
LE PROBLEME DES 5 CARRES

ou

Comment montrer l'intérêt des identités remarquables

Jean-Paul MERCIER
Irem de Poitiers

Dans cet article, je propose de suivre la résolution d'un problème assez connu mais difficile, donné en classe de troisième. J'essaierai de vous faire partager la richesse de ce problème sur les méthodes qu'il permet de mettre en jeu.

Ce problème sera abordé dans différents contextes : pédagogique (déroulement de l'activité), technique (utilisation d'un tableur), historique (utilisation de traductions de méthodes du IX^{ème} siècle, à la naissance de l'algèbre).

J'exposerai alors comment j'introduis la factorisation en troisième pour résoudre des équations.

1. — Présentation du problème et son intérêt

Le problème « des cinq carrés » pourrait être l'un des problèmes des Arithmétiques de Diophante. Certains problèmes de Diophante en effet y ressemblent [1] :

« (6.20) Trouver trois nombres carrés tels que si on multiplie le premier par le deuxième et le résultat par le troisième et qu'on soustrait ce qu'on obtient du nombre composé de la somme des trois nombres, il en reste un carré.

$$x^2 + y^2 + z^2 - x^2y^2z^2 = s^2$$

(7.17) Trouver quatre nombres carrés qui

LE PROBLEME
DES 5 CARRES

soient aussi proportionnels et tels que leur somme soit aussi un carré...

$$y^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \text{ avec } x_1x_4 = x_2x_3$$

Je donne ce problème sous une « forme habillée concrète », en général lors de la deuxième séance de découverte des identités remarquables en classe de troisième (voir ci-dessous et annexe A1).

Evoquons tout de suite la richesse de ce problème :

- Riche parce qu'il permet des traductions variées, qui donneront du sens au choix pertinent d'une inconnue.
- Il permet de donner du sens au fonctionnement des identités remarquables, utilisées en développement puis en factorisation.
- Il offre la rencontre avec cinq équations différentes pour le résoudre.

(Disons-le immédiatement, aucune de ces cinq équations n'est connue des élèves, elles sont du second degré : c'est la première rencontre. Mais c'est l'occasion d'introduire des outils qu'on demande à un élève de troisième de comprendre si ce n'est de maîtriser.)

- Ces équations sont des piliers historiques de l'algèbre, ce sont trois des six équations canoniques d'Al Khwarizmi [2].
- Je montrerai comment les élèves ont utilisé ses méthodes exposées dans son ouvrage fondamental (annexe A3), pour résoudre les équations obtenues.
- On peut amener les élèves à comprendre l'intérêt de la factorisation pour accéder à la résolution des équations, soit lorsque les deux membres sont des carrés, soit pour mettre sous la forme d'une équation-produit.

Activité 4

Cinq frères et sœurs ont hérité de cinq terrains carrés dont les mesures des côtés sont cinq entiers consécutifs.

Les terrains sont assemblés en deux groupes : les trois plus petits terrains d'un côté d'un chemin, et les deux plus grands terrains de l'autre côté... Ainsi les surfaces de part et d'autre du chemin sont équivalentes. Comment trouver les dimensions de chaque terrain ?

The diagram shows five squares of increasing size from left to right. A vertical line labeled 'chemin' separates the three smallest squares on the left from the two largest squares on the right. A horizontal line labeled 'route' is positioned below the squares, indicating they are adjacent to a road.

2. — Déroulement de l'activité

Situons la position du problème dans le déroulement de la séquence en classe...

Ma fiche d'introduction au calcul littéral pour les équations (annexe A1) vise à ce que les élèves rencontrent les identités remarquables au service des problèmes de calcul et de résolution d'équations où leur utilité est incontournable : dans un premier temps on travaille le développement, dans un deuxième temps on travaille la factorisation. Les situations ont été sélectionnées en fonction de la difficulté relative et de l'intérêt des méthodes variées par lesquelles les élèves peuvent traiter ces problèmes. Elles permettent aussi pour le premier de montrer les limites du calcul à la main ou à la calculatrice.

Extraits de la fiche-élève (annexe A1) :

Dans les activités suivantes, il s'agit de découvrir des méthodes de calcul appropriées aux situations. On cherchera surtout des stratégies plutôt que des résultats. On pourra aussi chercher s'il y a plusieurs méthodes et celle qui est la plus économique.

Travail par groupe : chacun cherche seul pendant 5 minutes puis expose aux autres ce qu'il a trouvé ou leur pose des questions ; le groupe doit pouvoir communiquer une réponse commune après 15 minutes pour chaque activité.

(Faire les activités dans l'ordre. Mettre au propre à la maison ensuite)

Les activités de découvertes sont choisies pour faire passer l'élève de ses techniques mêmes rudimentaires de quatrième à celles de troisième et lui faire rencontrer, en situa-

tion, les carrés de la forme $(x + 1)^2$, $(x - 1)^2$, les produits $(x - 1)(x + 1)$ et les équations $x^2 = a$ (ou a est un entier positif carré [ex3] ou non [ex2]). Je ne décrirai pas ici le travail des élèves sur ces sujets.

Ces exercices sont basés sur la répétitivité de situations voisines, tout en permettant de varier les calculs sur différentes formes : $(x + 1)^2$, $(x - 1)^2$, $(x + 1)(x - 1)$, $(x + 2)(x - 2)$.

Les bilans des trois premières activités ont permis de mettre en place sur quelques exemples simples les résultats suivants :

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1,$$

$$(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1,$$

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4,$$

en utilisant la double distributivité de 4ème et en réduisant les produits égaux ;

$$x \times 1 + 1 \times x = 2x$$

et les produits opposés :

$$2 \times x - x \times 1 = 0.$$

L'activité n°4 est le problème des cinq carrés. L'étude en est faite en trois étapes séparées :

Une recherche de solutions avec le tableur

Elle donne du sens à la notion de nombres entiers consécutifs, à la notion de carré d'un nombre ($x^2 = x \times x$) et permet de mettre en situation l'usage du tableur dans une recherche (voir sur le serveur IREM de POITIERS le fichier *5carrés.xls* <http://irem.campus.univ-poitiers.fr/irem/ressource/product/5carrés/>).

Modalité : une séance de 50 minutes en salle informatique.

J'invite, à la fin de la séance, les élèves à traduire en équation le problème pour le lendemain.

La mise en équation du problème

Travail en classe (papier crayon) : formes $(x + b)^2$ et $(x - b)^2$.

Durée 20 minutes (1ère traduction) + 20 minutes pour la mise en commun + *travail à la maison sur les autres traductions* + 20 minutes le lendemain pour la mise en commun des résultats. La traduction en équation laissant apparaître des équations non solubles algébriquement dans l'état des connaissances des élèves, leur résolution est différée.

Suit une synthèse de cours, identités remarquables et développement et quelques exercices d'applications (sur deux séances), dont reconnaissance de développements, complément de formes, ... qui ne seront pas relatés ici.

La résolution des équations à partir des méthodes d'Al-Khwarizmi

Lecture et application de fragments d'histoire des maths (brochure IREM de Poitiers Al-Kwarizmi I [2]).

Durée 50 minutes.

Puis la mise au point finale : *la résolution de chacune des équations par la factorisation des formes $x^2 + 2bx + b^2$ et $x^2 - 2bx + b^2$*

Durée 40 minutes.

Puis suivent des séances plus classiques de cours et d'exercices, qui ne seront pas relatés dans notre propos :

— *factorisation des expressions littérales – cours et applications,*

— *équations – cours et applications.*

3. – Première étape : recherche au tableur.

Elle a pour buts de faire comprendre à l'élève les notations $N, N+1, N+2, N+3, N+4$ comme moyen de traduction des ... **cinq entiers consécutifs**... et tester des nombres comme réponses (solutions) au problème.

En effet, la mise en équation est une des principales difficultés rencontrées par certains élèves. Au départ, ils traduisent les cinq nombres par cinq lettres différentes, par exemple $a b c d e$ — lettres consécutives dans l'alphabet. Débuter par le tableur permet de donner un sens actif immédiat aux écritures $N, N+1, N+2, N+3, N+4$.

Modalités : Une salle informatique, équipée de quinze postes en réseau. Un tableur sur chaque poste. Deux élèves par poste. Un vidéoprojecteur sur un autre poste-professeur en réseau (l'équipe pédagogique 'math' dispose d'un équipement portable+vidéo+tableau blanc mobiles).

Consigne orale : « Traduire le problème dans le tableur. Mais c'est le tableur qui devra calculer à votre place »

Certains élèves entrent tous les nombres et même les carrés (calculés mentalement), voire les sommes. Ils constatent alors la nécessité de mieux piloter le tableur pour éviter de répéter les remplissages.

Cette première phase introduit une discussion-échange sur les codages choisis entre les groupes.

Remarque : mes élèves n'ont pas encore une maîtrise personnelle du tableur. Plusieurs en sont déjà familiers, l'ayant utilisé en qua-

trième. Certains en découvrent presque l'existence en troisième. Cependant nous l'avons déjà utilisé une fois dans le cadre un peu différent de la gestion de données un mois auparavant (tri – moyenne – médiane – graphiques).

La première réponse-élève (annexe2 et *les5carrés.xls* feuilles élèves_Poste_12, _O2, _O5) consiste à remplir les cellules de la ligne 2 par des valeurs qu'ils calculent plutôt de tête. Certains commencent par 1 pour le premier nombre.

J'insiste alors sur le fait que le tableur est un calculateur, et qu'ils doivent lui commander les calculs, tous les calculs, y compris ceux des longueurs des côtés.

En général les élèves traduisent la notion de nombre entier consécutif par « ajouter 1 », ce qui n'est pas évident pour certains :

A2 B2=A2+1 C2=B2+1
D2=C2+1 E2=D2+1
(recopiant vers la droite)

Quelques-uns ont perçu qu'il y avait une comparaison des nombres avec le premier d'entre eux :

A2 B2=A2+1 C2=A2+2
D2=A2+3 E2=A2+4
(en créant les formules)

et commencent par la valeur 1 pour A2.

On compare les deux bonnes méthodes. L'avantage de la première est la rapidité de mise en œuvre. La seconde demande une analyse supplémentaire, pour constater que toutes les cellules dépendent directement du contenu de la première.

Je procède assez rapidement (quand chaque groupe a proposé une réponse) à une mise au point en commun pour préciser l'écriture de formules dans les cellules à l'aide de « =formule » :

— commande du calcul du nombre consécutif : =A2+1 dans la cellule B2, après avoir comparé les deux traductions possibles et fait remarquer que $C2 = B2 + 1 = (A2 + 1) + 1 = A2 + 2$. Il faudra y revenir lors de la mise en équation.

— commande du calcul du carré : =A2*A2 dans la cellule F2 et l'utilisation de l'outil « recopier vers la droite » dans les cellules B2 à E2, et les cellules F2 à J2

Présentation à la classe du fichier-prof (feuille *prof_base*) à l'aide du vidéo-projecteur (voir encadré ci-dessous).

Sur la feuille *Prof_étude1* (voir encadré page suivante), je montre alors aux élèves, s'ils ne l'ont pas déjà trouvé par eux-mêmes, qu'ils peuvent

— soit modifier A2, mais dans ce cas on n'a qu'un seul exemple à l'écran,

feuille *prof_base*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N ²	(N+1) ²	(N+2) ²	(N+3) ²	(N+4) ²	Somme N ⁰ 1	Somme N ⁰ 2
2	1	2	3	4	5	1	4	9	16	25	14	41
3												

LE PROBLEME
DES 5 CARRES

feuille *prof_étude1*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N ²	(N+1) ²	(N+2) ²	(N+3) ²	(N+4) ²	Somme N°1	Somme N°2
2	1	2	3	4	5	1	4	9	16	25	14	41
3	2	3	4	5	6	4	9	16	25	36	29	61
4												

— soit recopier la ligne 2 en ligne 3 pour conserver les divers essais de leur recherche, et ce sera plus lisible si ces essais sont ordonnés.

Les lignes suivantes (ci-dessous) obtenues par « recopier vers le bas » font apparaître les valeurs incrémentées de 1 en 1 dans la colonne A, en sélectionnant les cellules A2 à L3 et en « recopiant vers le bas », puis en remplaçant 1 par 2 dans A3.

On répète cette copie vers les lignes suivantes. On peut montrer aussi comment commander le calcul de nombres consécutifs dans la colonne A à l'aide la formule =A2 + 1 dans la cellule A3.

On trouve alors pour N = 10 la solution, avec pour somme 365.

Il faut ensuite guider la discussion vers la différence entre les deux sommes. Se rap-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N ²	(N+1) ²	(N+2) ²	(N+3) ²	(N+4) ²	Somme N°1	Somme N°2
2	1	2	3	4	5	1	4	9	16	25	14	41
3	2	3	4	5	6	4	9	16	25	36	29	61
4	3	4	5	6	7	9	16	25	36	49	50	85
5	4	5	6	7	8	16	25	36	49	64	77	113
6	5	6	7	8	9	25	36	49	64	81	110	145
7	6	7	8	9	10	36	49	64	81	100	149	181
8	7	8	9	10	11	49	64	81	100	121	194	221
9	8	9	10	11	12	64	81	100	121	144	245	265
10	9	10	11	12	13	81	100	121	144	169	302	313
11	10	11	12	13	14	100	121	144	169	196	365	365
12	11	12	13	14	15	121	144	169	196	225	434	421
13	12	13	14	15	16	144	169	196	225	256	509	481
14	13	14	15	16	17	169	196	225	256	289	590	545
15	14	15	16	17	18	196	225	256	289	324	677	613
16	15	16	17	18	19	225	256	289	324	361	770	685
17	16	17	18	19	20	256	289	324	361	400	869	761
18	17	18	19	20	21	289	324	361	400	441	974	841
19	18	19	20	21	22	324	361	400	441	484	1085	925

prochent-elles ? S'écartent-elles ? Est-on sûr par cette méthode qu'on a trouvé toutes les possibilités ? Faut-il aller plus loin dans les longueurs des côtés ?

Et dans l'autre sens ? La remarque pertinente vient de suite : il ne peut pas y avoir d'entier plus petit que 0 comme côté du carré ! On peut alors déplacer le problème sur le plan mathématique en utilisant des entiers d'un autre type, relatifs !

Remarque : si l'on construit (facultatif) une colonne « différence des sommes », on voit apparaître nettement une variation décroissante, puis croissante de cette différence. Cela laisse supposer qu'il y a deux possibilités de solution, l'une d'elles (-2, -1, 0, 1, 2) restant à chercher. Cette différence des sommes illustre l'équivalence $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$ à laquelle les élèves ne pensent pas seuls.

Sur la feuille *Prof_complet* du fichier *les5carrés.xls* (voir ci-dessous), je montre aux élèves comment recopier la ligne 2 « vers le haut » :

Il faut insérer sept ou huit lignes supplémentaires avant la première ligne de valeurs et recopier vers le haut cette pre-

mière ligne (devenue la septième ou huitième ligne) : on sélectionne un rectangle de toutes les cellules utilisées des lignes contenant $N = 1$ et $N = 2$ et on tire la poignée noire (coin bas-droit du rectangle) vers le haut.

On voit alors apparaître la 2ème solution mathématique, espérée par le professeur... (cf. encadré de la page suivante). Nous rediscutons avec les élèves du sens de chaque solution par rapport au problème posé.

Bilan et amélioration : on pourrait très bien ne pas commencer par $N = 1$ mais par $N = 30$. L'intérêt dans ce cas serait de faire constater qu'on ne trouve rien au-delà de $N = 30$ et qu'il faudrait revenir vers N plus petit. Cela entraîne plus facilement le passage vers les N négatifs et leur introduction devient moins artificielle.

4. – Deuxième étape : la mise en équation.

Travail sur la forme $(x + b)^2$ et son développement

Ce travail se fait en salle normale par groupes de quatre élèves.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N ²	(N+1) ²	(N+2) ²	(N+3) ²	(N+4) ²	Somme N°1	Somme N°2	différence
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10	1	2	3	4	5	1	4	9	16	25	14	41	-27

LE PROBLEME
DES 5 CARRES

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N ²	(N+1) ²	(N+2) ²	(N+3) ²	(N+4) ²	Somme N°1	Somme N°2	différence
2	-7	-6	-5	-4	-3	49	36	25	16	9	110	25	85
3	-6	-5	-4	-3	-2	36	25	16	9	4	77	13	64
4	-5	-4	-3	-2	-1	25	16	9	4	1	50	5	45
5	-4	-3	-2	-1	0	16	9	4	1	0	29	1	28
6	-3	-2	-1	0	1	9	4	1	0	1	14	1	13
7	-2	-1	0	1	2	4	1	0	1	4	5	5	0
8	-1	0	1	2	3	1	0	1	4	9	2	13	-11
9	0	1	2	3	4	0	1	4	9	16	5	25	-20
10	1	2	3	4	5	1	4	9	16	25	14	41	-27
11	2	3	4	5	6	4	9	16	25	36	29	61	-32
12	3	4	5	6	7	9	16	25	36	49	50	85	-35
13	4	5	6	7	8	16	25	36	49	64	77	113	-36
14	5	6	7	8	9	25	36	49	64	81	110	145	-35
15	6	7	8	9	10	36	49	64	81	100	149	181	-32
16	7	8	9	10	11	49	64	81	100	121	194	221	-27
17	8	9	10	11	12	64	81	100	121	144	245	265	-20
18	9	10	11	12	13	81	100	121	144	169	302	313	-11
19	10	11	12	13	14	100	121	144	169	196	365	365	0
20	11	12	13	14	15	121	144	169	196	225	434	421	13

1) Je donne oralement la consigne suivante :
« *Le travail sur tableur met en évidence la possibilité de traduire les longueurs des côtés. Vous allez mettre en équation ce problème et simplifier cette équation.* »

Pour espérer voir cette étape franchie facilement par tous, il faut engager rapidement une discussion sur les méthodes de traduction : quelle inconnue choisissent-ils ?

On voit quelques élèves proposer $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$, $x + 5$, en référence à leur première réponse sur tableur. D'autres conservent encore un peu confusément x , $x + 1$, $(x + 1) + 1$, $(x + 1 + 1) + 1$, $(x + 1 + 1 + 1) + 1$. La mise au point commune permet de valider plutôt le modèle commun x , $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$,

$x + 4$. Les élèves obtiennent assez facilement l'équation :

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2 + (x + 4)^2.$$

Je conseille de répartir le travail pour le développement en appliquant les démarches vues dans les trois activités précédentes (annexe A1). L'extension se fait sur les termes $(x + b)^2$ avec b devenant 2, 3 puis 4. Les élèves comparent leurs acquisitions. Certains utilisent encore la méthode de 4ème de double distributivité, d'autres utilisent maintenant la méthode de troisième. (voir annexe A3)

Suit une discussion-corrrection commune comparative. Je partage le tableau en trois colonnes. J'envoie des élèves volontaires qui

ont trouvé dans leur groupe des méthodes ou des présentations différentes.

La plupart des groupes obtiennent après réduction l'équation :

$$3x^2 + 6x + 5 = 2x^2 + 14x + 25 .$$

Dans certains groupes la réduction et un début de résolution amène à l'équation :

$$x^2 - 8x = 20 .$$

Dans quelques groupes la discussion sur sa simplification amène à la proposer ainsi :

$$x^2 = 8x + 20$$

qui est une des six formes d'équations étudiées par Al Khwarizmi dans son ouvrage *Kitab al jabr wal muqabala* composé entre 813 et 833 [2], « Chapitre VI : Des racines et des nombres égaux à un carré ».

Un premier échange rapide est fait avec la classe sur les travaux effectués, limités par une équation qu'on ne sait pas résoudre. On pourrait s'arrêter là, mais je fais remarquer que nous avons naturellement choisi comme inconnue le premier des 5 nombres et je suggère qu'un autre choix des inconnues pourrait mener à une équation plus intéressante, c'est-à-dire qu'on pourrait peut-être résoudre. Les élèves proposent assez facilement à la classe de partir du plus grand des cinq nombres, on regarde sur les trois possibilités restantes et on répartit le travail entre les groupes (ou à l'intérieur des groupes).

Certains élèves signalent qu'on peut même prendre le deuxième nombre comme inconnue, ou le quatrième. Ce qui nous donne deux possibilités supplémentaires.

2) Quelques groupes ont choisi plutôt : $x - 4$, $x - 3$, $x - 2$, $x - 1$, x , et obtiennent l'équation :

$$(x - 4)^2 + (x - 3)^2 + (x - 2)^2 = (x - 1)^2 + x^2$$

qu'ils réduisent à : $x^2 - 16x + 28 = 0$ et, pour certains transforment ainsi : $x^2 + 28 = 16x$, forme aussi étudiée par Al Khwarizmi, « Chapitre V : Des carrés et des nombres qui équivalent à des racines ».

3) Les groupes qui ont choisi : $x - 2$, $x - 1$, x , $x + 1$, $x + 2$, obtiennent l'équation :

$$(x - 2)^2 + (x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2$$

qu'ils transforment en : $x^2 - 12x = 0$, ou en : $x^2 = 12x$, encore une des formes d'équations étudiées par Al Khwarizmi, « Chapitre I : Des carrés égaux à des racines ».

4) Les élèves qui ont étudié $x - 1$, x , $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, parviennent à l'équation $x^2 = 10x + 11$,

5) Enfin les derniers arrivent avec $x - 3$, $x - 2$, $x - 1$, x , $x + 1$, à l'équation $x^2 + 13 = 14x$.

Bilan en classe : Nous procédons alors à une dernière comparaison au tableau des différentes méthodes de calculs utilisées par les groupes. Celle-ci met en évidence des calculs plus longs à écrire par la méthode de quatrième et les élèves observent que les développements sont plus courts à écrire sous la forme $x^2 + 2bx + b^2$. Ils remarquent aussi que l'on procède toujours de la même manière pour développer $(x + b)^2$ comme $(x - b)^2$. J'établis avec eux les deux identités :

$$(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$$

et

$$(x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2 .$$

On termine en remarquant qu'on obtient des équations qu'on ne sait pas pour l'instant résoudre.

Suit une phase « synthèse de cours – exercices d'application simple », répartie sur trois séances, avec la forme générale des développements du type $(ax + b)^2$, $(ax - b)^2$ et $(ax + b)(ax - b)$, suivie d'exercices d'entraînement, y compris un temps avec l'usage d'un exerciceur (SMAO3 \ activités numériques \ calcul littéral \ développement). Nous terminons par les reconnaissances de développement de carrés, et des égalités à compléter pour préparer la troisième étape.

5. — Troisième étape : la résolution des équations. Utilisation de l'histoire des mathématiques.

Je donne aux élèves les deux méthodes des chapitres V et VI du livre d'Al Khwarizmi (annexe A4) concernant les équations $x^2 = 3x + 4$ et $x^2 + 21 = 10x$. Je présente rapidement ce mathématicien. (annexe A7)

Je traduis avec eux la première phrase de chacun des deux textes, en précisant le sens de chacun des mots carré – racine – nombre. Nous transformons ensemble ces deux phrases en les deux équations ci-dessus.

« Carré » désigne bien un nombre carré inconnu, soit x^2 , « racine » désigne la mesure du côté du carré ou encore l'inconnue x , « nombre » désigne un nombre entier connu.

Consigne : Vous devez analyser et noter les étapes de la méthode donnée par Al Khwarizmi pour trouver une solution à l'équation $x^2 = 3x + 4$.

Vous essayerez alors en parallèle de trouver par le même procédé une solution à l'équation $x^2 = 8x + 20$.

Faites de même pour la deuxième méthode avec l'équation $x^2 + 21 = 10x$ et trou-

ver une solution à l'équation $x^2 + 28 = 16x$. Réfléchir à la dernière équation $x^2 = 12x$. Vous travaillez par groupe de deux.

Les réponses prennent parfois l'allure d'un petit organigramme, ou d'une suite des nombres trouvés dans les étapes consécutives comme dans un tableau non tracé. (annexe A5). Certains ont codé la démarche, quand ils ont voulu l'appliquer à l'équation de notre problème, mais pas immédiatement. Mon passage dans les groupes les a confortés dans ce choix. Il s'avère que cela devient nettement plus lisible.

Selon la méthode V ou VI, ils retrouvent une ou les deux solutions déjà vérifiées à l'aide du tableur. Avec ces méthodes, ils valident leur compréhension en résolvant les équations $x^2 = 10x + 11$ et $x^2 + 13 = 14x$.

Pour les groupes qui ont eu le plus de difficulté, je procède à une analyse des méthodes d'Al Khwarizmi, pour faire apparaître les étapes du calcul suivantes. Mon but est de les préparer à la réflexion ultérieure sur la factorisation, en transformant les écritures dans les équations.

Voici les étapes :

- identification du coefficient de x , dont on prend la moitié,
- le calcul du carré de cette moitié,
- le calcul d'un nouveau nombre entier, qui est un carré,
- le calcul de sa racine carrée,
- le calcul de x par addition de cette racine carrée avec la moitié trouvée au début.

Analyse de cette phase

Il y a trois difficultés :

- l'analyse d'un texte descriptif d'une démarche

(car Al Khwarizmi ne fait que décrire sa méthode et sur un seul exemple)

— la compréhension et la traduction de ce que fait ce mathématicien en termes actuels : programme de calcul ou narration des calculs réalisés.

— la réalisation en parallèle pour certains, consécutivement pour la plupart, de l'équation de notre problème.

On prend aussi le temps de comprendre les conseils d'Al Khwarizmi. Un petit retour historique est fait sur les deux règles données par Al Khwarizmi : *al jabr* et *al muqabala*.

Je fais avec eux la mathématisation suivante de chaque résolution d'équation amenant à la découverte de deux équations types de troisième qui seront étudiés complètement plus tard :

l'équation-produit : $(ax + b)(cx + d) = 0$,

et l'équation-carré : $x^2 = a$ (avec a positif ou nul)

6. — Complément sur les équations incomplètes et la factorisation des formes $x^2 + 2bx + b^2$ et $x^2 - 2bx + b^2$

Cette phase est présentée à tous les élèves en classe entière. Les étapes sont étudiées avec leur concours, en faisant référence à celles d'Al Khwarizmi. Deux idées nouvelles guident mon choix :

La première : dans les équations du premier degré vues avant la classe de troisième, on cherche à isoler dans un membre de l'équation les inconnues, dans l'autre les constantes.

La deuxième : en analysant le procédé d'Al Khwarizmi, et sa démonstration géométrique

(annexe 7 et fichiers geoplanw2 AK5.gw2 et AK6.gw2), on remarquera qu'il identifie des longueurs inconnues sans jamais les nommer réellement. Notamment le carré final

n'est autre que $(5 - x)^2$ ou $\left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2$, soit : $(x - 5)^2$ ou $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

Et en fait, il identifie en séparant les cas :

$5 - x = 2$ qui l'amène à affirmer $x = 5 - 2$, procédé par soustraction,

$x - 5 = 2$ d'autre part lui donne $x = 5 + 2$, procédé par addition,

et $x - 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ donc $x = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$, pro-

céde par addition.

Comme il le fait géométriquement, on pourrait donc transformer algébriquement nos équations pour obtenir l'égalité de deux carrés.

1) **L'équation $x^2 = 8x + 20$** (*c'est leur première résolution par factorisation, guidée au tableau par le professeur*)

On ajoute $-8x$ aux deux membres de l'équation $x^2 - 8x = 20$

AK nous dit : identification du coefficient de x , dont on prend la moitié $8 : 2 = 4$

Je fais remarquer que c'est le début de $x^2 - 2 \times 4x + \dots^2$, développement de $(x - \dots)^2$, comme on l'a déjà vu dans des exercices à trous, compléter des égalités.

AK : le calcul du carré de cette moitié $4^2 = 16$

Il faut ajouter à nouveau un même nombre aux deux membres : $x^2 - 2 \times 4x + \dots = 20 + \dots$

AK : le calcul d'un nouveau nombre entier, qui

 LE PROBLEME
 DES 5 CARRES

est un carré.

on obtient $x^2 - 8x + 16 = 20 + 16$

en reconnaissant le développement de $(x - 4)^2$

on va chercher à obtenir les carrés que signale Al Khwarizmi : $(x - \dots)^2 = \dots$ qui est complété ainsi : $(x - 4)^2 = 36$

AK : le calcul de sa racine carrée

$$(x - \dots)^2 = \dots^2, \quad (x - 4)^2 = 6^2$$

le calcul de x par addition de cette racine carrée avec la moitié trouvée au début.

Une étude particulière est faite pour résoudre cette équation sous la forme $y^2 = 36$, en cherchant les nombres dont le carré est 36, c'est-à-dire 6 et son opposé -6. Alors $y = 6$ ou $y = -6$.

Si les élèves trouvent facilement le premier, il faut pousser à penser au second, ce qui est nouveau pour eux par rapport au programme de quatrième et à la rencontre de cette équation lors de l'étude du théorème de Pythagore. On trouve $x - 4 = 6$ ou $x - 4 = -6$

Je laisse finir en appliquant les méthodes de 4ème: Les élèves retrouvent ainsi les deux solutions de l'équation à savoir 10 (11 ; 12 ; 13 ; 14) et -2 (-1 ; 0 ; 1 ; 2), la première correspondant seule à une solution pour nos cinq longueurs.

On rencontre au passage $y^2 = 36$, une quatrième et nouvelle équation parmi ses six équations canoniques d'Al Khwarizmi - « Chapitre II : Des carrés égaux à des nombres », dont il ne donne qu'une solution.

Je leur fais remarquer que notre méthode est numériquement plus complète, puisqu'on exprime les deux solutions mathématiques du problème.

2) L'équation $x^2 + 28 = 16x$.

On procède ensemble de la même manière :

$$x^2 - 16x + \dots + 28 = \dots$$

Il faut identifier le début du développement de $(x - 8)^2$, on obtient :

$$x^2 - 16x + 64 + 28 = 64$$

$$(x - \dots)^2 = \dots - 28$$

$$(x - 8)^2 = 64 - 28$$

$$(x - \dots)^2 = \dots$$

$$(x - 8)^2 = 36$$

$$(x - \dots)^2 = \dots^2$$

$$(x - 8)^2 = 6^2$$

Je laisse finir comme pour l'équation précédente en vérifiant avec les élèves le passage par $x - 8 = 6$ ou $x - 8 = -6$, qui nous donne $x = 6 + 8$ ou $x = -6 + 8$, soient les deux solutions 14 et 2.

On retrouve cette fois les deux solutions données par Al Khwarizmi, l'une par addition, l'autre par soustraction.

3) L'équation $x^2 = 12x$

Les élèves sont invités à chercher des solutions évidentes par vérification, par exemple en choisissant la forme :

$$x \times x = 12 \times x \text{ (voir annexe A6),}$$

transmis aux autres pour ceux qui ne voient pas 12 comme solution évidente. Je leur fais aussi étudier la forme, en les incitant à la factoriser comme on a pu le voir dans les précédentes.

$$x^2 - 12x = 0$$

je guide la factorisation en leur demandant de se rappeler la méthode vue en 4ème.

$$x(x - 12) = 0$$

j'introduis naturellement la règle « $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$ », donc, ici, $x = 0$ ou $x - 12 = 0$ (résolution exigible en 3ème). Je

laisse les élèves terminer et conclure. *On retrouve les deux solutions attendues alors qu'Al Khwarizmi, dans « Chapitre I : Des carrés égaux à des racines », n'en donne que la solution positive.*

4) En exercice à la maison je demande aux élèves de résoudre les équations $x^2 = 10x + 11$ et $x^2 + 13 = 14x$.

Commentaire et bilan

Avec cette activité, les identités remarquables sont mises en action de résolution de problème, notamment des équations. Les élèves ont découvert qu'on pouvait varier le choix de l'inconnue, alors que dans beaucoup de problèmes donnés en troisième, cette dernière est souvent imposée.

Cette activité est dans l'esprit du programme même si elle semble le dépasser.

L'objectif initial (celui que j'avais dans les années précédentes) se limitait à faire pratiquer répétitivement les développements $(x + b)^2$ et $(x - b)^2$ pour dégager les modèles développés $x^2 + 2b + b^2$ et $x^2 - 2b + b^2$ (au programme de troisième) comme plus courts à écrire.

Il a été largement dépassé jusqu'à la factorisation pour la résolution des équations et la mise en avant de deux nouvelles méthodes de résolution d'équations : les équations par égalité de carrés ($x^2 = a$) et l'équation-produit ($x.y = 0$), toutes les deux au programme.

En un seul problème, on aborde tout le programme de troisième sur le calcul littéral et les équations, mais, au passage, on donne à la factorisation sa raison d'être, alors que

c'est la partie la plus difficile d'accès aux élèves.

Ce qui me paraît important a posteriori dans l'organisation des trois étapes, c'est que tout devient entièrement auto-contrôlé par la connaissance des solutions trouvées au tableur. Les méthodes découvertes par les élèves marchent et sont donc validées par l'arrivée sur les valeurs déjà trouvées. De plus l'intuition (étape 1) qu'il y a deux solutions est justifiée par la résolution effective des équations. On en a donc la preuve.

Ce problème est riche car il donne cinq façons de le mettre en équation et débouche sur deux méthodes principales de résolutions des équations.

Les circonstances et coïncidences m'ont mis en présence de documents inspirateurs. Il y en aurait d'autres à retrouver et à joindre.

C'est la première fois que je rencontre un sujet aussi fédérateur de directions possibles pour l'enseignement : usage du tableur, introduction d'éléments d'histoire des mathématiques, donner un peu plus de sens aux méthodes étudiées.

J'ai essayé de montrer sur la dernière étape, en quoi la factorisation n'était pas exprimée dans les propositions d'Al Khwarizmi, alors que les éléments pour la mettre en place en sont donnés, et comment la méthode de factorisation permettait de résoudre effectivement le problème.

Certes, on pourrait objecter la longueur. J'atteste que les élèves ont mené réellement leurs recherches : cette pratique permet de faire émerger les nombreuses erreurs techniques qu'on retrouverait dans des exercices

classiques et de donner une raison pour reprendre ces tâches jusqu'à la réussite. La progression développement-formes à compléter-factorisation fonctionne bien. La partie historique surprend les élèves au premier abord, mais ils se prêtent assez volontiers au jeu, constatant par eux-mêmes que cela les mène vers la réponse.

Ont-ils été intéressés ? Tous les élèves ont cherché à appliquer la méthode d'Al Khwarizmi en disposant les calculs à leur manière, avec plus ou moins de facilité. Mais, ce faisant, ils ont bien compris les étapes de factorisation, les procédés mis en

pratique, notamment le fait de reconnaître dans une somme de trois termes la forme $a^2 - 2ax + b^2$ avant de l'écrire $(a - b)^2$. Lorsque le rôle de ces étapes est compris, les calculs qui viendront, seront pour beaucoup acceptés et mieux maîtrisés.

Cette nouvelle approche m'a permis de saisir l'importance d'introduire très tôt l'équation $(ax + b)^2 = c^2$ dans un contexte où elle sert vraiment, pour donner plus de sens à sa simplification exigible en troisième, $x^2 = c$. Je plaide donc pour lui donner sa place utile, avant l'équation-produit dont certaines formes en découlent immédiatement.

Bibliographie

- [1] DIOPHANTE Les Arithmétiques Livres VI (6.20) et VII (7.17)... (traduction et commentaires. R. Rashed), Ed Les Belles Lettres.
- [2] ROBERT de CHESTER Algèbre d'Al-Khwarizmi, traduit par Jean-Pierre LEVET, IREM de Poitiers, 1997
- [3] R.RASHED Entre Arithmétique et algèbre, Ed. Les Belles Lettres, 1984, p17-29
- [4] R. RASHED Histoire des Sciences Arabes Tome 2, Ed. SEUIL, 1997 p31-35

Listes des annexes (aussi téléchargeables sur le serveur

<http://irem.campus.univ-poitiers.fr/irem/ressourc/product/5carres/>)

- A1 Fiche « Activités de découverte »
- A2 *Feuille de calcul d'un groupe d'élèves réalisée sur le tableur, sur le serveur uniquement*
- A3 *Extraits de cahier d'élèves sur les développements, sur le serveur uniquement*
- A4 Fiche Textes de CHESTER-Al Khwarizmi extrait donné aux élèves (page 14 Chapitre VI : « Dansplus haut » et page 12-13 Chapitre V : « Voicichapitre »)
- A5 Extraits de cahier d'élève sur l'analyse des méthodes de A4
- A6 Extrait de cahier d'élève sur la résolution de $x^2 = 12x$ par substitution de valeur
- A7 Illustration avec Geoplanw2 des résolutions d'Al Khwarizmi et de ses démonstrations.

ANNEXE 1

Calcul littéral – 3ème
Introductions aux produits remarquables

Dans les activités suivantes, il s'agit de découvrir des méthodes de calcul appropriées aux situations. On cherchera surtout des stratégies plutôt que des résultats. On pourra aussi chercher s'il y a plusieurs méthodes et celle qui est la plus économique.

Travail par groupe : chacun cherche seul pendant 5 minutes puis expose aux autres ce qu'il a trouvé ou leur pose des questions ; le groupe doit pouvoir communiquer une réponse commune après 15 minutes pour chaque activité.

(Faire les activités dans l'ordre. Mettre au propre à la maison ensuite.)

Activité 1

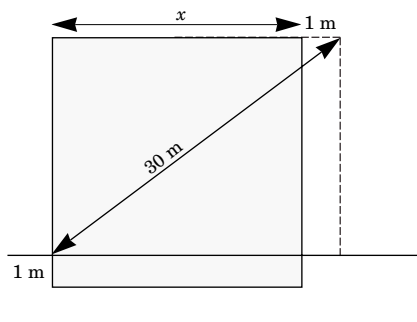
- a) L'écriture du nombre 10001 comporte deux chiffres différents 1 et 0. Combien de chiffres différents faut-il pour écrire le carré de ce nombre ?
- b) Seul le chiffre 9 sert à écrire 999 999. Un élève pense qu'il faut deux chiffres différents pour écrire le carré de ce nombre, l'autre trois chiffres différents, un troisième élève prétend en avoir utilisé quatre. Lequel a raison ? Quels sont les chiffres nécessaires et leurs positions dans le carré ?

Activité 2

Voici la proposition faite par une commune au propriétaire d'un terrain de forme carrée (en gris).

« Comme vous le voyez sur le plan ci-contre, l'élargissement de la route nous oblige à diminuer un côté de votre terrain de 1 mètre ; en contrepartie la longueur de l'autre côté sera augmenté d'un mètre pris sur le terrain communal voisin. »

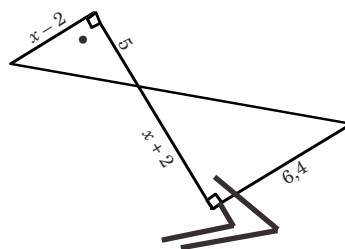
Le propriétaire possédera alors un terrain de forme rectangulaire dont la longueur de la diagonale sera 30 m.



Quelles sont les dimensions du nouveau terrain ? Le propriétaire y gagne-t-il ou non ?

Activité 3

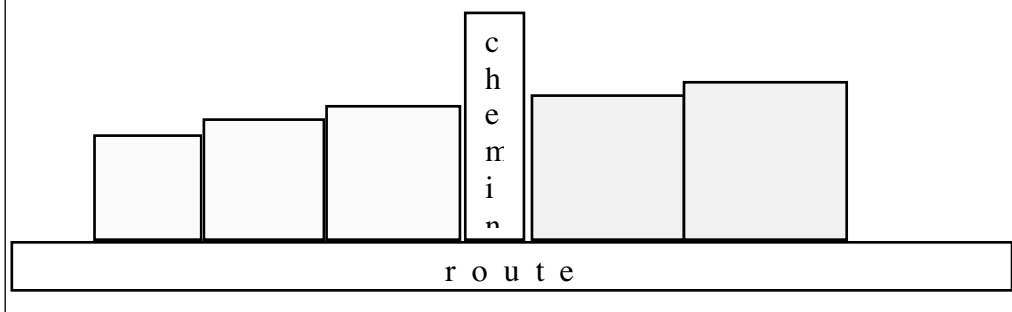
On cherche à calculer l'aire de cette « cocotte ». (on ne compte pas les pattes)



Activité 4

Cinq frères et sœurs ont hérités de cinq terrains carrés dont les mesures des côtés sont cinq entiers consécutifs.

Les terrains sont assemblés en deux groupes : les trois plus petits terrains d'un côté d'un chemin, et les deux plus grands terrains de l'autre côté... Ainsi les surfaces de part et d'autre du chemin sont équivalentes. Comment trouver les dimensions de chaque terrain ?

**ANNEXE 4**
Méthodes de recherche d'une solution d'une équation,
 écrites par **Al Khwarizmi (IXème siècle)**
Chapitre VI : Des racines et des nombres égaux à un carré.

Dans ce chapitre, on propose une équation du type suivant : 3 racines et, parmi les nombres, le nombre 4 équivalent à un carré.

Pour résoudre un tel problème, voici la règle qui est donnée : que l'on divise par 2 le nombre de

racines, on obtient $1\frac{1}{2}$; que l'on multiplie ensuite ce nombre par lui-même, cela fait $2\frac{1}{4}$.

A ce nombre ajoute 4, cela fait $6\frac{1}{4}$. Extrais alors la racine carrée de ce nombre, tu obtiens

$2\frac{1}{2}$. Ajoute cette racine à la moitié du nombre des racines, c'est-à-dire $1\frac{1}{2}$, tu arrives alors

à 4, qui correspond à une racine du carré. Ce carré donc, dans son ensemble, vaut 16.

Si l'on t'a proposé un nombre de carrés, quel qu'il soit, supérieur ou inférieur à 1, convertis l'équation de façon à faire apparaître un seul carré.

Des trois sortes d'équations dont nous avons fait mention en début de ce livre, les trois premières sont telles que le nombre des racines n'a pas, dans la recherche de la solution, à être divisé par 2, alors que dans les trois suivantes, c'est-à-dire dans les trois qui restent, le nombre des racines doit être divisé par 2, comme cela apparaît plus haut.

Chapitre V : Des carrés et des nombres qui équivalent à des racines.

Voici un exemple d'une égalité de cette nature : un carré et 21 unités équivalent à 10 racines.

Pour chercher à résoudre le problème que pose une telle équation, on donne la règle suivante : il faut dire quel est le carré qui, si on lui ajoute 21 unités, permet d'obtenir un total égal à dix fois la racine du carré lui-même. Aussi proposera-t-on d'élaborer une solution de ce problème de la manière suivante : on divise d'abord par 2 le nombre des racines, en l'occurrence on obtient 5, multiplié par lui-même ce nombre donne 25. De ce nombre, l'on retranche les 21 unités que nous avons mentionnées un peu plus haut avec les carrés. Il restera 4. De ce nombre, on extrait la racine carrée, soit 2, que l'on retranche de la moitié du nombre des racines, 54. Il reste alors 3, nombre qui représente une racine du carré. Dans son entier, celui-ci est donc bien évidemment 9. Si l'on veut, on peut ajouter le nombre 2, que l'on a précédemment soustrait du nombre des racines divisé par 2, à ce même nombre des racines divisé par 2, bien évidemment 5. On obtient alors 7, qui correspond à une racine du carré. Ce carré est au total, 49.

Lorsque n'importe quel exemple d'une équation du type évoqué dans ce chapitre t'est proposé, cherche à établir la solution par addition, tu en trouveras une, sans aucun doute, par une soustraction.

Ce chapitre seul fait appel à une addition et une soustraction. Dans les autres qui précèdent donc, tu ne trouveras pas cela du tout.

Il faut encore savoir que, lorsque l'on calcule la moitié du nombre des racines figurant dans les équations décrites dans ce chapitre, et que l'on multiplie ce nombre par lui-même, si ce qui est obtenu ou produit par cette multiplication est inférieur au nombre d'unités évoquées précédemment avec le carré, le problème est sans solution. D'autre part, si le nombre que l'on a obtenu est égal à celui des unités, il s'ensuit qu'une racine du carré est égale à la moitié du nombre des racines qui sont mentionnées avec le carré, sans qu'intervienne aucune addition ni soustraction.

Tout problème dans lequel est mentionné la présence de 2 carrés ou d'un nombre de carrés supérieurs ou, inférieurs à l'unité doit être converti en problème posant un carré, comme nous l'avons précédemment montré dans le premier chapitre.

Extraits de « ROBERT DE CHESTER – Algèbre d'Al Khwarizmi – Fascicule 1 p 12 à 14
Trad. Jean-Pierre LEVET - IREM de POITIERS - Sept 1997. »

ANNEXE 5

Résolution des équations par les méthodes d'Al Khwarizmi. Traduction des élèves

Sous la forme d'un petit organigramme linéaire :

$$\begin{array}{l}
 x^2 = 3x + 4 \\
 :2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \frac{1}{2} \end{array} \right. \\
 \times 1 \frac{1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ 2 \frac{1}{2} \end{array} \right. \\
 + 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ 6 \frac{1}{2} \end{array} \right. \\
 \downarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ 2 \frac{1}{2} \end{array} \right. \\
 + 1 \frac{1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ 4 \end{array} \right. \\
 x = 4^2 \\
 x = 16
 \end{array}$$

Ci-dessous, un autre élève résout les autres équations avec le même algorithme

VI

Case nombre de racine
Méthode AL Khwarizmi :

$$x^2 = 8x + 20$$

① - 400 = 8x + 20

$$\begin{array}{l}
 \downarrow :2 \\
 4 \\
 \downarrow \times 4 \\
 16 \\
 \downarrow +20 \\
 36 \\
 \downarrow \sqrt{} \\
 6 \xrightarrow{+4} \text{do.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x^2 = 3x + 4 \\
 \downarrow :2 \\
 1 \frac{1}{2} \\
 \downarrow \\
 2 \frac{1}{4} \\
 \downarrow +4 \\
 6 \frac{1}{4} \\
 \downarrow \sqrt{} \\
 2 \frac{1}{2} \xrightarrow{+1} 4
 \end{array}$$

(-1,5)² = 6,25

② - 16 = 3x + 4

III

$$x^2 + 28 = 10x$$

$$\begin{array}{l}
 \downarrow :2 \\
 8 \\
 \downarrow \times 8 \\
 64 \\
 \downarrow -28 \\
 36 \\
 \downarrow \sqrt{} \\
 6 \xrightarrow{8-6} 2
 \end{array}$$

8 + 6 = 14

$$x^2 + 24 = 10x$$

$$\begin{array}{l}
 \downarrow :2 \\
 5 \\
 \downarrow \times 5 \\
 25 \\
 \downarrow -24 \\
 1 \\
 \downarrow \sqrt{} \\
 1 \xrightarrow{5-1} 4
 \end{array}$$

5 + 1 = 6

Ici les élèves ont détaillé les calculs indiqués par Al Khwarizmi, avec leur notations personnelles.

$$3 : 2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{4}$$

$$2 + \frac{1}{4} + 4 = 6 + \frac{1}{4}$$

$$6 + \frac{1}{4} - \sqrt{6} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{2}$$

$$2 + 1 + 1 + \frac{1}{2}$$

x est le côté du carré, $4 = x$
donc 2 est le côté du carré
donc le côté du carré est 4
car $4^2 = 16$

$$x^2 = 3x + 4$$

$$\frac{3x}{2} = 1,5x = 1 \frac{1}{2} x$$

$$\left(1 \frac{1}{2}\right)^2 = 2 \frac{1}{4}$$

$$2 \frac{1}{4} + 4 = 6 \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{6 \frac{1}{4}} = 2,5 = 2 \frac{1}{2}$$

$$2 \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2} = 4$$

$$4^2 = 16$$

$$\text{donc } x^2 = 16.$$

$$x = 4$$

Un groupe d'élèves a repris les consignes données avant de les traduire. Voici leur production commune.

On divise par 2 le nombre des racines

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

on multiplie ce nombre par lui-même

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$1^2 + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{4}$$

$$= 2 + \frac{1}{4}$$

on lui ajoute 4

$$2 + 4 + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4}$$

on extrait la racine carré

$$\sqrt{6 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{1}{2}$$

on y ajoute la moitié du nombre de racines

$$2 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 4$$

4 vaut le côté du carré, donc $x = 4$

$$x^2 = 3x + 4$$

$$\frac{3}{2} = 4$$

$$4 \times 4 = 16$$

$$16 + 4 = 20$$

$$\sqrt{20} = 6$$

$$6 + 4 = 10$$

$$x = 10$$

ANNEXE 6

Résolution de l'équation n°3
Vers l'équation-produit.

$x^2 = 12x$
 $0x0 = 12*0$
 $12x12 = 12x12$
 $0 < 0 = 12x0$

Les nombres cherchés
 $-2 -1 0 1 2$
 $10 11 12 13 14$

$x^2 - 12x = 0$
 $x(x-12)$

alors $x = 0$ ou $x = 12$
 alors $x = 0$ ou $x = 12$

Le travail de l'élève est entouré.
 A droite, l'utilisation des valeurs trouvées pour x .
 Après la mise en commun, j'aiguille sur la factorisation et je fais trouver la règle : si $a.b =$
 alors $a=0$ ou $b=0$.

ANNEXE 7

Résolutions géométriques des équations
 $x^2 + q = px$ et $x^2 = px + q$

- **Une très brève histoire d'Al Khwarizmi** : [3] [4]

Il vivait à Bagdad au IX^e siècle, entre 813 et 830. Il a écrit le premier livre, *Kitab al jabr al muqabala*, enseignant une méthode concise de résolution d'équations, utilisant avec simplicité des techniques mathématiques. Il est reconnu comme le père de l'algèbre. Il n'a pas tout inventé, mais a amélioré considérablement les travaux effectués d'une autre manière par des mathématiciens grecs Euclide (-300) et Diophante (+200). [1]

Ses travaux ainsi que ceux de ses successeurs arabes sont parvenus en Europe via l'Espagne (Andalousie) où ils sont traduits en latin. L'un des traducteurs est Robert de CHESTER vers 1200. On trouve les traductions conservées en Allemagne. [2]

- **Vocabulaire** :

al jabr-algèbre-compléter les manques, c'est-à-dire ajouter aux deux membres ce qui est soustrait dans l'un, et *muqabala*-réduction des termes.

- **Explication géométriques des procédés d'Al Khwarizmi** :

On ouvrira les fichiers AK5.g2w et AK6.g2w

Les méthodes de résolutions sont des algorithmes de calculs. Les justifications qu'il apporte, véritables démonstrations, sont encore basées sur des méthodes géométriques, comme pour Euclide, mais elles deviennent générales.

Fichier AK5.g2w

$$x^2 + 21 = 10x$$

$x^2 \rightarrow$ carré AHB'F
 $21 \rightarrow$ rectangle BDGF
 $10x \rightarrow$ rectangle AHDG

Al Khwarizmi construit T milieu de [AG]
 $AT = TG = 10/2 = 5$, ce qui représente la moitié du nombre de racines. Puis le carré TCLG qui a pour aire $5^2 = 25$
Il distingue deux cas.

Cas où x est plus petit que 5.

Il justifie : $BE = EC = CM$ et $TE = ML$
 Donc 21 représente l'aire du rectangle FBDG, et celle du polygone EB'MLGT.
 Dans le carré TCLG, il reste alors le carré ECMB'.
 BE représente $5 - x$. Le carré a pour aire $(5 - x)^2$. Le carré de côté EC a pour aire : $25 - 21 = 4$.
 Donc $5 - x = 2$, d'où $x = 3$.

Cas où x est plus grand que 5

L'autre solution 7 est obtenue par la configuration suivante : TCLG est un carré de côté 5, d'aire 25. Le rectangle TCSF se déduit du rectangle CEDL. Le rectangle BDGF ayant pour aire 21. Le carré CSB_2S_2 a pour aire 4. Donc $EB = 2$, ici c'est $x - 5 = 2$.
 Ainsi $x = 5 + 2$, $x = 7$.
 En fait il distingue bien deux situations différentes, ceci provenant du fait qu'il ne peut pas encore résoudre par des écritures algébriques complètes (il faudra attendre Viète, Descartes pour les écritures nouvelles, et surtout l'usage des nombres négatifs pour résoudre l'équation avec deux solutions...).

Procéder de même avec AK6.g2w, $x^2 = 3x + 4$. AK ne donne qu'une solution, positive, l'autre étant négative, donc non représentable par les aires.