MOYENNE, MEDIANE, ECART-TYPE

Quelques regards sur l'histoire pour éclairer l'enseignement des statistiques

Anne BOYÉ
Marie-Céline COMAIRAS
Irem des Pays de la Loire

Introduction

Si l'on mesure l'importance d'un enseignement au nombre de pages qu'il occupe dans les programmes et commentaires, les statistiques occupent une place de choix dans ceux qui se mettent en place dans nos lycées, trop envahissante, penseront certains. Mais en examinant les choses avec un peu de recul, il apparaît que cette importance est à relativiser. Ce n'est sans doute pas l'apparition des statistiques dans les programmes qui va bouleverser l'enseignement des mathématiques dans nos collèges et lycées, mais peut-être plutôt la sollicitation quotidienne à l'usage des outils informatiques, dans tous les domaines, et pas seulement dans celui qui nous préoccupe ici.

Ces questions, essentielles, ne seront pas l'objet de nos réflexions. Cependant, tout ce qui entoure l'introduction des statistiques contribue à faire émerger des questions de fond : l'enseignement des statistiques est-il vraiment l'affaire des mathématiciens ? Si c'est le cas, s'est-on suffisamment penché sur les difficultés des élèves à appréhender ces nouveaux concepts ? Comment passer des statistiques au modèle mathématique, c'est-à-dire quels sont les liens entre statistiques et probabilités ?…

Nous avons pensé que l'histoire, une fois de plus, pouvait apporter quelques réponses et permettre d'approfondir la réflexion. Nous avons fait le choix, ici, de nous pencher sur l'histoire de quelques mots : quand, pourquoi et comment les mathématiciens ont été amenés à privilégier certains paramètres comme moyenne, médiane, écart-type ; ces choix furent-ils vraiment justifiés par les mathématiques ? L'histoire donne du sens, permet de comprendre certains obstacles, et de ne pas se contenter d'apprendre à bien utiliser des formules.

L'histoire des mots mathématiques est souvent éclairante, elle l'est très particulièrement dans le domaine des statistiques. Elle permettra de mettre en lumière qu'il n'est pas tout à fait équivalent d'évaluer statistiquement la distance entre deux étoiles, qui fera intervenir un certain nombre de mesures d'une même grandeur, ou de vouloir connaître la taille moyenne d'un enfant de quatre ans, qui fait intervenir des données sur plusieurs individus. Le premier problème a fait naître la théorie des erreurs, qui fut un moteur essentiel dans le développement des statistiques.

Nous avons choisi de rester dans le cadre des programmes de lycée, et nous aborderons très peu l'histoire des lois, elles seront cependant évoquées, puisque ce sont les lois des erreurs qui ont fait émerger les mots que nous utilisons.

Après avoir rappelé les définitions actuelles et « officielles » des différentes notions évoquées (et nous verrons que ce n'est pas toujours limpide), nous montrerons pourquoi la moyenne, la médiane et l'écart-type ont sans doute été privilégiés pour résumer une série statistique.

Les définitions :

Voici quelques définitions des mots que nous avons retenus, trouvées au fil de manuels, ou dans les programmes et commentaires officiels [1].

Mode : Ce mot n'est défini ni dans les programmes de seconde, ni dans les commentaires Il semble que l'on attache peu d'importance à ce paramètre, en dépit, ou à cause de sa simplicité, et qui, pour cela, est un des plus anciens. On peut trouver cependant des définitions dans les manuels, comme, par exemple, celles qui suivent :

Le mode, pour un caractère discret, noté M_0, est la valeur qui correspond au plus grand effectif.
(Fractale 2°, 2000, Bordas)

On appelle mode toute valeur du caractère dont la fréquence est la plus grande. Une population n'a pas toujours un mode unique.
(Point math 2°, 2000, Hatier).

Moyenne arithmétique : ce mot n'est pas non plus précisé dans les programmes et commentaires. Il peut sembler bien sûr qu'il va de soi. L'histoire nous apprendra qu'il n'est ni si évident, ni si simple. La difficulté provient essentiellement de l'usage qui en sera fait. C'est évidemment le problème essentiel. Notons cependant qu'il n'est plus fait mention dans nos classes d'une certaine sorte de moyenne, le « midrange », moyenne arithmétique des valeurs extrêmes, alors même que c'est elle qui vient souvent le plus naturellement à l'esprit de nos élèves.

La moyenne arithmétique pondérée, notée $\bar{x}$, est définie par :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \ldots + n_kx_k}{n},$$

1 Sauf mentions contraires, les textes officiels auxquels nous nous référerons sont les programmes applicables en seconde à la rentrée 2000, en premières S et ES à la rentrée 2001, et en terminales S et ES à la rentrée 2002, ainsi que les commentaires de ces programmes. Ces textes sont disponibles sur le site eduscol, et celui du cndp.

ce qui s'écrit :

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i$$

(Fractale 2°, 2000, Bordas)

La moyenne arithmétique d'une série statistique, dans une population de N individus, est le nombre réel quotient de la somme des N valeurs observées du caractère par le nombre d'individus de la population.
Si on note $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ *les valeurs observées du caractère pour les N individus de la série, la moyenne arithmétique de la série est le nombre noté* $\overline{X}$ *défini par l'égalité :*

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}$$

(Point math 2°, 2000, Hatier)

Les termes suivants sont définis dans les commentaires des programmes. Il semble que l'on veuille les préciser, même si la difficulté de l'entreprise apparaît assez vite, en ce qui concerne la médiane. Le sens de certains termes peut être modulé légèrement, pour marquer de façon appuyée la différence entre le contexte probabiliste, celui du modèle mathématique, et le contexte statistique, celui de l'expérience.

Nous trouverons ainsi la définition de la médiane *empirique*, de la variance *empirique*… Peut-être, paradoxalement, voulant rapprocher les mathématiques du réel, sommes nous en train d'assister à l'élaboration d'une « statistique scolaire », comme ce fut le cas pour d'autres domaines des mathématiques. Nous ne discuterons pas ici du bien fondé de cette évolution, mais cela nous conforte dans notre entreprise d'éclairer l'enseignement par l'histoire, ses tâtonnements, ses incertitudes.

Médiane : ce paramètre n'est pas des plus simples, et l'ambiguïté des commentaires à son sujet souligne cette difficulté. Son apparition plus tardive et l'usage ou le non usage qui en auront été faits au XIXème siècle, comme nous le verrons dans la suite, offrent un intérêt très particulier pour le pédagogue, donc pour l'élève.

Médiane (empirique) : on ordonne la série des observations par ordre croissant ; si la série est de taille 2n + 1, *la médiane est la valeur du terme de rang* n + 1 *dans cette série ordonnée ; si la série est de taille* 2n, *la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang* n *et* n + 1 *dans cette série ordonnée.*
La définition de la médiane n'est pas figée : certains logiciels et certains ouvrages définissent la médiane comme étant le deuxième quartile ou le cinquième décile ; dans la pratique de la statistique, les différences entre ces deux définitions sont sans importance. Au lycée, on évitera tout développement à ce sujet qui ne serait pas une réponse individuelle à une question d'un élève.
(Commentaires des programmes de premières).

Chacun appréciera la dernière partie de ce commentaire.

Pour illustrer les difficultés devant lesquelles se trouveront à coup sûr les enseignants, voici quelques extraits (cf. encadré de la page suivante) du livre de la collection Dimathème 1°S[2]. Donnant l'exemple d'un calcul avec tableur, les auteurs font remarquer que la valeur obtenue pour la médiane est le deuxième quartile (la définition « officielle » des quar-

2 Mathématiques, 1°S, collection Dimathème, 2001, Didier

Médiane :

Définition : on appelle médiane d'une série statistique tout nombre m tel que

Au moins la moitié des valeurs du caractère sont inférieures ou égales à m

Au moins la moitié des valeurs du caractère sont supérieures ou égales à m

Exemple et convention de calcul :

Pour calculer la médiane d'une série de n valeurs, on range ces n valeurs dans l'ordre croissant. Quand n est impair, la valeur centrale est la médiane. Quand il est pair, tout nombre compris entre les deux valeurs centrales est une médiane. ***La convention est de prendre la demi-somme des deux valeurs centrales*** [3]**.**

Remarque

Les calculatrices et les ordinateurs n'utilisent pas forcément les conventions de calcul faites dans le cours, et peuvent donc donner des résultats légèrement différents.

tiles est donnée ci-dessous), et proposent de comparer cette valeur à celle que la définition du cours aurait donnée.

C'est un des seuls manuels parmi ceux que nous avons parcourus qui pointe bien le problème.

Premier quartile (empirique) : c'est le plus petit élément q des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 25% des données soient inférieures ou égales à q.

Troisième quartile (empirique) : c'est le plus petit élément q' des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 75% des données soient inférieures ou égales à q'.
(Commentaires des programmes de premières.)

La définition du deuxième quartile n'apparaît pas dans le lexique des commentaires.

Variance, écart-type : l'histoire de ces mots est presque l'histoire des statistiques mathématiques, et ils sont de ceux que l'on comprend difficilement si l'on méconnaît les liens essentiels entre statistiques mathématiques et théorie des erreurs.

Variance empirique : moyenne des carrés des écarts à la moyenne ; c'est aussi la différence entre « la moyenne des carrés » et « le carré de la moyenne ».
(Commentaires des programmes de premières.)

Nous trouverons dans le même lexique la définition de la variance d'une loi de probabilité, donc non empirique.

Ecart type : racine carrée de la variance ; l'unité de l'écart- type est celle des données.

Les rédacteurs de ces commentaires ont ajouté, avec pertinence, cette remarque d'unité. Il est en effet très courant de calculer ces paramètres, de façon mécanique, en oubliant rapidement le sens que l'on peut leur donner.

Donner un peu de sens, c'est l'objet de notre réflexion. L'histoire, ainsi que nous l'avons annoncé, va nous aider dans cette entreprise.

3 C'est nous qui soulignons.

Moyenne, médiane, écart-type

A l'origine on trouve… l'astronomie. Plaçons-nous au milieu du XVIIIème siècle ; à cette époque Copernic, Kepler et surtout Newton en ont fait une science étayée par une théorie mathématique. Mais le travail de l'astronome s'appuie sur des mesures et si celles-ci sont entachées d'erreurs, même si la théorie est bonne, le résultat ne sera pas bon : ainsi Clairaut et Lalande se trompent d'un mois sur la prévision du passage au périhélie de la comète de Halley en 1759. Or les enjeux de l'astronomie dépassent largement le fait de prévoir le passage de telle ou telle comète ; ce sont des enjeux à la fois scientifiques, politiques et commerciaux : meilleure connaissance des étoiles et des planètes mais aussi meilleure connaissance de la Terre (dresser des cartes précises, permettre aux marins en mer de calculer correctement les longitudes, etc.). D'où viennent ces erreurs ? Il y a bien sûr des erreurs humaines mais aussi des erreurs provenant des instruments de mesure eux-mêmes. Or malgré l'amélioration de ceux-ci, et donc la précision accrue des mesures, des erreurs subsistent.

Les scientifiques vont donc être amenés à s'intéresser aux erreurs. Il faut trouver des moyens de combiner de nombreuses mesures d'un même phénomène qui réduisent le plus possible l'erreur finale sur la vraie valeur du phénomène. Citons l'article *« Milieu »* du *Supplément à l'Encyclopédie* de Diderot, rédigé par Jean III Bernoulli vers 1770 :

« Quand on a fait plusieurs observations d'un même phénomène, et que les résultats ne sont pas tout à fait d'accord entr'eux, on est sûr que ces observations sont toutes, ou au moins en partie peu exactes, de quelque source que l'erreur puisse provenir ; on a coutume de prendre le ***milieu*** *entre tous les résultats, parce que de cette manière les différentes erreurs se répartissant également dans toutes les observations, l'erreur qui peut se trouver dans le résultat moyen devient aussi moyenne entre toutes les erreurs. Il n'est pas douteux que cette pratique ne soit très utile pour déterminer l'incertitude qui naît de l'imperfection des instruments et des erreurs inévitables des observations ; mais il est aisé de s'apercevoir qu'elle ne la diminue pas autant qu'on le désirerait, et qu'elle est susceptible à plus d'un égard d'être perfectionnée, parce qu'en prenant simplement le milieu arithmétique, on ne tient pas compte du plus ou moins de probabilité de l'exactitude des observations, des différents degrés d'habileté des observateurs, etc. Différents grands géomètres ont entrepris cette utile recherche, ils l'ont considérée sous différents points de vue, et l'ont traitée plus ou moins en détail ; il est fort à souhaiter que les astronomes, les physiciens et généralement tous les observateurs profitent des résultats de ces recherches dans la discussion de leurs observations. »*

Nous attirons l'attention du lecteur sur le mot *« milieu »* utilisé par J.Bernoulli : il ne dit pas « moyenne », ni « médiane », c'est-à-dire qu'il ne donne pas a priori de forme mathématique à ce « milieu » ; il pose le problème de la recherche d'une valeur optimale, appelée « milieu », et commence à y apporter un début de réponse en signalant qu'il faut tenir compte « du plus ou moins de probabilité de l'exactitude des observations ».

On va donc chercher un modèle pour la distribution des erreurs qui devra tenir compte des contraintes « naturelles » suivantes signalées par Galilée :

« Les observations sont distribuées de façon symétrique autour de la vraie valeur ; c'est à dire, les erreurs sont distribuées de façon symétrique autour de zéro.

Les petites erreurs arrivent plus fréquemment que les grandes erreurs. »

Ceci sera exprimé par Gauss sous la forme suivante dans *Méthode des moindres carrés (1821)* :

« […] Les erreurs qui, dans des observations de même espèce, proviennent d'une cause simple et déterminée se trouvent renfermées entre certaines limites […]. Désignons par F(x) la facilité relative d'une erreur x : on doit entendre par là, à cause de la continuité des erreurs, que F(x)dx est la probabilité que l'erreur soit comprise entre les limites x et x + dx. Il n'est pas possible, en général, d'assigner la forme de la fonction F, et l'on peut même affirmer que cette fonction ne sera jamais connue dans la pratique. On peut néanmoins établir plusieurs caractères généraux qu'elle doit nécessairement présenter : […] elle s'annule pour toutes les valeurs de x non comprises entre les valeurs extrêmes. Pour toute valeur comprise entre ces limites, la fonction est positive. […] dans la plupart des cas, les erreurs égales et de signes contraires seront également probables […]. Enfin, comme les petites erreurs sont plus facilement commises que les grandes, F(x) sera en général maximum pour x = 0 et diminuera sans cesse lorsque x croîtra. »

Plusieurs modèles ont été envisagés. Citons quelques exemples. Daniel Bernoulli en a proposé trois : en arc de cercle, d'ellipse ou de parabole ; Laplace propose deux modèles de courbes d'erreurs (en 1774 et 1777) : une en $e^{-k|x|}$ sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ (c'est *la première loi des erreurs* de Laplace) et l'autre en $\log\frac{a}{|x|}$ sur $]-a\ ;+a\ [$; Lagrange envisage une distribution cosinusoïdale.

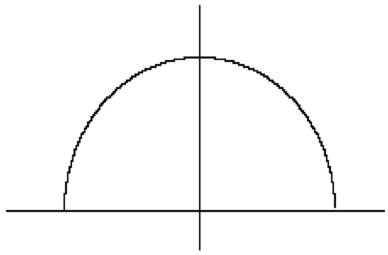
Effectivement, si l'on cherche dans le « catalogue » des courbes connues, il s'avère qu'un arc de cercle, d'ellipse, ou de parabole, une courbe d'équation $y=e^{-k|x|}$, ou $y=\log\frac{a}{|x|}$ (voir leur représentation schématique dans l'encadré ci-contre) ont toutes les caractéristiques demandées par Gauss.

Le problème du choix du « milieu » optimal est donc, aux environs de 1770, lié à deux autres problèmes : choix d'un modèle de distribution des erreurs et estimation de la « vraie » valeur.

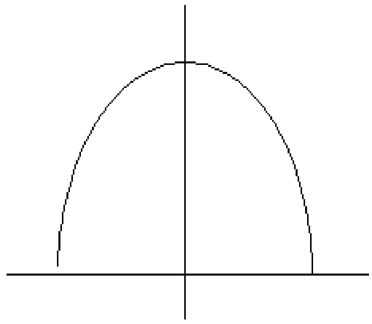
Le meilleur « milieu » est celui qui minimise les erreurs. Or si on minimise la somme des écarts (entre la valeur mesurée et la « vraie » valeur) on obtient la **médiane** (dans le modèle de Laplace en exponentielle le « milieu » est la médiane) ; et si on minimise la somme des carrés de ces mêmes écarts on obtient la **moyenne** [4]. D'où deux raisons de choisir cette dernière solution : d'une part il est plus facile [5] de calculer la somme des carrés que la somme des valeurs absolues et d'autre part on retombe sur la moyenne arithmétique utilisée de façon empirique depuis des années.

4 voir les commentaires dans la partie « statistique » des programmes de 1ère S et 1ère ES.

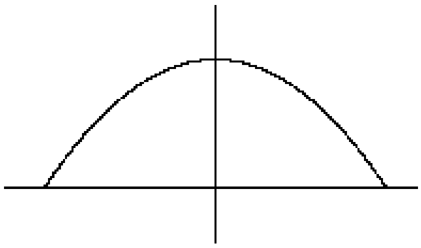
5 il était plus facile **à l'époque** de calculer la somme des carrés que la somme des valeurs absolues mais ceci est remis en question actuellement par l'usage des ordinateurs.



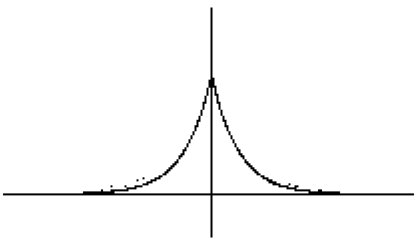
distribution semi-circulaire



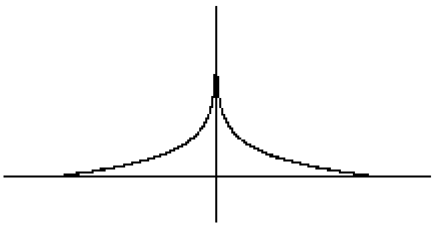
distribution semi-elliptique



distribution parabolique



distribution en $e^{-k|x|}$



distribution en $\log \frac{a}{|x|}$

Citons Legendre *(Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, 1805)* :

« De tous les principes que l'on peut proposer pour cet objet, je pense qu'il n'en est pas de plus général, de plus exact, ni d'une application plus facile que celui dont nous avons fait usage dans les recherches précédentes, et qui consiste à rendre minimum la somme des carrés des erreurs. Par ce moyen, il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui empêchant les extrêmes de prévaloir, est très propre à faire connoître l'état du système le plus proche de la vérité.

La règle par laquelle on prend le milieu entre les résultats de différentes observations, n'est qu'une conséquence très simple de notre méthode générale, que nous appellerons ***méthode des moindres carrés****. »*

C'est ainsi que va s'imposer la loi de Gauss (ou loi de Laplace-Gauss) comme étant **la** loi de distribution des erreurs : Gauss prend pour hypothèse que *« [...] si une quantité a été déterminée par plusieurs observations directes, faites dans les mêmes circonstances et avec le même soin, la moyenne arithmétique des valeurs observées donne la valeur la plus probable, si ce n'est exactement du moins approximativement, si bien qu'il est toujours plus sûr d'y recourir »* et obtient ainsi la loi des erreurs $\Phi(x) = \dfrac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{h^2}}$ où h est un coefficient proportionnel à un nombre m, que Gauss appelle *l'erreur moyenne à craindre*[6] et qui n'est aujourd'hui rien d'autre que l'écart-type.

6 voir tableau pages suivantes.

Finalement tout se tient : la moyenne est à l'origine de la loi de Gauss et elle trouve sa justification dans la méthode des moindres carrés ! Quant à la variance, elle est directement liée à la moyenne, aux moindres carrés et à la loi de Gauss puisque c'est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne et que sa racine carrée, l'écart-type, intervient dans le coefficient h de la loi de Gauss citée plus haut. Mais, comme on l'a vu, on aurait très bien pu construire une théorie des erreurs liant la médiane, les « moindres » valeurs absolues et une autre loi de distribution des erreurs, par exemple celle de Laplace ; Gauss insiste effectivement sur l'arbitraire des choix faits : on pourra le constater de manière évidente dans le texte mis en annexe.

Citons pour terminer une boutade, au sujet de la loi de Gauss, rapportée par Poincaré :

« Tout le monde y croit cependant, me disait un jour M.Lippmann, car les expérimentateurs s'imaginent que c'est un théorème de mathématique, et les mathématiciens que c'est un fait expérimental . »

Après ce petit aperçu des problématiques qui ont présidé à l'émergence des théories en statistiques, nous sommes à même de resituer et comprendre l'origine et l'histoire des mots que nous avons définis au début, ce qui terminera ce petit tour d'horizon des statistiques dans les programmes scolaires.

Repères historiques sur les mots moyenne, médiane, écart-type

Nous vous proposons ici un essai de tableau récapitulatif. L'entreprise est évidemment difficile et hasardeuse pour plu-

moyenne	La *« coutume de prendre le milieu »* évoquée par J. Bernoulli vers 1770 est alors assez récente. **Contexte de la théorie des erreurs** : — Tycho Brahé(1546-1601) a recours à la **moyenne arithmétique** pour éliminer des erreurs d'observation. — 1722 Roger Cotes (*Harmonia mensurarum*) propose d'utiliser une **moyenne pondérée**. — 1756 Thomas Simpson (*Philosophical Transactions*) est le premier à défendre l'usage de la **moyenne arithmétique** dans le cas de n mesures d'une même grandeur. **Apparition des « Statistiques morales »** : — 1846 Quételet fait la différence entre — la « **moyenne** », moyenne « objective » des mesures d'un objet unique. (traduit par Hershell par le mot anglais « **mean** ») (exemple : la mesure de la distance entre deux étoiles) — et la « **moyenne arithmétique** », moyenne «subjective», concernant les mesures de plusieurs individus d'une population si possible homogène (traduit par Hershell par le mot anglais « **average** ») (exemple : la taille moyenne d'un enfant de quatre ans). — 1874, William Stanley Jevons introduira l'usage de la **moyenne géométrique** et de la **moyenne harmonique**.
médiane	Le terme **médiane** est introduit par Cournot en 1843.(*Exposition de la théorie des chances et des probabilités).* Laplace parlait de « **milieu de probabilité** ». 1757 Roger Joseph Boscovitch est un des premiers à souligner l'intérêt de cette valeur centrale. 1885 Galton, dans le cadre des statistiques « morales », propose de substituer l'usage de la **médiane** à celui de la moyenne, susceptible de trop grande variabilité.
variance, écart-type	Cette notion apparaît avec la théorie des moindres carrés. Gauss a choisi de privilégier, pour mesurer les erreurs, la moyenne des carrés des écarts à la moyenne, qu'il note m^2. Il appelle le nombre **m**, **l'erreur moyenne à craindre**, soulignant qu'il ne faut pas confondre m avec la moyenne arithmétique des erreurs. 1893, Karl Pearson nommera ce nombre « **standard deviation** », et le notera σ.
écarts entre les quartiles	Introduit par Quételet en 1846 Repris par Galton en 1875.[7]

7 Cf. annexe 2.

sieurs raisons. Il est toujours délicat, voire impossible d'établir avec certitude l'apparition d'un mot, qui n'est souvent que l'aboutissement d'une longue recherche sur un problème. En particulier le vocabulaire des statistiques a été unifié et standardisé relativement tard. En France, par exemple, les connaissances accumulées par l'école anglaise de statistiques ne seront pas vraiment diffusées avant les années 1925-1930.

Le premier mot, peut-être, qu'il faudrait étudier serait justement celui de « statistiques ». Mais il peut recouvrir tellement de sens différents que nous avons choisi de l'éviter.

Les préoccupations diffèrent assez largement entre ce que certains appelèrent les statistiques administratives, la théorie des erreurs, que l'on peut considérer comme la source des statistiques mathématiques et les statistiques morales de Quételet, que l'on peut considérer comme point de départ des statistiques inférentielles .

L'objet de la théorie des erreurs est d'évaluer la « vraie » valeur d'une grandeur à laquelle on s'intéresse. L'objet des statistiques morales est de donner une valeur fictive, théorique, qui pourrait être le référent unique, à partir des mesures de plusieurs objets ou individus différents.

Ces différences ont des retentissements profonds dans l'histoire des mots.

En guise de conclusion

Nous en sommes au début de nos réflexions, et les nouveaux programmes viennent tout juste d'atteindre les classes de première ; aussi, notre recul n'est pas suffisant pour proposer des applications vraiment testées en classe. Cependant il nous semble important de mettre en évidence les deux notions que recouvre la moyenne : moyenne objective et moyenne subjective.

Pour les élèves, à leur entrée en seconde, la notion de moyenne est souvent rattachée à la moyenne des notes, des tailles ... C'est-à-dire, plutôt la moyenne « subjective » des statistiques morales, celle à laquelle il semble le plus difficile de donner du sens, donc la plus difficile à appréhender.

L'on devrait d'abord s'attacher à la moyenne « objective », dans le contexte du calcul d'erreurs ; dans ce cadre le calcul de la moyenne se situe dans une problématique naturelle : déterminer la « vraie » valeur d'une distance ou de tout autre chose.

Il peut être tout à fait intéressant, par exemple, de proposer aux élèves de mesurer la longueur de la salle de classe, en utilisant divers types de « mètres » (de couturière, en bois articulé, ruban, ...) : ils trouveront sûrement des valeurs assez différentes (nous l'avons expérimenté !) ; il semblera alors assez naturel de les amener à évaluer les erreurs, de leur demander si la moyenne arithmétique des mesures est la valeur qu'ils retiendraient comme la plus proche de la « vérité ». Certains discuteront peut-être de la plus ou moins grande confiance à apporter à certaines mesures, se rapprochant ainsi de la « facilité relative d'une erreur » introduite par Gauss.

Nous insistons encore sur le fait que ceci n'a pas encore été mis en pratique avec nos élèves, et que ce ne sont que des pistes issues de notre étude historique.

Il est par ailleurs possible de rapporter cela à des expériences de mesures en physique ou en SVT.

Dans un deuxième temps, on reviendra à la moyenne subjective, la moyenne des notes par exemple ; et peut-être apparaîtra-t-il que si les calculs sont les mêmes, la problématique est totalement différente : recherche-t-on une « vraie » note, une « vraie » taille ? N'est-ce pas plutôt une référence pratique (et peut-être contestable) ? Dans ce genre d'enquête, la médiane n'aurait-elle pas plus de sens ? Et dans le cas d'une enquête sur les salaires ?

Cette fois, c'est peut-être l'économie, la géographie… qui pourront servir de point d'appui.

En première, la recherche de la variance (puis de l'écart-type) prendra aussi du sens, dans le cas du calcul d'erreurs. Comment savoir si la moyenne d'une série de mesures est la meilleure approximation de la « vraie » valeur ?

Les élèves penseront peut-être d'abord à utiliser la moyenne des écarts à la « vraie valeur ». Il n'est pas interdit de leur faire lire quelques textes de Gauss ou Legendre, parmi ceux que nous avons cités, pour qu'ils comprennent qu'il y avait un choix à faire, et que ce choix fut fait de façon plus ou moins arbitraire. Que le problème est que ce choix doit être fait alors que justement on ne connaît pas la « vraie » valeur. Ils auront peut-être alors envie de faire des calculs de minimum pour découvrir où se trouve la valeur qui minimise les erreurs.

Voilà qui sans doute donnera un peu de sens à l'enseignement des statistiques et permettra aux élèves d'exercer leur esprit critique, à travers des questions *mathématiques*.

Cela permettra aussi d'ouvrir la voie de façon assez simple à l'enseignement qui suivra sur les « lois » normales ou autres …, et d'éclairer comment les « lois » des erreurs ont pu faire naître l'idée de la statistique morale pour aboutir à l'usage contemporain que l'on fait de ces lois, dans tous les domaines. De même la recherche des lois en physique ou en biologie, celle de modèles mathématiques dans toutes sortes de domaines pourra prendre du sens, et l'on comprendra pourquoi, il y a « des » modèles mathématiques et non pas « un », et qu'il y a beaucoup d'arbitraire dans les choix que l'on fait, un arbitraire dont on peut espérer qu'il est raisonné.

Chacun aura compris, dès lors, que l'enseignement des statistiques ne se résumera pas à apprendre des formules et les appliquer, mais qu'il pourra être riche de réflexions, qui sont peut-être assez différentes de celles induites par les commentaires des programmes, et qui trouveront totalement leur pace dans le cours de mathématiques.

ANNEXE 1

(extrait de *Méthode des moindres carrés - 1821)*

La question qui nous occupe a, dans sa nature même, quelque chose de vague et ne peut être bien précisée que par un principe jusqu'à un certain point ***arbitraire*** [8]*. La détermination d'une grandeur par l'observation peut se comparer, avec quelque justesse, à un jeu dans lequel il y aurait une perte à craindre et aucun gain à espérer : chaque erreur commise étant assimilée à une perte que l'on fait, la crainte relative à un pareil jeu doit s'exprimer par la perte probable, c'est-à-dire par la somme des produits des diverses pertes possibles par leurs probabilités respectives. Mais quelle perte doit-on assimiler à une erreur déterminée ? C'est ce qui n'est pas clair en soi ;* ***cette détermination dépend en partie de notre volonté*** [9]*. Il est évident, d'abord, que la perte ne doit pas être regardée comme proportionnelle à l'erreur commise ; car, dans cette hypothèse, une erreur positive représentant une perte, l'erreur négative devrait être regardée comme un gain : la grandeur de la perte doit, au contraire, s'évaluer par une fonction de l'erreur dont la valeur soit toujours positive. Parmi le nombre infini de fonctions qui remplissent cette condition, il semble naturel de choisir la plus simple, qui est, sans contredit, le carré de l'erreur, et, de cette manière, nous sommes conduits au principe proposé plus haut.*

Laplace a considéré la question d'une manière analogue, mais en adoptant, pour mesure de la perte, l'erreur elle-même prise positivement. ***Cette hypothèse, si nous ne nous faisons pas d'illusion, n'est pas moins arbitraire que la nôtre*** [10] *: faut-il, en effet, regarder une erreur double comme plus ou moins regrettable qu'une erreur simple répétée deux fois, et faut-il, par suite, lui assigner une importance double ou plus que double ?* ***C'est une question qui n'est pas claire, et sur laquelle les arguments mathématiques n'ont aucune prise ; chacun doit la résoudre à son gré*** [11]*. On ne peut nier pourtant que l'hypothèse de Laplace ne s'écarte de la loi de continuité et ne soit, par conséquent, moins propre à une étude analytique ; la nôtre, au contraire, se recommande par la généralité et la simplicité de ses conséquences.*

8 c'est nous qui soulignons.
9 idem
10 idem
11 idem

ANNEXE 2

Lambert-Adolphe-Jacques Quételet (1796-1874) est né à Gand, en Belgique. Devenu mathématicien un peu par hasard, il a l'idée, en 1823, de fonder un observatoire ; afin de s'initier à l'astronomie il rencontre Fourier, Laplace, Poisson à l'Observatoire de Paris et découvre à cette occasion les statistiques. En 1832 il s'installe à l'Observatoire de Bruxelles où il restera jusqu'en 1856. Parallèlement à ses travaux en astronomie et climatologie il s'intéresse de plus en plus à la statistique. Il est l'initiateur du premier Congrès international de Statistique à Bruxelles en 1853.

Quételet utilise les statistiques pour étudier « l'homme » aussi bien d'un point de vue physique (taille, poids, force) que d'un point de vue intellectuel et moral (penchant au crime, au mariage,…).

Voici ce qu'il écrit dans *« Recherches sur le penchant au crime dans les différents âges » (1832)* :

> *Après avoir vu la marche qu'ont suivie les sciences à l'égard des mondes, ne pouvons-nous essayer de la suivre à l'égard des hommes ; ne serait-il pas absurde de croire que pendant que tout se fait d'après des lois si admirables, l'espèce humaine seule reste abandonnée aveuglément à elle-même et qu'elle ne possède aucun principe de conservation ? Nous ne craignons pas de dire qu'une pareille supposition serait plus injurieuse à la divinité que la recherche même que nous nous proposions de faire.*

Il défend le principe d'une statistique scientifique s'appuyant sur le calcul des probabilités.

> *La théorie des probabilités devrait servir de base à toutes les sciences d'observation,*

précise Quételet.

Il donne une place prépondérante à la moyenne ; il fait la différence entre la moyenne « objective », qui correspond à quelque chose de réel, et la moyenne arithmétique. Ainsi, avec lui, les statistiques se sont orientées dans une voie nouvelle : les statistiques morales, dont la postérité retiendra particulièrement l'invention de « l'homme moyen ». Citons de nouveau Quételet (*« Physique sociale ou Essai sur le développement des facultés de l'homme » -1869-*)

> *En réunissant les individus d'un même âge et d'un même sexe et en prenant la moyenne de leurs constantes particulières, on obtient des constantes que j'attribue à un être fictif que je nomme l'homme moyen chez ce peuple.[…]*
>
> *L'homme moyen, en effet, est dans une nation ce que le centre de gravité est dans un corps ; c'est à sa considération que se ramène l'appréciation de tous les phénomènes de l'équilibre et du mouvement.*

Cette théorie de l'homme moyen, qui annonce par exemple la normalisation des qualités, de même que l'utilisation à outrance des mathématiques pour justifier des prises de décision « sociales» , ont provoqué un déferlement de critiques. On doit cependant reconnaître que Quételet a su donner à la statistique du 19° s. une impulsion dont l'influence ultérieure est indéniable.

Francis Galton (1822-1911), né à Birmingham en Angleterre, est le cousin de Charles Darwin. Touche-à-tout génial et polyvalent, il est avant tout géographe et explorateur. La lecture de « L'origine des espèces » que son cousin a fait paraître en 1859 marque un tournant dans sa vie et il commence à s'intéresser aux méthodes statistiques et à leurs applications à toutes sortes de domaines : génétique, anthropométrie, éducation, psychologie.

Il est considéré comme le père de la biométrie et le fondateur de l'eugénisme.

Il invente le concept de corrélation et sa mesure par le coefficient de corrélation (ce serait un autre mot et un autre concept à étudier dans un autre article ; signalons seulement que ce coefficient sert dans la recherche d'une relation de régression, d'où sa notation par la lettre r).

Dans le domaine qui nous intéresse, nous avons noté qu'il a joué un rôle important dans le développement de la médiane (et des « fractiles »), en relation avec les théories de l'eugénisme qui visent à « améliorer la race humaine ». Il soutient, en effet, que l'utilisation de la moyenne est adaptée aux situations « symétriques », ce qui est rarement le cas dans les domaines qu'il étudie. Dans l'étude des tailles, par exemple, il faudrait admettre à côté de l'existence de « géants », l'existence de personnes dont la taille serait zéro. Le nom de ce génie polyvalent et parfois inquiétant dans sa recherche de la sélection de l'élite, est attaché le plus souvent, dans les lycées et collèges, à ce que l'on nomme la « machine de Galton », qui permet de visualiser la distribution normale.

Quelques éléments de bibliographie :

Nous avons choisi quelques références bibliographiques facilement accessibles, outre la traduction par J. Bertrand des textes de Gauss sur la méthode des moindres carrés.

DACUNHA-CASTELLE, D., *Chemins de l'aléatoire*, coll. Champs, Flammarion, 1996

EWALD, F., *Moyenne et perfection - L'état providence*, in, *Actes du colloque inter-IREM, Les mathématiques dans la culture d'une époque*, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1987.

DROESBEKE,J. J. TASSI, P., *Histoire de la statistique*, Que sais-je ? n° 2527, P.U.F., 1997, Paris

FELDMAN, J., LAGNEAU, G., MATALAN, B. (sous la direction de), *Moyenne, milieu, centre, histoires et usages*, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, 1991, Paris.

GAUSS, K. F., *Méthodes des moindres carrés,* traduit par J. Bertrand, Mallet-Bachelier, 1855, Paris. Rééd. IREM, Université Paris VII, 1996, Paris.

STEWART, I., *Dieu joue-t-il aux dés ?* coll. Champs, Flammarion, 1994