L'ENSEIGNEMENT DU CALCUL AUJOURD'HUI : PROBLEMES, DEFIS ET PERSPECTIVES

Michèle ARTIGUE, Irem de Paris 7

Résumé : *L'évolution des conceptions de l'apprentissage et, plus encore, l'évolution technologique ont, dans les dernières décennies, profondément déstabilisé l'enseignement du « calcul ». Quels sont les enjeux de cet enseignement aujourd'hui ? Quels défis pose leur réalisation ? Quelles voies s'offrent pour y faire face ? C'est autour de ces questions qu'est organisé le texte qui suit. Il s'appuie sur la réflexion sur ce thème du calcul qui a été menée au sein de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (CREM) présidée par Jean Pierre Kahane. Après avoir souligné différents facteurs qui contribuent à la déstabilisation actuelle de l'enseignement du calcul : les effets de l'évolution technologique, le rapport dominant au calcul dans l'enseignement, la vision des rapports entre technique et conceptuel dans l'apprentissage, nous y développons plus particulièrement la réflexion sur deux questions : les rapports entre calcul et raisonnement, les rapports entre calcul exact et calcul approché.*

I. Introduction

Quand on pense au calcul aujourd'hui, on ne peut manquer d'être frappé par les visions contrastées que ce terme suscite, suivant les points de vue adoptés, les positions occupées.

Si l'on se place d'un point de vue scientifique, ce qui attire d'abord l'attention c'est le rôle essentiel du calcul dans l'activité mathématique, dans les relations entre mathématiques et autres disciplines, entre mathématiques et société, la richesse du monde mathématique du calcul et sa vitalité scientifique, nourrie notamment par l'évolution technologique. Le rapport de la CREM sur le calcul insiste, dans sa première partie, tout particulièrement sur ce point.

Si l'on se place d'un point de vue culturel et social, force est aussi de constater que, dans un monde où le numérique, sous toutes ses formes, prend une place croissante, le développement de compétences dans ce domaine est de plus en plus reconnu comme incontournable. Ce n'est pas un hasard si le terme de « numeracy », qui n'a pas encore d'équivalent en français, a été introduit dans les pays anglo-saxons et si, de plus en plus, les discours tenus sur l'éducation insistent sur le fait que l'enseignement doit aujourd'hui assurer à tous des compétences solides tout autant dans le domaine du nombre et du calcul que dans celui de la langue, qu'il doit « fabriquer » des citoyens à la fois « literate and numerate ».

Un ouvrage comme le livre publié aux USA sous la responsabilité de Lynn Steen [1], illustre clairement cette position, tout en montrant la diversité des compétences que recouvre aujourd'hui le terme « numeracy », des compétences qui vont bien au-delà du traditionnel « savoir compter ». Ce même ouvrage souligne, à juste titre, la position particulière de l'enseignement des mathématiques dans ce domaine : il ne saurait prétendre, à lui seul, suffire à développer les compétences requises par la culture numérique, il ne saurait non plus sans danger limiter ses ambitions, même dans la scolarité obligatoire, à l'entrée des élèves dans cette culture, mais il doit accepter d'y jouer un rôle privilégié et assumer ce rôle de façon efficace. Pour les différents contributeurs à cet ouvrage, ce n'est pas le cas actuellement.

Et pourtant, quand on enseigne les mathématiques aujourd'hui à l'école élémentaire, au collège ou au lycée, ce ne sont pas ces visions positives sur le calcul qui dominent, me semble-t-il, mais plutôt la vision d'un objet sans noblesse, profondément déstabilisé par l'évolution technologique, un objet sur lequel se cristallisent les débats et les oppositions, comme l'ont bien montré certaines pétitions et déclarations récentes concernant les nouveaux programmes de l'école élémentaire [2].

L'existence de ce contraste est sans aucun doute une des raisons qui ont conduit la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, présidée par Jean Pierre Kahane, à choisir ce thème comme un de ses thèmes de travail. Ce travail, j'ai eu l'honneur de le piloter et c'est la raison d'être de cet article. Il s'est nourri de la réflexion que nous avons développée au sein de la commission, mais je voudrais préciser que mon objectif ici n'est pas de présenter le travail de la commission. Chacun y a aujourd'hui aisément accès via différents sites internet et via le livre « L'enseignement des sciences mathématiques » publié aux éditions Odile Jacob [3]. Je souhaiterais plutôt ici m'interroger sur les contrastes constatés et leurs raisons, pointer les défis auxquels nous avons à faire face, et aussi montrer que les nombreux travaux déjà menés, notamment au sein des Irem, s'ils ne nous fournissent pas des solutions clefs en main pour affronter ces défis — je doute personnellement de l'existence de telles solutions — nous arment pour y faire face, de façon responsable, en prenant le recul nécessaire par rapport aux discours et injonctions diverses.

II. Déstabilisation et contrastes

Je commencerai donc par aborder la question des contrastes et de la déstabilisation croissante de l'enseignement du calcul. Il y a à cette déstabilisation sans aucun doute des raisons diverses mais trois d'entre elles me semblent particulièrement importantes : l'évolution technologique, le rapport dominant au calcul dans l'enseignement, la vision des rapports entre le technique et le conceptuel dans l'apprentissage. Ces raisons ne jouent pas de façon isolée, elles se renforcent mutuellement pour rendre de plus en plus problématique aujourd'hui l'enseignement du calcul, comme je vais essayer de le montrer dans ce qui suit.

II.1 *Les effets de l'évolution technologique*

Ces effets sont évidents. Les technologies informatiques ont profondément modifié les pratiques tant scientifiques que professionnelles et sociales en matière de calcul. Force est de constater que l'exécution de la plupart des algorithmes dont l'apprentissage occupait un temps important de la scolarité, notamment dans la scolarité obligatoire, est aujourd'hui prise en charge par les calculatrices. Le problème s'est d'abord posé pour l'école élémentaire et les algorithmes numériques mais il se pose de plus en plus, de façon tout à fait analogue, au niveau secondaire, pour le calcul algébrique et l'analyse, avec l'implémentation de logiciels de calcul formel dans les calculatrices.

En revanche, ce même développement technologique met sur le devant de la scène des questions essentielles que l'enseignement du calcul n'a pas pour l'instant pris en charge, si ce n'est à des niveaux très avancés comme ceux de la représentation des données, de la complexité et de l'efficacité des algorithmes audelà de leur seule validité. Comment prendre en compte ces évolutions pour définir les enjeux de l'enseignement du calcul aujourd'hui, en particulier dans la scolarité obligatoire, pour ménager des progressions raisonnables et compatibles avec les contraintes lourdes qui pèsent sur l'enseignement, en particulier en termes d'horaires ? Il s'agit là d'une question essentielle et difficile à laquelle je n'ai pas la prétention d'avoir réponse. Je souhaiterais plus modestement, dans ce texte, aider à la poser mieux qu'elle n'est souvent posée.

II.2 *Le rapport dominant au calcul dans l'enseignement*

Indépendamment de toute question d'évolution technologique, le rapport au calcul dans l'enseignement est profondément insatisfaisant et ce, sur plusieurs plans. Le premier est sans aucun doute celui des rapports entre calcul et raisonnement. Comme souligné dans le rapport de la CREM :

> « Dans la culture, les deux termes : calcul mathématique et raisonnement apparaissent comme antagonistes. Le calcul est opposé au raisonnement tant dans les démarches de pensée qu'il met en œuvre que dans les formes d'apprentissage qu'il requiert. Il renvoie à une activité mécanique, automatisable, sans intelligence, il est réduit à sa part mécanisée. Son apprentissage renvoie à l'idée d'entraînement purement répétitif. ».

Il est perçu comme renvoyant aux basses œuvres du travail mathématique, tandis que la partie noble, celle du raisonnement, est associée à la résolution de problèmes géométriques. Cette vision culturelle n'est pas le fruit du hasard. Elle reflète les pratiques profondes de l'enseignement et la difficulté que nous avons à nouer des rapports adéquats entre calcul et raisonnement. Et le fait que l'entrée dans la rationalité mathématique, en

France, contrairement à ce qui se passe dans d'autres pays, soit toujours pensée et organisée à travers la géométrie synthétique, exclusivement ou presque, ne favorise pas l'évolution des points de vue.

Le second est celui des rapports entre calcul exact et calcul approché. Le calcul approché est vu comme un calcul par défaut, celui auquel on se résout quand le calcul exact s'avère impossible. La réalité scientifique et sociale est bien plus complexe, comme nous avons essayé de le montrer dans le rapport de la CREM. Dans la résolution de nombreux problèmes où sont engagées les mathématiques aujourd'hui, la recherche de solutions exactes n'est ni pertinente, ni utile. Et, même quand le calcul exact est visé et possible, ses résultats ne sont pas nécessairement exploitables sans interaction avec du calcul approché. Calcul exact et calcul approché sont en fait deux facettes complémentaires du calcul. Si l'on quitte le champ des mathématiques pour celui de la biologie et des sciences cognitives, il n'est pas non plus inintéressant de souligner que l'homme est génétiquement doté d'une sorte de calcul approché, alors qu'il ne l'est pas pour le calcul exact au-delà de la reconnaissance directe des très petits nombres [4].

Comment construire des rapports adéquats entre calcul et raisonnement ? Comment faire vivre de façon satisfaisante la complémentarité entre calcul exact et calcul approché ? Ce sont des défis que doit impérativement relever l'enseignement du calcul ?

II.3 *La vision des rapports entre technique et conceptuel dans l'apprentissage*

Le point que nous abordons maintenant n'est sans doute pas indépendant de la difficulté déjà soulignée à construire des rapports adéquats entre calcul et raisonnement, mais il est loin de s'y réduire. Il renvoie plus globalement aux théories de l'apprentissage sur lesquelles s'appuie l'enseignement des mathématiques.

Depuis une vingtaine d'années, les approches qualifiées de constructivistes ou socioconstructivistes constituent les paradigmes dominants [5]. Elles ont permis de contrer une vision purement transmissive de l'apprentissage, de mettre l'accent sur les processus d'adaptation individuels et sociaux en jeu dans l'apprentissage, sur la façon dont les connaissances antérieures des élèves, les interactions avec le savoir permises par les tâches qui leur sont proposées et la façon dont elles sont gérées, façonnent leurs constructions cognitives en mathématiques. Elles ont aussi permis de montrer les limites de pratiques enseignantes trop centrées sur l'apprentissage de techniques, ce que les anglo-saxons appellent « skill learning ».

Initialement théories de l'apprentissage, elles se sont transposées en théories de l'enseignement, sans qu'une claire mesure ne soit prise de ce qui sépare nécessairement ces deux types de constructions théoriques, sans éviter les simplifications abusives. Pour promouvoir le travail conceptuel en mathématiques, on a souvent péjoré le travail technique qui occupait un espace jugé démesuré, en oubliant leurs rapports dialectiques. La perception du calcul, de son rôle dans les apprentissages, l'attention à lui accorder dans l'enseignement s'en sont trouvées durablement affectées. Le développement de compétences de calcul a eu tendance à apparaître comme une question secondaire, une question d'intendance, comme si, parodiant Boileau, l'on pouvait affirmer que « ce qui se conçoit bien, se calcule aisément ».

La valeur épistémique des gestes du calcul, c'est à dire le fait que ces gestes jouent un rôle essentiel dans la compréhension des objets qu'ils engagent, s'en est trouvée occultée.

Il n'est pas étonnant, dans ces conditions, que le calcul soit aujourd'hui un objet fortement déstabilisé, de l'école élémentaire aux débuts de l'enseignement supérieur. Mais cette déstabilisation est aussi peut-être une chance car elle nous oblige à nous interroger sur cette dimension essentielle de l'activité mathématique, sur ce que peuvent être aujourd'hui les enjeux d'un enseignement du calcul, en particulier dans la scolarité obligatoire, sur les stratégies à développer pour répondre à ces enjeux. Elle nous oblige aussi à ne rien considérer comme allant de soi.

Ceci n'est certainement pas aisé mais, me semble-t-il, la situation est moins désespérée que certains ne voudraient nous le faire croire. L'enseignement du calcul n'est pas enfermé dans une spirale infernale dont rien ne pourrait le sortir. Les besoins sociaux comme scientifiques du calcul aujourd'hui ne sont pas les mêmes qu'hier. Ils se sont notamment déplacés de capacités d'exécution à des capacités d'anticipation, de contrôle et d'adaptation. C'est sans doute une opportunité pour construire dans l'enseignement des rapports plus adéquats entre calcul et raisonnement, pour rendre à nouveau visible le fait que tout calcul, dès qu'il n'est pas complètement routinier, est une subtile alchimie de parties routinières et de raisonnements.

Pendant les vingt dernières années, d'autre part, les technologies disponibles pour assister le calcul dans l'enseignement secondaire ont été essentiellement des technologies de calcul approché, ceci confortant la rupture entre le monde du calcul exact et celui du calcul approché. Aujourd'hui le calcul exact devient accessible sur des calculatrices. N'est-ce pas aussi une opportunité pour construire des rapports plus adéquats entre ces deux types de calcul ? Bien sûr, on le sent bien, saisir ces opportunités c'est aussi arriver à construire des rapports adéquats aux outils qui sont ceux du calcul aujourd'hui, qu'il s'agisse des calculatrices, des tableurs, des logiciels de calcul symbolique. C'est penser comment ces outils peuvent accompagner l'apprentissage du calcul et des mathématiques, devenir pour les élèves de réels instruments mathématiques, en évitant les positions caricaturales. L'intervention de ces outils déplace les besoins de connaissances en matière de calcul mais, comme le montrent toutes les études sérieuses, elle ne les réduit pas [6]. Les outils de calcul n'empêchent pas d'apprendre à calculer mais il faut pour cela que leur intégration à l'enseignement ne se résume pas à une simple mise à disposition permanente.

Comme on le sent bien, installer des équilibres plus satisfaisants nécessite de la durée et une cohérence tout au long des apprentissages, de l'école élémentaire à l'université. C'est parce que nous étions sensibles à ce problème que, dans la CREM, face à cet objet omniprésent et multiforme, nous avons essayé de choisir quelques lignes directrices : les liens entre calcul et raisonnement, les rapports entre calcul exact et approché, les rapports entre le calcul et les outils de calcul, qui traversaient la scolarité. Dans ce qui suit, je voudrais poursuivre la réflexion sur les deux premiers, en m'appuyant sur quelques exemples.

III. Calcul et raisonnement

Calcul et raisonnement peuvent aller de pair dès le début de l'école élémentaire. On sent bien que c'est une ambition des nouveaux programmes de l'école élémentaire. Elle se traduit par l'importance accordée au calcul dit « réfléchi », un type de calcul qui a de multiples facettes : calcul exact utilisant les propriétés des nombres et des opérations, calcul approché à la louche comme celui que nous faisons pour évaluer en francs des prix donnés en euros ou l'inverse, calcul servant à contrôler le calcul instrumenté auquel nous avons recours dès que nous sortons des opérations les plus élémentaires.

Le raisonnement est aussi à l'œuvre dès que le problème à résoudre nécessite la construction d'une stratégie de calcul et nous pouvons voir là les premier pas vers une pensée algorithmique. Le raisonnement enfin est à l'œuvre dans les situations de recherche sur les nombres que l'on peut proposer dès ce niveau. L'ouvrage publié en 1999 par le groupe élémentaire de l'INRP sous le titre : « Vrai ? Faux ? On en débat… » [7], résultat de plusieurs années d'expériences, l'illustre particulièrement bien. Dans ce livre, mon exemple préféré est celui du plus grand produit car le problème proposé aux élèves présente toutes les caractéristiques qu'il me semble possible d'attendre d'un tel objet.

III.1. *Le plus grand produit*

Le problème est le suivant :

> Chercher, parmi les décompositions additives d'un nombre entier en nombres entiers, celle ou celles qui correspondent au plus grand produit.

Même si le nombre n'est pas très grand, la combinatoire des essais possibles est rapidement grande : pour 10 par exemple, il y en a 11 si l'on exclut les décompositions comportant des 0 et des 1, rapidement éliminées par les élèves, et pour 14, il y en a déjà 30. La recherche nécessite donc organisation et réflexion.

Si l'on se restreint aux décompositions à deux termes, le produit est maximum lorsque ces deux termes sont égaux dans le cas pair et diffèrent d'une unité dans le cas impair. Géométriquement, on retrouve la propriété du carré d'être le rectangle d'aire maximum pour un périmètre donné. Mais très vite, on s'aperçoit que les décompositions à deux termes ne sont pas optimales dès que le nombre proposé est supérieur ou égal à 8. L'idée de rechercher le maximum du produit à travers des décompositions équilibrées n'est cependant pas une idée sans avenir. En effet, on peut montrer que les décompositions optimales sont celles qui maximisent le nombre de 3 et ne comportent pas de 1. D'où le résultat :

- Pour $n = 3k$, la décomposition optimale est celle comportant k termes égaux à 3,
- Pour $n = 3k + 1$ et $k > 1$, il y a deux décompositions optimales : celle correspondant à $(k - 1)$ termes 3 et un terme 4 et celle comportant $(k - 1)$ termes 3 et deux termes 2,
- Pour $n = 3k + 2$, il y a une seule décomposition optimale : celle comportant k termes 3 et un terme 2.

Ce qui est intéressant dans ce problème, c'est que, même avec un bagage mathématique élémentaire, cette solution générale non triviale mais facile à exprimer en langage ordinaire, peut émerger de la mise à l'épreuve des conjectures diverses émises par les élèves à partir de décompositions obtenues pour quelques nombres, de stratégies et généralisations issues d'améliorations locales des calculs. Ainsi, la conjecture du partage en deux, peut être mise en défaut sur la composition $10 = 5 + 5$ via la confrontation avec la décomposition : $10 = 5 + 3 + 2$, mais le repérage de l'inégalité : $5 < 3 \times 2$ peut servir ensuite à décomposer systématiquement les 5 dans les décompositions déjà trouvées pour d'autres nombres et à conjecturer qu'une décomposition optimale ne peut comporter de 5. Ceci se généralise à tout nombre supérieur à 5 puisqu'un tel nombre est toujours susceptible d'un partage en deux ne comportant pas de 1. Il reste alors pour aboutir à découvrir que tout développement optimal comporte au plus un 4 puisque $4 \times 4 < 3 \times 3 \times 2$ et au plus deux 2 puisque $2 \times 2 \times 2 < 3 \times 3$.

Les preuves correspondantes sont elles aussi accessibles avec un bagage modeste. Beaucoup s'appuient sur des inégalités spécifiques. Quant à la preuve du fait qu'une décomposition optimale ne peut comporter un nombre supérieur ou égal à 5, elle peut être obtenue, par exemple en comparant les découpages $(n-2) \times 2$ et n, soit par un calcul littéral simple (si l'on est au collège), soit par une visualisation géométrique de ce calcul, comme la suivante [1] :

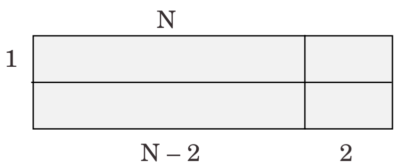

Figure 1 : Comparaison du produit $1 \times N$ et du produit $(N-2) \times 2$

1 Soulignons cependant que le calcul géométrique qui est en jeu ici n'est pas aussi facilement accessible aux élèves qu'il pourrait le sembler à première vue. Il suppose en effet que la longueur associée à N soit détachée de sa mesure effective par rapport à l'unité choisie et ici matérialisée, et considérée dans le raisonnement comme une longueur quelconque.

Les travaux du groupe se situent au niveau de l'école élémentaire mais on voit bien que l'intérêt d'une telle situation dépasse le seul cadre de l'école élémentaire.

La recherche de régularités dans des situations numériques, ce que les anglo-saxons appellent la recherche de « patterns » est aussi une mine de problèmes permettant de lier calcul et raisonnement. Dans de nombreux pays d'ailleurs aujourd'hui, c'est par l'intermédiaire de telles situations que s'amorce très tôt l'entrée dans le symbolisme algébrique, comme le montrent bien les travaux de l'étude en cours de la Commission internationale de l'enseignement mathématique (ICMI) sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre [8]. Il s'agit de trouver un moyen de calcul valable pour toutes les configurations d'une même famille, quelle que soit leur taille. Les situations sont choisies pour permettre l'apparition de plusieurs algorithmes qui, en général, peuvent être validés par rapport au contexte (on a tout compté sans oubli et sans redondances) et qui sont ensuite exprimés de façon symbolique.

L'intervention de cette symbolisation permet aussi en général de générer de nouveaux problèmes et de les résoudre, en travaillant sur les formules obtenues et d'apprendre ainsi progressivement à gérer un calcul algébrique détaché du contexte, en s'appuyant aussi sur d'autres registres de représentation : tableaux, graphiques, et en les faisant interagir avec le registre de la langue naturelle et le registre symbolique.

J'en donnerai un seul exemple qui, même s'il n'était pas vraiment exploité ainsi, figure dans une ancienne brochure de l'Irem de Poitiers et a été repris dans un ouvrage de l'INRP sur les débuts de l'algèbre au collège [9].

Je l'ai retrouvé présenté comme paradigme de situation d'entrée dans l'algèbre lors d'un voyage en Australie, l'an passé.

III.2. *La situation de la bordure*

La situation est la suivante :

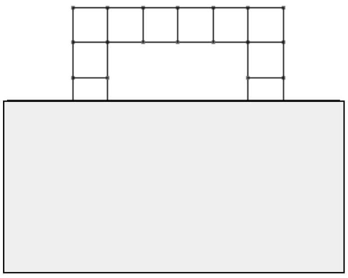

Figure 2 : La situation de la bordure

On borde un carré de côté donné par des carrés de côté unité comme dans le dessin ci-dessus réalisé avec un carré de côté 4. Combien y-a-t-il de carreaux dans la bordure ?

Quand une situation de ce type est utilisée pour entrer dans le champ de l'algèbre, le problème n'est bien sûr pas posé d'emblée dans le cas général. Des nombres sont donnés pour la valeur du côté du carré : petits d'abord permettant un dessin exhaustif et un comptage sur ce dessin. Ceci permet d'assurer la dévolution de la tâche aux élèves. Puis un saut est brutalement opéré dans la taille du côté pour disqualifier ce mode de résolution et orienter vers la recherche d'un algorithme de dénombrement valable dans tous les cas, pouvant s'appuyer sur des représentations qui prennent alors le statut de schémas. La situation est très simple mais elle génère pourtant sans difficulté, comme le montrent les expérimentations, plusieurs algorithmes que l'on peut chercher ensuite à exprimer par des formules, n étant la longueur du côté, par exemple les suivantes :

- $n + n + n + n + 4$, $4n + 4$ (on compte les carrés pour les quatre côtés du carré initial et on rajoute les quatre coins),
- $4(n + 2) – 4$ (on compte les carrés pour les quatre côtés du carré bordure et on soustrait les quatre coins que l'on a comptés deux fois),
- $4(n + 1)$ (on compte les carrés par côté en prenant chaque fois un seul coin),
- $2(n + 2) + 2n$ (on compte les carrés de deux grands côtés opposés et on rajoute ce qui manque),
- et même : $(n + 2)^2 – n^2$, si l'on passe par les aires.

Comme nous l'avons précisé plus haut, la validation des algorithmes, d'abord exprimés souvent en langue naturelle, se fait en s'assurant que l'on a tout compté et une seule fois. La validation des formules peut se faire aussi à ce niveau, en s'assurant qu'elles rendent bien compte d'un algorithme valide. Elle peut se faire aussi de façon plus syntaxique, en montrant que l'on peut passer d'une expression à une expression déjà reconnue comme correcte par des transformations d'écriture exploitant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Le rejet d'une formule peut, lui, s'effectuer aussi en exhibant une valeur du côté qui, par substitution, ne conduit pas à un résultat correct [2].

2 S'agissant d'expressions du premier degré, il suffit d'ailleurs qu'elles prennent la même valeur pour deux entiers distincts pour être égales, donc deux exemples suffisent théoriquement à prouver la validité mais ce n'est pas une connaissance sur laquelle les élèves peuvent s'appuyer quand on propose, dans cet esprit, une telle situation.

Soulignons que ces formules, une fois établies, peuvent à leur tour être investies dans des calculs et raisonnements, suscités par des questions comme les suivantes :

- Si l'on double le côté du carré, double-t-on le nombre de carrés de la bordure ? Toujours ? Dans certains cas et, si oui, lesquels ? Jamais ?
- Peut-on obtenir des bordures de 100, 150, 200, 250 carreaux ?
- Comment savoir tout de suite, si on donne un nombre de carreaux, s'il correspond au nombre exact de carreaux d'une bordure ?

Cette algèbre là n'est pas celle des équations et des inconnues associée pour nous à l'entrée dans l'algèbre mais celle des formules et des variables. Dans notre culture d'enseignement, elle est peu présente, excepté dans les enseignements professionnels. C'est sans doute un tort car elle porte une valeur épistémique essentielle de l'algèbre : sa valeur de généralisation. De plus, comme semblent le montrer différents travaux de recherche rapportés dans l'étude ICMI déjà citée, elle semble permettre une entrée plus facile vers le symbolisme algébrique, pour une raison toute simple : la pensée y procède dans le même sens que dans la pensée arithmétique, ce qui n'est pas du tout le cas quand on passe de la pensée arithmétique à la pensée analytique en jeu dans la mise en équations de problèmes.

Soulignons de plus qu'instrumentée par le tableur, un outil qui offre un monde intermédiaire entre l'arithmétique et l'algèbre [10], [11], cette algèbre des formules est aujourd'hui utilisée dans un certain nombre de formations pour réconcilier les adultes avec une algèbre qui a marqué souvent pour eux la fin de la compréhension en mathématiques (cf. [12] par exemple).

Il serait cependant temps maintenant d'avancer dans la scolarité. A partir d'un certain moment, le calcul algébrique devient un élément essentiel de l'articulation entre calcul et raisonnement et je voudrais pour l'illustrer prendre encore une fois un exemple simple, emprunté cette fois à l'Irem de Lyon mais un peu retravaillé pour les besoins de la circonstance. C'est celui connu sous le nom du quadrilatère qui tourne, publié dans une brochure inter-Irem pour la classe de seconde [13].

III.3 *Le quadrilatère qui tourne*

Le problème initial est le suivant :

> On considère un rectangle ABCD avec AB = 6 cm et BC = 9cm, M sur [A,B], N sur [B,C], O sur [C,D] et P sur [D,A] tels que AM = BN = CO = DP.
>
> Comment varie l'aire du quadrilatère MNOP lorsque M se déplace sur [A,B] ? Quelle est sa valeur minimale ? Quand l'obtient-on ?

Et il nous semble intéressant de le prolonger par la question suivante :

> Le résultat obtenu se généralise-t-il à un rectangle quelconque ?

Une exploration géométrique réalisée par exemple avec un logiciel de géométrie dynamique permet d'anticiper les variations et aussi de montrer aux élèves que les conjectures qu'ils ont tendance à faire sur le minimum (ils pensent d'abord qu'il correspond à une posi-

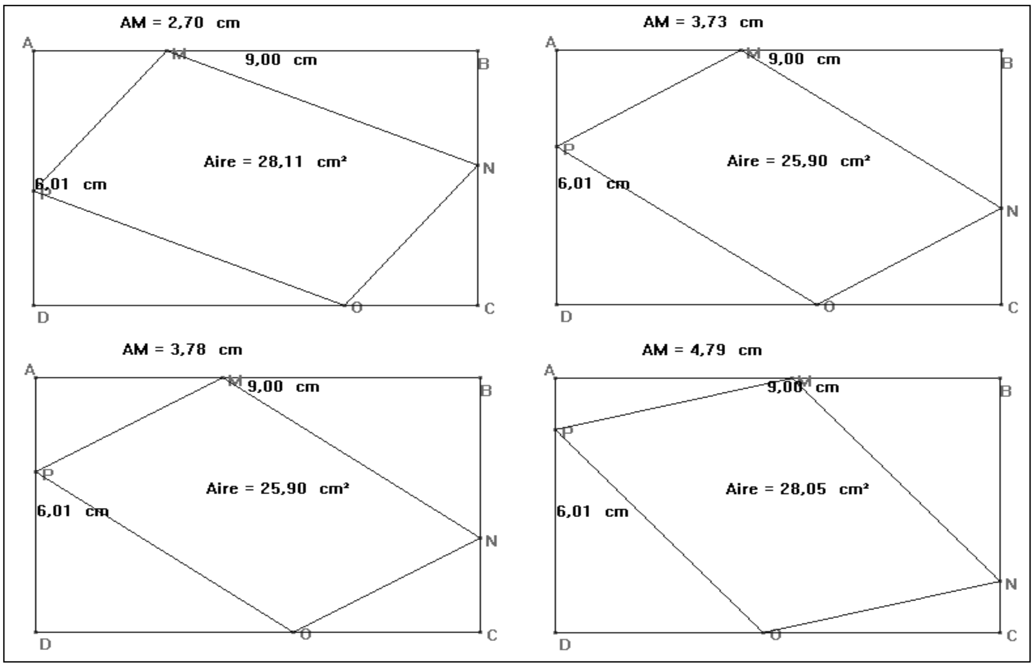

Figure 3 : L'évolution de l'aire visualisée avec le logiciel Cabri-géomètre.

tion remarquable, comme M au milieu de [A,B])) sont erronées. En revanche, la longueur de AM correspondant au minimum semble quand même reliée aux dimensions de la figure : elle semble en effet proche de 3,75 cm qui correspond au quart du périmètre.

L'algèbre permet de modéliser la situation, de l'explorer graphiquement via un tracé fonctionnel, ce qui confirme la conjecture issue de l'exploration géométrique.

Mais l'algèbre permet aussi de prouver cette conjecture. En effet, si on note x la longueur de AM, l'aire $A(x)$ qui se calcule aisément par différence (stratégie souvent peu naturelle aux élèves qui veulent utiliser une formule) est égale à : $2x^2 - 15x + 54$ .Prouver que le minimum est atteint pour 3,75 revient à prouver que $A(x) - A(3{,}75)$ est toujours positif. On ne s'étonnera donc pas de tomber sur une expression de la forme $k(x - 3{,}75)^2$ avec $k > 0$![3]

Des problèmes de variation comme celui-là, où l'on peut conjecturer la valeur exacte du ou des extrema cherchés nous semblent particulièrement intéressants à ce niveau d'enseignement où l'on ne dispose pas encore des outils de l'analyse pour l'étude des variations. Ils permettent de clore l'étude du

3 Il est frappant de voir qu'autant les enseignants pensent en termes de forme canonique (ce qui marche ici puisque l'expression est du second degré), autant la stratégie évoquée ci-dessus leur semble peu naturelle, les PLC2 en formation ont d'ailleurs souvent du mal à anticiper la forme nécessaire du résultat de ce calcul !

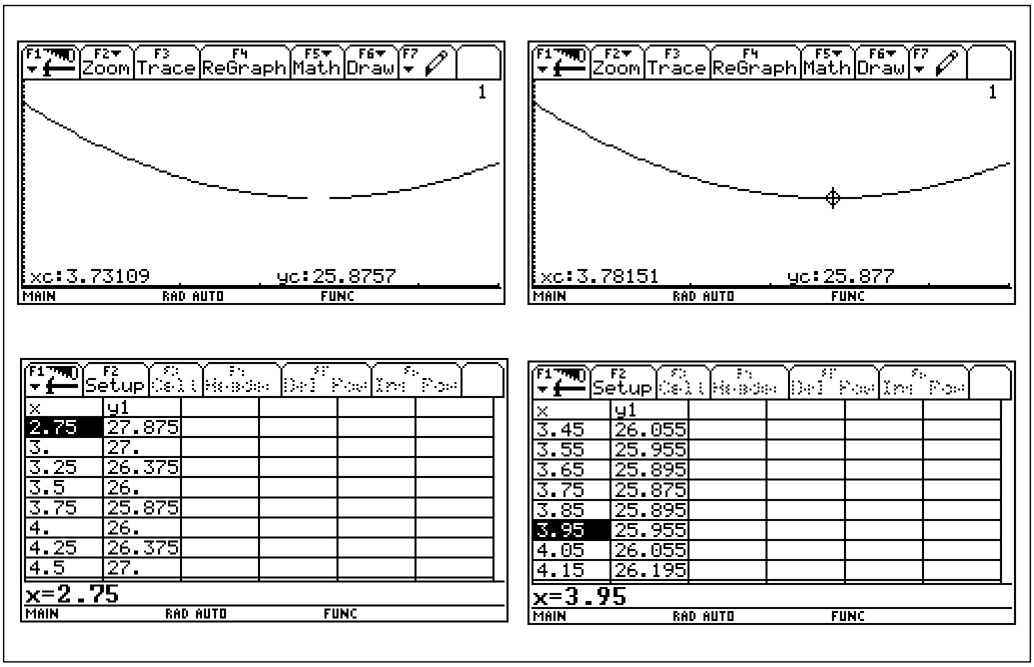

Figure 4 : Exploration de la situation avec une calculatrice TI92.

problème sur une véritable preuve, même si celle-ci est guidée par l'enseignant et éventuellement assistée par des instruments de calcul formel, comme cela a été le cas dans certaines expérimentations.

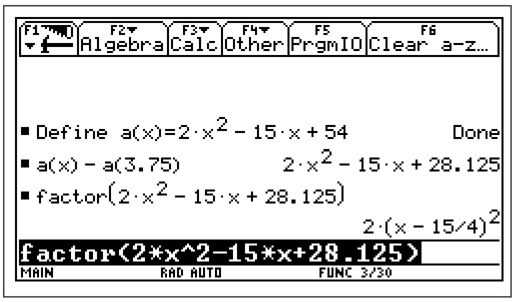

Figure 5 : Preuve algébrique assistée par une calculatrice symbolique

En introduisant des paramètres, on peut justifier, en adaptant le calcul, que le minimum cherché est bien atteint pour le quart du périmètre dans tous les cas (si bien sûr cette valeur est moindre que la largeur du rectangle). Mais on peut aussi obtenir ce résultat par un calcul géométrique, comme nous le montrons ci-après.

Minimiser l'aire du parallélogramme revient à maximiser la somme des aires des quatre rectangles entourant le rectangle IJKL de la figure ci-après, donc à minimiser celle du rectangle IJKL qui représente la différence avec l'aire du rectangle ABCD. Lorsque AM est égal à BC/2, l'aire de IJKL est nulle. La différence avec l'aire du rectangle ABCD devient alors négative et les longueurs des côtés de IJKL sont respectivement égales à AB – 2AM et 2AM – BC. Le périmètre de IJKL est donc constant et on en déduit que l'aire est minimum lorsque IJKL est un carré, c'est-à-dire pour AM = (AB + BC)/4, si cette position est admissible. Ensuite l'aire recommence à croître, redevient nulle lorsque AM = AB/2 si cette valeur est admissible, puis redevient positive.

Il serait bien sûr illusoire de penser que ce calcul géométrique que j'ai découvert lors d'un exposé de J.C. Fenice de l'Irem de Reims, peut être produit par les élèves. Si je l'ai présenté ici c'est d'abord pour donner à voir un autre type de calcul, géométrique, avec ses techniques propres basées sur découpage et recollement d'aires ainsi que sur la propriété du carré d'être, parmi les rectangles de périmètre donné, celui de plus grande aire. Je voudrais également souligner l'aide précieuse que fournit ici un logiciel de géométrie dynamique pour, à défaut de le découvrir, arriver à suivre un tel calcul.

Je m'arrêterai là en ce qui concerne les liens entre calcul et raisonnement mais ce que je voudrai souligner, en conclusion de cette partie, ce sont les deux points suivants :

L'intelligence du calcul, qu'il soit numérique ou algébrique, nécessite un répertoire mémorisé, un répertoire qui pour le numérique contient bien sûr les tables mais ne s'y réduit pas et, pour l'algébrique, est un répertoire de formes contenant bien sûr les identités remarquables mais là encore ne s'y réduisant pas.

L'intelligence du calcul pour pouvoir se développer et s'exercer nécessite que l'on s'autorise à sortir des seuls exercices routiniers et souvent des seules obligations du programme. C'est d'autant plus le cas que, dans un univers instrumenté par les calculatrices et logiciels, les calculs les plus simples que les élèves ont à savoir maîtriser sans assistance instrumentale, ceux donc qui font partie de ce minimum obligatoire, sont le plus souvent trivialisés par l'instrument de calcul. Pour éprouver la nécessité de penser le calcul dans un environnement instrumenté, il faut oser aller un peu au-delà et, là, l'instrument devient un véritable outil de pensée.

IV. Calcul approché et ordres de grandeur

La notion d'ordre de grandeur est elle aussi une notion qui peut constituer un fil conducteur, tout au long de la scolarité et va progressivement se construire et se reconstruire au fil des expériences mathématiques, et c'est sur elle que nous voudrions tout particulièrement nous centrer dans cette partie.

A l'école élémentaire, la notion d'ordre de grandeur est bien sûr là dans les évaluations et contrôles du calcul instrumenté que nous avons déjà mentionnés. Au niveau du collège et au début du lycée, elle va prendre une nouvelle dimension, outillée qu'elle se trouve par le calcul sur les puissances. Ceci doit permettre, en particulier, de mettre en évidence les différences d'échelle qui, au-delà de l'homogénéité de la droite réelle, jouent un rôle si important dans la modélisation des phénomènes. C'est sans doute le moment de comprendre en par-

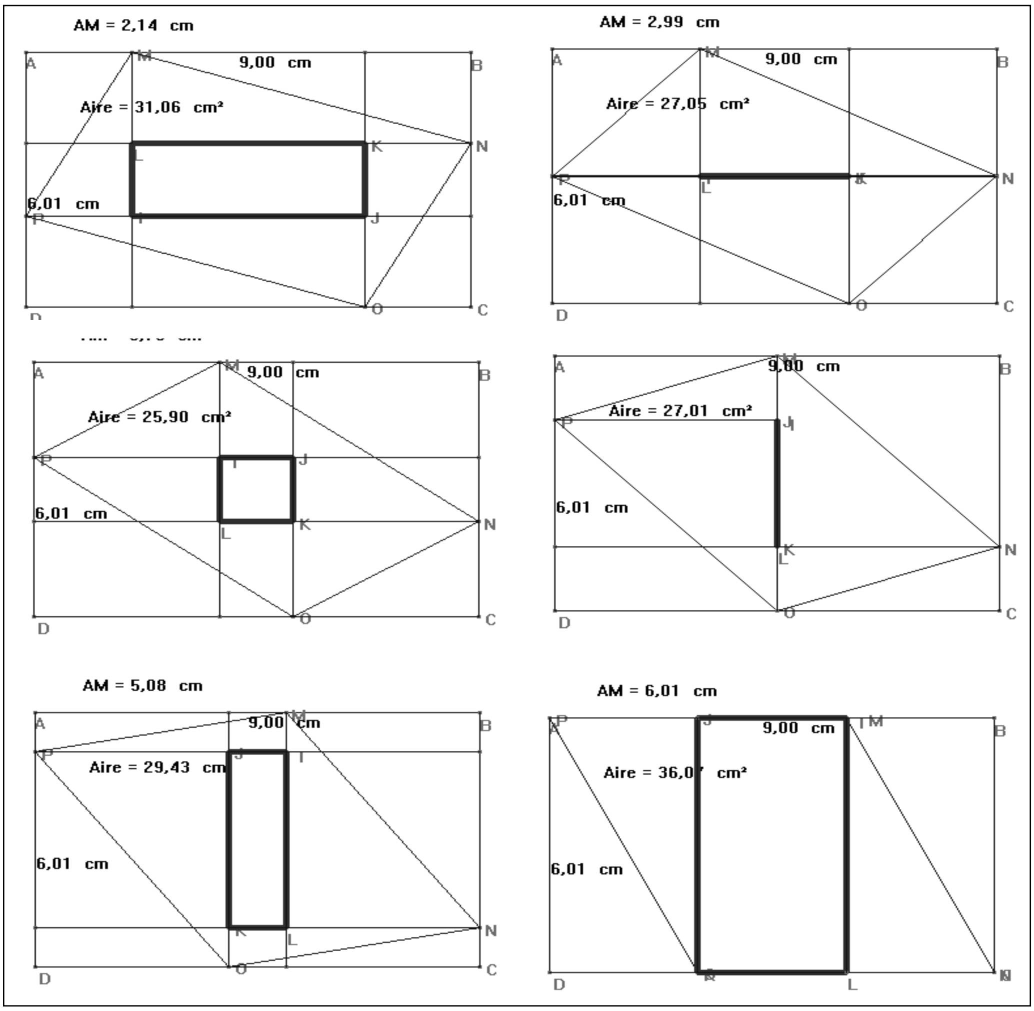

Figure 7 : Illustration du calcul géométrique réalisée avec Cabri-géomètre.

ticulier que le produit d'un nombre a très petit par un nombre b n'est très petit qu'à condition que le nombre b ne soit pas trop grand, d'approcher aussi sous un nouvel angle les questions de dimension.

Je voudrais illustrer ceci par deux exemples issus de l'annexe au rapport sur le calcul de la commission, laissant au lecteur le soin de faire les calculs à partir des données fournies, après avoir essayé d'anticiper une réponse.

IV.1. *Deux exemples de manipulation des ordres de grandeur*

• *De la molécule d'eau à la mer méditerranée*

Combien y a-t-il de molécules d'eau dans une goutte d'eau ? Y en a-t-il beaucoup plus, beaucoup moins que de gouttes d'eau dans la méditerranée ?

(La surface de la méditerranée est d'environ 2,5 millions de km^2 et sa profondeur moyenne est d'environ 1500m. La masse molaire de l'eau est de 18g et, pour tout ceux qui l'ont oublié, dans une mole d'eau il y a A molécules, A étant le nombre d'Avogadro voisin de 6.10^{23}. Enfin on pourra supposer que le diamètre d'une goutte d'eau est compris entre 1mm et 4mm)

• *De la dimension 3 à la dimension 1*

Quelle longueur atteindrait-on en alignant les atomes d'un cube de fer de 1mm de côté, en respectant la distance inter-atomique ? La distance Paris-Lyon ? la distance Paris-New York ? La distance terre-lune ? La distance terre-soleil ? Plus ?

(Masse atomique du fer : 55,847g, masse volumique : 7,9 T/m^3, on supposera le réseau cubique).

Cette prise en compte des ordres de grandeur prépare aussi le terrain pour l'enseignement de l'analyse où la notion d'ordre de grandeur, absolue ou relative selon que l'on adopte un point de vue non standard ou un point de vue classique, deviendra cette fois constitutive même du calcul, parce que constitutive des concepts qui le sous-tendent. Raisonner le calcul en termes d'ordre de grandeur devient en effet absolument essentiel en analyse et je m'étonne toujours de voir le peu de conscience qu'ont de cette nécessité mes étudiants de CAPES. Polarisés par des question de e et de h, ils ne réalisent pas que, dans la quasi-totalité des problèmes qu'ils ont à résoudre, ce n'est pas à ce niveau là que se situe l'expertise requise mais simplement dans la capacité à localiser le regard et à intégrer les ordres de grandeur au calcul. Je prendrai, pour l'illustrer, un dernier exemple que j'ai vécu cette année comme l'an passé et l'année précédente.

IV2. *L'étude banale d'une série numérique*

L'exercice est en effet banal : il s'agit d'étudier la convergence de la série numérique de terme général :

$$u_n = (-1)^n n\,ln(n)/(n^2 + 1).$$

Face à un tel exercice, mes étudiants reconnaissent très vite qu'il n'y a pas convergence absolue car la valeur absolue du terme général est équivalente à $ln(n)/n$, terme général d'une série de Bertrand divergente. Ce faisant ils utilisent, d'une façon qui leur est devenue transparente tant elle est routinière, ce calcul algébrique intégrant les ordres de grandeur via la notion de négligeabilité relative (ici la négligeabilité de 1 devant n^2 au voisinage de l'infini) pour se ramener à un objet connu : une série de Bertrand, et le fait que c'est l'ordre de grandeur de la valeur absolue du terme général qui conditionne la convergence absolue de la série. Ils se tournent alors vers le critère des séries alternées dont les deux premières conditions (vérifier que la série est bien alternée et que son terme général tend vers 0 quand n tend vers l'infini) sont à l'évidence satisfaites. Reste à satisfaire la condition de décroissance : à partir d'un certain rang, la suite (v_n) des valeurs absolues est décroissante. Ils envisagent pour vérifier cette condition différentes stratégies : calculer la différence ou le quotient de deux termes successifs, introduire la fonction f définie par :

$$f(x) = x\ln(x)/(x^2 + 1)$$

pour x positif et étudier ses variations. Les deux premières méthodes n'aboutissent pas. Quant à la troisième, elle conduit, pour étudier les variations, à étudier le signe de la dérivée :

$$f'(x) = ((1 - x^2)\ln(x) + 1 + x^2)/(1 + x^2)^2$$

Le signe du numérateur n'apparaissant pas évident, une nouvelle fonction auxiliaire est introduite et dérivée à son tour et … un long moment plus tard, la recherche n'a toujours pas abouti. Il n'est venu à aucun étudiant, spontanément, l'idée d'évaluer l'ordre de grandeur de ce numérateur pour x grand pour s'apercevoir que la limite en plus l'infini en est moins l'infini et que donc l'expression sera nécessairement négative pour x suffisamment grand, et la suite donc décroissante pour n suffisamment grand.

Ce n'est bien sûr qu'un exemple mais, de manière générale, même ces étudiants qui ont derrière eux des années de travail dans le champ de l'analyse n'ont dans leur très grande majorité pas compris les ressorts profonds de ce double jeu de localisation et d'intégration des ordres de grandeur au calcul qui est une spécificité essentielle du calcul en analyse. Quand on leur explique comment il aurait pu économiser leur travail ou éviter un blocage, en exploitant ces ressorts dans une situation comme celle présentée ci-dessus, on a l'impression que c'est pour eux une réelle découverte, que jamais ils n'ont perçu les choses et le calcul sous cet angle là.

V. Conclusion

Dans cet article, je n'ai fait qu'effleurer la masse des questions qui se posent à nous aujourd'hui quand nous essayons de penser les enjeux possibles de l'enseignement du calcul et les moyens de satisfaire ces enjeux.

Je n'ai par exemple qu'effleuré une question cruciale pour penser ces enjeux : celle du calcul instrumenté. Les outils actuels ouvrent au calcul, dans l'enseignement comme ailleurs, d'immenses possibilités : possibilités d'exploration et d'expérimentation, de connexions entre des modes de calcul et de représentation divers. Mais nous avons aussi souvent l'impression que l'accès immédiat aux résultats que ce calcul offre nous prive d'une compréhension qui était portée par l'exécution patiente des gestes du calcul. Il y a derrière cette impression une réalité profonde que les recherches auxquelles j'ai participé depuis une dizaine d'années sur l'intégration d'outils de calcul formel à l'enseignement secondaire m'ont aidée, me semble-t-il, à mieux comprendre [4].

Elle peut s'exprimer brièvement de la façon suivante : toute technique de calcul possède une double valence : une valence pragmatique mesurée à l'aune de son efficacité à produire des résultats et une valence épistémique comme déjà souligné. La valeur attri-

4 Le lecteur pourra trouver sur ce point des éléments de réflexion approfondis dans l'ouvrage édité par D. Guin et L. Trouche déjà cité [6] et dans ma contribution à cet ouvrage qui analyse un certain nombre d'ingénieries didactiques développées au lycée dans le cadre de recherches sur l'intégration de calculatrices symboliques [14].

buée à une technique dans l'enseignement est fonction de ces deux valences, pas seulement de sa capacité à produire. Or l'instrumentation du calcul bouleverse les équilibres établis, renforçant généralement la valence pragmatique mais affaiblissant dans le même temps la valence épistémique. L'acceptation réelle des outils de calcul par le système éducatif suppose sans doute que l'on arrive, par des situations appropriées, à renforcer la valence épistémique du travail instrumenté. Ceci passe souvent, comme nous l'avons montré, par la construction de situations nouvelles où l'on ne se borne pas à utiliser l'outil de calcul pour répondre plus vite et plus sûrement à des questions inchangées par rapport au travail dans l'environnement papier-crayon.

Mais penser les enjeux du calcul dans un environnement de calcul instrumenté ne pose pas seulement cette question. Au delà de cette question s'en profile une plus générale qui est celle des valeurs. Les valeurs de l'enseignement des mathématiques, notamment dans la scolarité « générale » sont des valeurs qui, malgré les incitations diverses et répétées à intégrer de nouveaux outils, restent essentiellement celles associées à l'environnement de travail traditionnel.

Ces valeurs traditionnelles, perçues comme des sortes d'absolus, sont peu questionnées par l'institution et ses acteurs et l'on voit dans la technologie un simple adjuvant pédagogique. C'est, me semble-t-il, un erreur aux conséquences regrettables car elle rend particulièrement difficile de penser les besoins mathématiques et techniques du calcul instrumenté et la façon de satisfaire ces besoins dans l'enseignement. Là encore des progressions dans la durée seraient nécessaires à envisager : progressivité dans les outils, accompagnement des genèses instrumentales qui permettent de faire de ces outils des instruments du travail mathématique de l'élève et de l'enseignant, organisation des rapports entre calcul instrumenté et calcul papier-crayon... Nous en sommes encore loin.

Il serait aussi nécessaire, au delà de la question des outils de calcul, d'aborder de façon approfondie les reconstructions qui jalonnent l'avancée progressive dans le monde du calcul, évoquer les choix nécessaires à faire au delà de ce que l'on peut considérer comme un socle de base, les rapports entre discret et continu, entre calcul déterministe et calcul de l'incertain...

Mais ce que je voudrais souligner pour conclure, et ce que j'espère le lecteur retiendra, c'est que ce monde du calcul est un monde noble et d'une richesse inépuisable, que c'est la rencontre avec ce monde fabuleux qu'il nous faut savoir organiser pour nos élèves, car mathématiques et calcul sont indissociables.

Références :

[1] Steen L. (eds) (2002). *Mathematics and democracy. The case of quantitative literacy.* The National Council on Education and the Disciplines.USA.

[2] Kahane J.P. (eds) (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques.* Paris : O. Jacob.

[3] Demailly J.P. (2002). Revendiquer une place réelle pour l'enseignement des sciences. *Gazette de la SMF* n°92, 62-68.

[4] Dehaene S. (1996). *La bosse des maths*. Paris : O. Jacob.

[5] Sierpinska A. & Lermann S. (1996). Epistemologies of mathematics and mathematics education, in Bishop & al. (eds), *Handbook of Research in Mathematics Education*, 827-876. Dordrecht : Kluwer academic publishers.

[6] Guin D. & Trouche L. (eds) (2002). *Transformer un outil de calcul symbolique en un instrument du travail mathématique : un problème didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

[7] ERMEL (eds) (1999). *Vrai ? Faux ? … On en débat*. Paris : INRP.

[8] H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (eds). (2001). *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference The Future of the Teaching and Learning of Algebra.* University of Melbourne.

[9] Combier G, Guillaume J.C., Pressiat A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre !*. Paris : INRP.

[10] Capponi B. (1999) Le tableur pour le collège, un outil pour l'enseignement des mathématiques. *Petit x n°52*, 5-42.

[11] Haspekian M. (2003). Between arithmetic and algebra: a space for the spreadsheet? Contribution to an instrumental approach. *Proceedings of CERME 3*. www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/

[12] Stacey K. (2002). Strengthening both algebraic and arithmetic reasoning to improve outcomes from the teaching of algebra. In J. Abramski (ed.), *Reasoning, explanation and proof in school mathematics and their place in the intended curriculum*. Proceedings of the QCA Seminar, , 55-66. London : Qualifications and Curriculum Authority.

[13] Germain G., Zucchetta J.F. (1993). Le quadrilatère qui tourne. In Commission inter-IREM Second Cycle (eds), *Maths en seconde : énoncés et scénarios*, 49-58. IREM de Lyon.

[14] Artigue M. (2002). Quelques leçons des ingénieries didactiques, In D. Guin & L. Trouche (eds), *Transformer un outil de calcul symbolique en un instrument du travail mathématique : un problème didactique.* 277-349. Grenoble : La Pensée Sauvage.