terminale n'est peut-être pas raisonnable, alors que les deux autres donnent des pistes intéressantes.

Il est dommage que le seul exercice de la troisième catégorie soit le numéro 26 car c'est un exercice de spécialité et qu'il propose un exemple compliqué et des questions dont la réponse correcte non justifiée correspondra dans la plupart des cas à un raisonnement faux comme nous l'avons souligné plus haut.

Comprendre qu'on ne peut pas induire une propriété à partir des premiers termes d'une suite nous semble un objectif plus essentiel en terminale que le premier point. C'est une piste possible pour de futurs exercices type bac.

Conclusions

L'étude engagée ne permet actuellement que d'avancer des conclusions provisoires. Toutefois, il apparaît que certaines difficultés sont incontournables, notamment les choix imposés par la contrainte du temps d'enseignement, la nécessité de savoir s'exprimer et argumenter outre la maîtrise des raisonnements, la difficulté de cumuler « savoir-démontrer » et « savoir-utiliser ».

Rappelons que l'horaire consacré aux mathématiques dans l'enseignement secondaire en général et dans les classes de Terminale scientifique en particulier a été réduit par rapport à ce qu'il était disons il y a une quinzaine d'années. Mais les capacités individuelles d'assimilation ne se sont pas accrues pour autant. Les essais conduits ont fait apparaître que des élèves d'un niveau général plus que correct peuvent certes s'entraîner à traiter des exercices comportant des restitutions organisées de connaissances et y parvenir en définitive pas trop mal. Mais corrélativement, leur réussite à des exercices d'application a semblé s'en trouver réduite, ce qui a été mis en lumière lorsque ces mêmes élèves ont été interrogés sur des exercices de baccalauréat des années précédentes. Que dire de ce qui se passe dans des classes d'un niveau d'ensemble un peu moins bon ? Nous avons observé par exemple la copie d'une élève consciencieuse qui avait récité – plutôt correctement – des passages compliqués de la démonstration d'un ... autre théorème que celui qu'on lui demandait de prouver. Un problème de choix se pose donc, puisque l'entraînement à des exercices du type de ceux qui ont été proposés sous l'intitulé de R.O.C. semble demander un effort important, au détriment de l'entraînement à d'autres activités.

• On risque de discréditer l'enseignement des maths car on sait bien que plus les sujets sont difficiles, plus il faut être indulgent dans la correction des copies pour obtenir des notes « raisonnables » et on finit par donner des notes qui ne sont guère significatives (c'est ce qui s'est passé au bac S 2003).

• On crée un malaise et un sentiment de découragement et d'insécurité auprès des élèves car ils ont l'impression qu'on leur demande des choses trop difficiles pour eux et qu'ils n'auront jamais assez de connaissances et de savoir-faire pour aborder l'épreuve de bac sereinement. On les met en permanence face à leur incompétence et pas en situation où leurs compétences sont valorisées. On n'a plus le temps de faire des *activités* motivantes en raison du temps important qu'il faut consacrer aux démonstrations de cours. Comment peuvent-ils dans ces conditions acquérir le goût des mathématiques et avoir envie de poursuivre leurs études dans ce domaine ?

• Ne serait-il pas plus raisonnable de reporter à l'enseignement supérieur spécialisé en mathématiques la capacité à traiter abstraitement des notions mathématiques ?