UNE APPROCHE DE LA NORMALITE A L'AIDE DE LA PLANCHE DE GALTON

Anne CROUZIER
Irem de Clermont-Ferrand

I – Introduction

« 26° à Clermont-Ferrand un 30 octobre » Est-ce une température normale ? Voila une question que l'on peut se poser dans la vie courante de façon naturelle. Les météorologues répondent que c'est là une température au-dessus des « normes saisonnières ». Quand peut-on dire d'une grandeur qu'elle est normale ou anormale ?

Les statistiques que l'on peut considérer comme un domaine d'étude de la « variabilité » fournissent des outils pour répondre à de telles questions. En particulier, c'est un des objectifs annoncés dans le programme de 1ère L (mathématique-informatique) puisqu'il convient dans cette classe d'introduire la notion *d'écart-type* et d'en faire usage pour définir des « *plages de normalité* » *pour un niveau de confiance donnée*.

Ces mêmes programmes suggèrent de prendre comme *exemple de référence l'étude des courbes de poids et / ou de taille dans les carnets de santé des enfants*... Ils suggèrent aussi d'utiliser des *exemples de résultats fournis par des laboratoires biologiques lors de certains examens*.

Les documents d'accompagnement explicitent ces exemples (p. 39 à 41) : on y trouve un premier exemple issu de données médicales (bilan de l'activité thyroïdienne) et *l'exemple des tailles*, la distribution des tailles fournit un second exemple... L'auteur des commentaires insiste sur la formulation des conclusions que l'on peut tirer de telles études : « *On sera attentif à la formulation des conclusions : la normalité évoquée ici est une normalité statistique et il y a une chance sur vingt pour* *qu'un individu « normal » choisi au hasard soit en dehors de la plage de normalité...* »

Or, lorsqu'on opère sur des données brutes (tailles, données médicales), le « hasard » a déjà opéré et distribué les individus... Le fait d'utiliser l'écart-type pour mesurer la distance d'une donnée à la moyenne ne permet pas de comprendre vraiment « qu'un individu normal » peut se trouver en dehors de la plage de normalité...

C'est pourquoi nous proposons, ci-dessous, une activité avec la planche de Galton qui, pensons-nous, ré-introduit le hasard et son rôle dans une distribution de population... Celle-ci présente d'autres intérêts :

— elle permet de mettre en oeuvre d'autres points du programme de 1ère L : « arbres pour le dénombrement, calculs de pourcentages, interpolation linéaire, simulation et fluctuation d'échantillonnage, calculs sur les séries statistiques (moyenne et écart-type),

— et surtout, sans pour cela avoir besoin du langage des probabilités, on peut construire un modèle théorique d'une distribution et vérifier son adéquation par des données empiriques de simulation.

Bien que les simulations puissent être faites avec une calculatrice ou avec un tableur, nous avons opté pour un programme simulant la planche de Galton permettant d'avoir une vision du phénomène et un suivi des résultats. C'est un programme semblable à celui que l'on peut trouver dans une disquette accompagnant le document « Simulation d'expériences aléatoires » du groupe Inter-Irem « Lycées techniques » édité par l'Irem de Paris-Nord. Nous l'avons cependant modifié de façon à pouvoir disposer de la distribution quantifiée des billes dans les diverses positions possibles après expérimentation.

II – Du lancer de pièces à la planche de Galton.

a) Pile ou Face : un classique.

Nous avons repris avec les élèves de 1ère L cette expérience que certains avaient pu étudier en seconde : le lancer de pièces. On joue à Pile ou Face en lançant deux fois de suite une même pièce que l'on suppose bien équilibrée (ce qui signifie que l'on a autant de chances d'obtenir Pile que Face) et l'on compte le nombre de fois où l'on obtient Face : on peut obtenir zéro fois, une fois ou deux fois Face.

On peut alors poser la question « A-t-on autant de chances d'obtenir chacune de ces possibilités ? » La réponse n'est pas évidente pour les élèves.

Une première façon de répondre à la question est de réaliser ou de simuler un grand nombre de fois l'expérience et d'examiner les résultats : pas de doute, la distribution n'est pas uniforme et il semble bien qu'il y ait, à peu près, deux fois plus de chances d'avoir un Pile et une Face que d'avoir « deux Faces » (ou « zéro Face »).

On peut se demander alors : « Pourquoi un tel résultat », comment l'expliquer.

C'est ici qu'une schématisation avec un arbre peut être particulièrement utile.

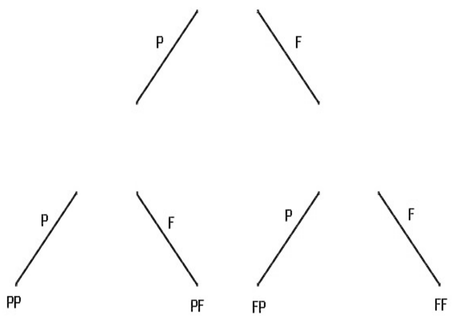
On représente par un arbre les différentes successions de Pile et de Face (cf. figure page suivante).

Il y a au total quatre possibilités :

— une façon d'obtenir PP (zéro Face)

— une façon d'obtenir FF (deux Faces)

— deux façons d'obtenir P et F (une Face)



On obtient ainsi une « distribution théorique » des trois possibilités : il y a une chance sur quatre d'obtenir « zéro Face », une chance sur quatre d'obtenir « deux Faces » et deux chances sur quatre d'obtenir un Pile et une Face.

On peut complexifier la situation étudiée précédemment en envisageant trois lancers de pièces. Encore réalisable à ce stade, le schéma sous forme d'arbre devient vite compliqué avec 8 branches et deviendra irréalisable pour l'étude des 9 lancers successifs que nous souhaitons réaliser par la suite.

b) Schématisation avec la planche de Galton.

Etudier une succession de lancers d'une pièce bien équilibrée, c'est étudier une suite de résultats parmi deux possibilités équiprobables, par exemple :

Pile, Pile, Face, Pile,   etc.

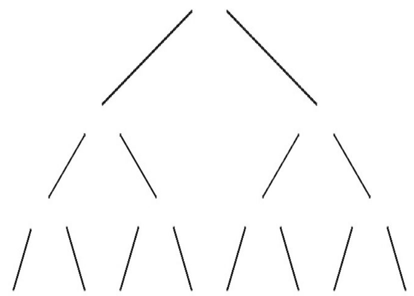
Une autre expérience classique permet de réaliser le même genre d'étude : La planche de Galton. La bille, à chaque clou qu'elle heurte dans sa chute, a la possibilité de partir à droite ou à gauche, avec la même probabilité pour l'un ou l'autre si la planche est bien réalisée. Cette expérience génère elle aussi une suite de résultats, Droite, Droite, Gauche, Droite, etc., les deux directions étant équiprobables à chaque étape.

L'illustration par notre programme de simulation de la planche de Galton permet de bien prendre conscience de cette succession de choix : on peut suivre la chute de la bille au ralenti, et un arrêt au niveau de chaque clou met en évidence le choix de la direction à prendre.

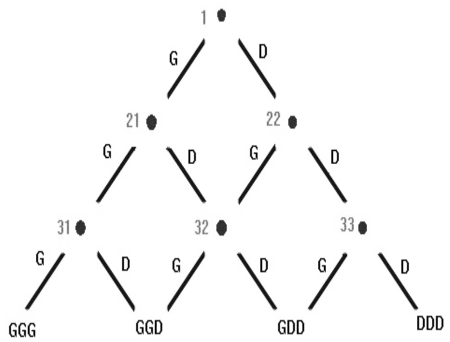
Les deux études sont donc de même nature, et nous pouvons assimiler le Pile de la Pièce au Gauche de la bille, ainsi que Face et Droite. L'étude du nombre de Face obtenu, équivaut à l'étude du nombre de chutes à droite. Cette identification a le grand avantage de permettre de mieux visualiser l'évolution de l'expérience et les résultats.

Pour représenter l'expérience qui nous intéresse (cf. encadré de la page suivante), où nous étudions uniquement le nombre d'occurrence d'un événement, le schéma de la planche de Galton nous fait gagner de la place et du temps, puisque les résultats identiques sont regroupés, et classés de gauche à droite de zéro Droite (ou Face) à « que des Droites » (que des Faces).

Nous allons donc abandonner l'arbre et utiliser le schéma de la planche de Galton pour représenter une succession de lancers d'une pièce, identifiant les résultats Pile à Gauche et Face à Droite.



Pour représenter 3 lancers successifs d'une pièce, on utilise classiquement un arbre. Il sert uniquement au dénombrement, et ce n'est qu'une fois l'arbre entièrement construit que l'on constate que plusieurs branches correspondent au même nombre de Faces (par exemple PFF, FPF, FFP)

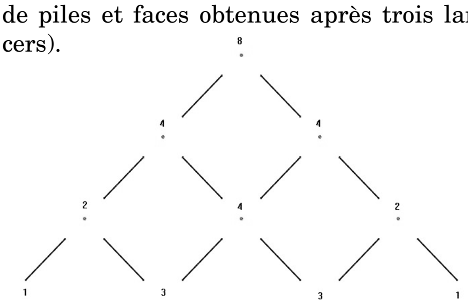


A cette situation, correspond une planche de Galton à trois niveaux. On a ici un schéma qui répond aux contraintes du déplacement de la bille. Une chute à Gauche, et deux chutes à Droite aboutissent logiquement à la même position, quel que soit l'ordre dans lequel elles se produisent. Ainsi GDD, DGD et DDG aboutissent au même point.

En revanche, si au niveau expérimental la planche de Galton est pratique pour savoir combien de fois la bille est tombée à droite, le décompte théorique sur le schéma est plus complexe qu'avec un arbre classique (si on est arrivé à le tracer !)

Pour terminer l'étude théorique de cette distribution, il nous faut dénombrer combien de fois on obtient chaque position. Plutôt que de travailler avec des probabilités qui ne sont pas au programme de 1ère L, nous avons préféré idéaliser une expérience, ce qui nous donne en prime un résultat directement comparable avec les résultats obtenus par la suite avec la simulation.

Supposons que l'on fasse chuter au total 8 billes sur une planche de Galton à trois niveaux. Au clou 1, comme les billes ont chacune une chance sur deux de partir à droite, nous allons supposer que 4 d'entre-elles sont parties à droite et 4 à gauche. Quatre billes se sont donc heurtées au clou 22 ; là encore, nous supposons que idéalement 2 partent à gauche et 2 à droite. Les 2 partant à gauche vont heurter le clou 32, qui sera aussi heurté par 2 billes venant du clou 21.Il y a donc à ce niveau au total 4 billes, qui se partagent 2 à droite et 2 à gauche. On obtient alors le schéma suivant, lequel permet d'obtenir une distribution théorique des possibles (nombre de piles et faces obtenues après trois lancers).



On remplit le tableau des effectifs et des fréquences « théoriques » et on obtient :

Nb de Faces	0	1	2	3
Effectifs	1	3	3	1
Fréq. en %	12,5	37,5	37,5	12,5

III – Approche de la « normalité »

On peut poursuivre l'étude débutée, non plus avec deux ou trois jeters, mais avec neuf jeters (le programme initial simulant la planche de Galton comportait neuf niveaux de clous ; il se trouve que c'est suffisant pour l'étude que nous entreprenons).

On peut *idéaliser* la situation en supposant que l'on lâche cinq cent douze billes (512 car c'est 2^9 bien sûr) et qu'à chaque clou, les billes se séparent équitablement à gauche et à droite.

On obtient alors la *répartition théorique* suivante donnée dans l'encadré ci-dessous.

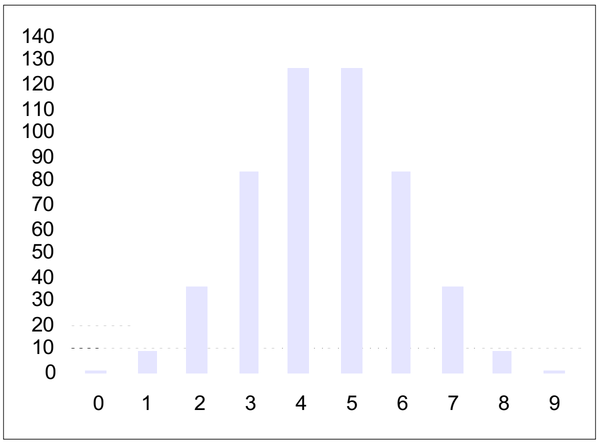
Supposons que l'on réalise l'expérience effective de neuf lancers successifs d'une pièce. Obtenir quatre fois « Face » et cinq fois « Pile » est un résultat qu'il semble « normal » d'obtenir. Obtenir zéro « Face » et neuf « Pile » apparaît d'emblée comme plus exceptionnel : on peut se demander si la pièce n'est pas truquée ; mais le hasard peut fort bien conduire à une telle situation « exceptionnelle ». Obtenir une fois face, huit fois pile, est-ce normal ? Est-ce exceptionnel ? Comment alors trancher entre ce que l'on va considérer intuitivement comme normal, ce que l'on va considérer comme exceptionnel ?

Une première idée statistique simple est la suivante : *le normal va être ce qui est proche de la moyenne* (ou de la médiane), *l'exceptionnel ce qui en est loin*. Mais alors se pose la question d'évaluer l'écart à la moyenne.

On va le faire avec l'écart-type.

Revenons à la distribution théorique obtenue avec la planche de Galton. On peut « appli-

nb Faces	effectifs
0	1
1	9
2	36
3	84
4	126
5	126
6	84
7	36
8	9
9	1



quer » les formules et trouver la moyenne et l'écart-type de la série ; on a :

$\mu = 4,5$ et $\sigma = 1,5$.

On peut alors déterminer par simple comptage (et sans référence à des résultats théoriques inaccessibles) le pourcentage de la population qui se trouve dans l'intervalle :

$[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$, c'est-à-dire dans $[3, 6]$

Il suffit de compter : $\frac{84+126+126+84}{512} \approx 82\%$

Dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$, c'est-à-dire $[1,5 ; 7,5]$ on trouve : $\frac{492}{512} \approx 96\,\%$.

On obtient donc, pour l'expérience aléatoire consistant à jeter neuf fois une pièce, un résultat théorique sur la distribution du nombre de faces :

La moyenne μ vaut 4,5 ;

l'écart-type σ vaut 1,5.

— 82 % de la population est dans :
$[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$

— 96 % de la population est dans :
$[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$

(avec 3σ, on obtient la totalité de la population).

Expérience.

Nous avons par des moyens théoriques, établi quelle était la répartition normale des résultats dans une telle situation.

Il serait intéressant maintenant de vérifier que des résultats expérimentaux vont être compatibles avec ces résultats théoriques. Le but est de montrer que des données obtenues « sur le terrain » , par expérience, enquête, ou simulation, traitées avec le bon modèle mathématique, donnent un résultat cohérent.

On peut obtenir ces résultats de façons diverses :

— Par des expériences effectives :

• Demander à chaque élève de réaliser des lancers de pièce. Même en mettant en commun tous les résultats, il est difficile de dépasser 400 valeurs. Plus que pour valider la répartition des résultats par l'expérience, c'est une façon de vérifier que si chacun réalise une série de lancers, les résultats se trouvent pratiquement tous dans la plage théorique $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$.

• Se procurer une vraie planche de Galton, ce qui ne nous a pas été possible.

— Par des simulations, les élèves ayant déjà été familiarisés en seconde au passage de l'expérience à la simulation :

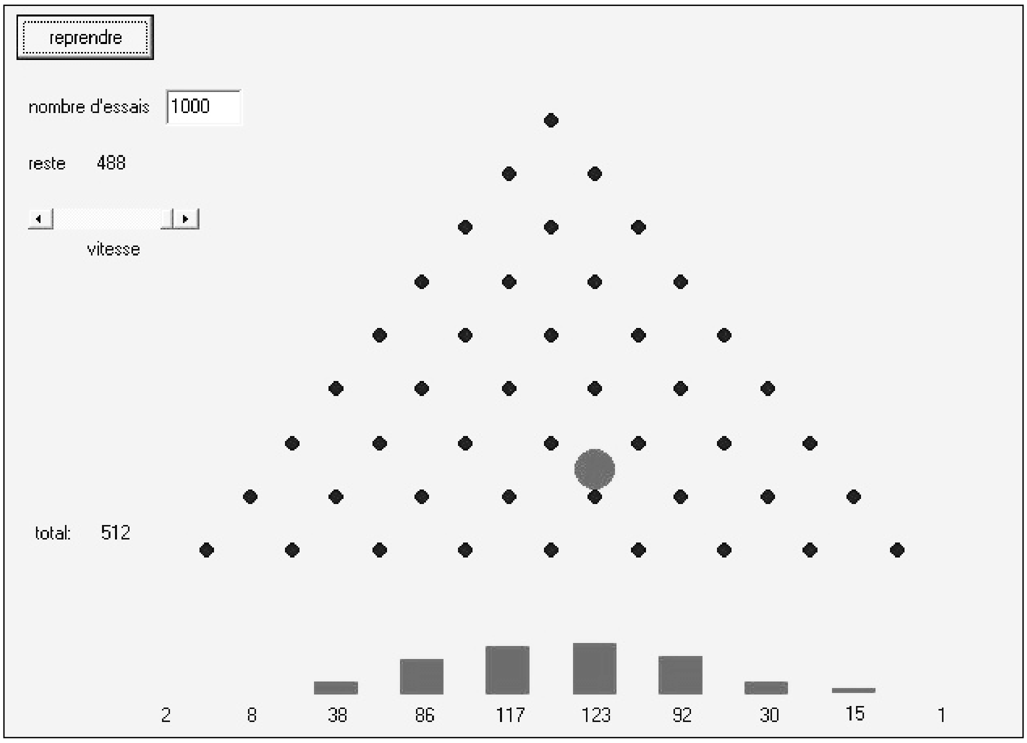
• Calculatrice (succession de 9 chiffres pairs ou impairs)

• Excel, en générant des suites aléatoires de 9 nombres égaux à 0 ou à 1.

• Programme de simulation de la planche de Galton qui permet de visualiser l'évolution de la répartition de résultats et en particulier de voir se réaliser les événements exceptionnels tels que DDDDDDDDD !

Les résultats de l'encadré suivant ont été obtenus en faisant quatre simulations successives de mille séries de neuf lancers.

Pour la première série, on obtient une moyenne expérimentale de 4,462 et un écart-type de 1,513, résultats très voisins de ceux



Nb faces	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
effectifs	7	17	69	170	234	263	153	69	17	1
effectifs	4	23	69	169	235	255	155	66	15	3
effectifs	3	16	78	145	243	266	170	66	11	2
effectifs	3	14	88	180	246	231	162	59	16	1

obtenus « théoriquement ». Les intervalles $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma] = [2{,}949 ; 5{,}975]$ et $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma] = [1{,}436 ; 7{,}488]$ n'ont pas de réalité expérimentale [1] mais vont permettre cependant de vérifier que les résultats expérimentaux sont compatibles avec les calculs théoriques, ce qui est une façon de valider le modèle théorique.

En pratiquant une interpolation linéaire, on trouve pour l'intervalle $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$: 82 % de la population et 97,2 % pour l'intervalle : $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$.

1 Le fait d'avoir des valeurs non entières a quelque peu troublé les élèves. Pour déterminer les pourcentages de la population dans ces deux intervalles, après discussion avec la classe, le choix a été de faire un interpolation linéaire.

En faisant des calculs analogues avec les résultats obtenus par d'autres expériences ou simulations correspondant au même modèle mathématique, on constate que l'on obtient des résultats compatibles avec ceux des données théoriques.

On peut alors se servir de l'expérience de jets successifs de pièces comme d'une *situation de référence* pour traiter des questions relatives à la normalité de résultats.

Reprenons :

Si après avoir jeté neuf fois une pièce de monnaie, on obtient quatre « Face » et cinq « Pile », c'est un résultat que « naturellement » on peut qualifier de normal. La moyenne du nombre de faces est 4,5 et 4 est un résultat « intuitivement » proche (ici) de 4,5.

En revanche, nous avions plus de mal pour statuer sur des résultats comme « zéro Face, neuf Piles », « une Face, huit Piles » ou encore « deux Faces, sept Piles ».

Il est clair que l'on peut effectivement obtenir de tels résultats en lançant neuf fois une pièce, même si celle-ci est parfaitement équilibrée. De façon déterministe, on ne peut dire d'un tel résultat qu'il n'est pas normal ! Cependant, il se peut aussi, que la pièce ne soit pas équilibrée ou encore que celui qui la lance ait un truc pour favoriser l'obtention de pile. Il y a ainsi une alternative et en toute rigueur on ne peut trancher. Les statisticiens proposent quant à eux de trancher, mais en prenant un « risque mesuré ». Classiquement dans de nombreuses situations, on fait le choix de considérer comme « normal » tout résultat se trouvant à (au plus) deux écarts-types de la moyenne : dans l'expérience de référence, on a ainsi 96 % des résultats que l'on considérera comme « normaux » et 4 % des résultats « anormaux ». Si donc l'expérience de jet de pièces est faite avec une pièce équilibrée et sans trucage, on est conduit à considérer comme hors-norme (à plus de deux écarts-types), 4 % des résultats que l'on peut effectivement obtenir ainsi et soupçonner « à tort » qu'ils puissent être la conséquence d'une manipulation de l'expérience.

Lors des simulations, l'obtention de 9 Faces était saluée comme un événement remarquable, mais ne faisait pas remettre en doute la validité de la simulation. Le fait que la bille tombe 9 fois de suite à droite semblait tout à fait possible et naturel puisque, à chaque étape, un nouveau choix se faisait, indépendamment du précédent.

Ainsi, nous semble-t-il, nous pouvons mettre en lumière ce commentaire des auteurs du programme « *On sera attentif à la formulation des conclusions : la normalité évoquée ici est une normalité statistique et il y a une chance sur vingt pour qu'un individu « normal » choisi au hasard, soit en dehors de la plage de normalité…* »

Nous abordons, avec la notion de normalité, une façon de procéder spécifique aux statistiques (comme champ mathématique) : la prise de décision avec risque mesuré [2].

IV – Application aux courbes de croissance.

Nous pouvons, à partir de ce qui a été écrit précédemment, et en conformité avec la lettre

2 Ce qui est présenté est formalisé par les statisticiens avec la notion de test et d'erreur de première espèce : notions qu'il est exclu de présenter en classe de 1ère L, nous serions hors-programme.

du programme, travailler la « normalité » avec les courbes de croissance.

On peut, à ce propos, sans trop de difficulté évoquer que les distributions de caractère comme la taille d'individus d'une population homogène, suivent des modèles mathématiques un peu plus compliqués que celui obtenu avec la planche de Galton, mais ayant « une représentation graphique » comportant une forme de « courbe en cloche ». Il en est ainsi dès lors que les valeurs d'un caractère (dans une population homogène) varient sous l'influence de multiples facteurs plus ou moins indépendants : c'est le cas pour la taille.

La courbe théorique est une courbe dite de Gauss : elle a l'allure d'une courbe en cloche, symétrique autour de la valeur moyenne qui correspond aussi au mode de la distribution.

Pour une telle distribution, on peut alors énoncer que, si l'on connaît μ et s, la moyenne et l'écart-type, on a :

— 68 % de la population dans l'intervalle : $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$

— 95 % de la population dans l'intervalle : $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$

— 99 % de la population dans l'intervalle : $[\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]$

Il est alors convenu, et c'est ce qui sert à l'élaboration des planches des « courbes de croissance », d'appeler plage de normalité l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$, laquelle contient 95 % de la population.

Lorsqu'on place sa taille dans le graphe :

• Soit on est dans la plage de normalité : on ne se fait pas remarquer par sa taille parmi les autres,

• Soit on est en dehors de cette plage : on est « anormal », on se distingue de la majorité des individus de la population, mais on ne peut pas nécessairement en conclure qu'il y a une cause « médicale », c'est possible, mais c'est peut-être aussi le fruit d'un hasard.

On peut insister aussi sur le fait qu'il convient d'établir de telles « plages de normalité » relativement à une population homogène. C'est ainsi que si dans les premiers carnets de santé, garçons et filles étaient confondus (voir courbes de croissance en annexe), il n'en est plus de même aujourd'hui : on sépare « garçons » et « filles » de façon à avoir deux populations « homogènes ».

V Conclusion :

Comme nous l'annoncions en introduction, nous pensons que la planche de Galton, telle que nous avons pu l'exploiter de façon effective dans une classe de 1ère L, fournit une expérience aléatoire de référence, qui présente les avantages suivants :

- On peut avec un dispositif informatique, que l'on peut élaborer avec Excel, simuler un grand nombre de fois le jet de billes, ce qui permet ainsi de produire des distributions empiriques.
- On peut, avec un petit artifice calculatoire (un nombre de billes adéquat au départ) « idéaliser » la situation et sans outillage probabiliste, établir une distribution théorique. On peut par confrontation avec les données empiriques « valider » un tel modèle théorique.

- On peut, enfin, poser le problème de la normalité, montrer comment on peut prendre en compte le rôle effectif du hasard dans la résolution de celui-ci. On peut, conformément aux commentaires des auteurs du programme de 1ère L, définir une plage de normalité, à l'aide de la moyenne et de l'écart-type et surtout montrer qu'en faisant cela, on prend un risque raisonné car mesuré, qui conduit à exclure de cette plage des individus « normaux ». Paradoxe que nous avons, du moins nous le pensons, tenté d'éclaircir avec une planche de Galton informatisée, ce qui permet d'éclairer les usages effectifs dans la vie courante (dans les carnets de santé, en médecine, en météo…) du terme de normalité.

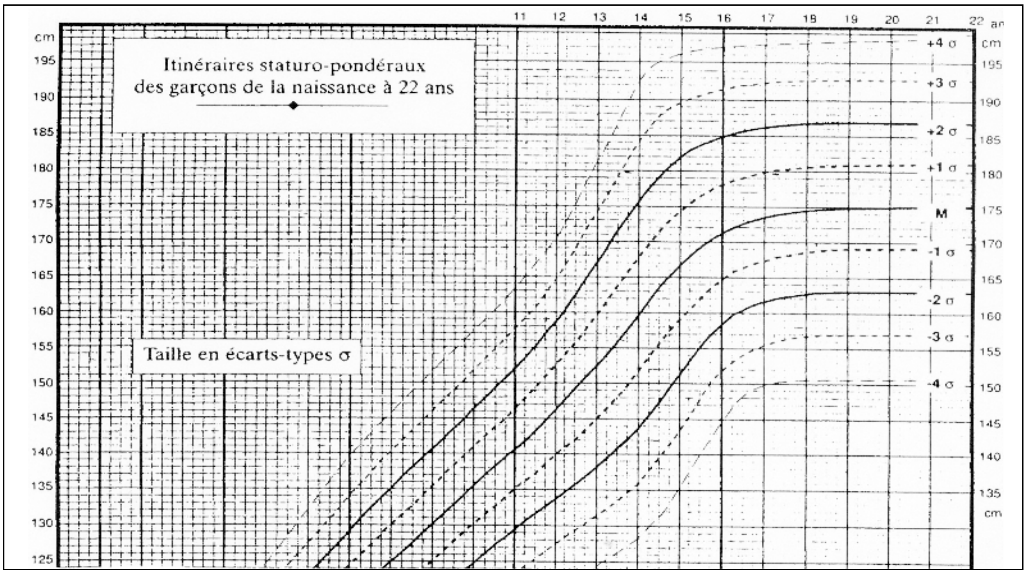
On amène ainsi les élèves au seuil, que l'on ne franchit pas de la notion de test et en revanche nous contribuons, pensons-nous, à former des citoyens éclairés par les apports de notre discipline et ses usages.

Bibliographie :

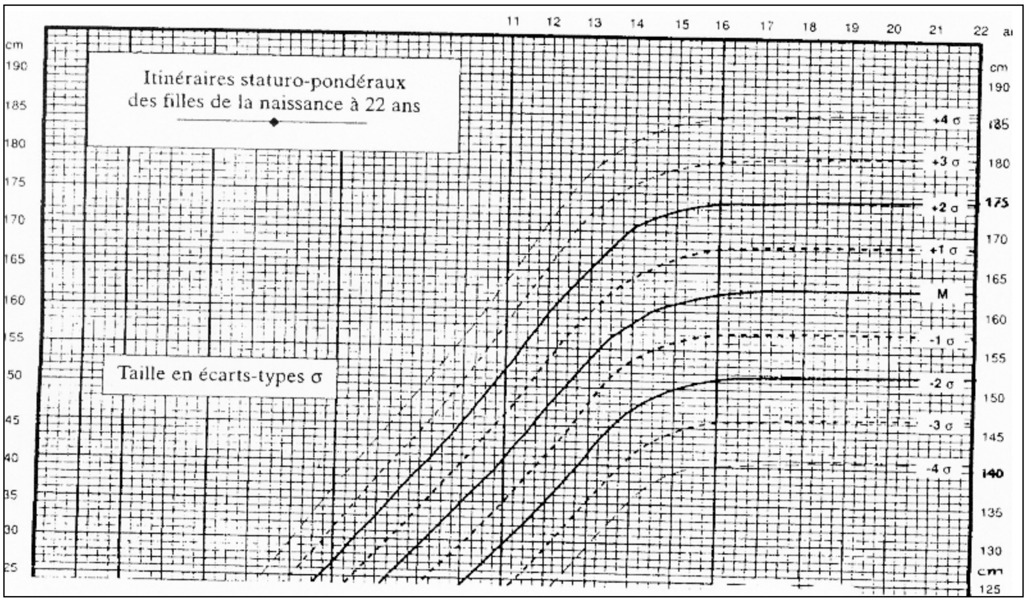
Groupe Inter-Irem « lycées techniques » (1998) Simulation d'expériences aléatoires Ed Irem de Paris Nord.

Ministère de l'Education nationale (2001) *Accompagnement des programmes : mathématiques, classes de premières des séries générales* CNDP

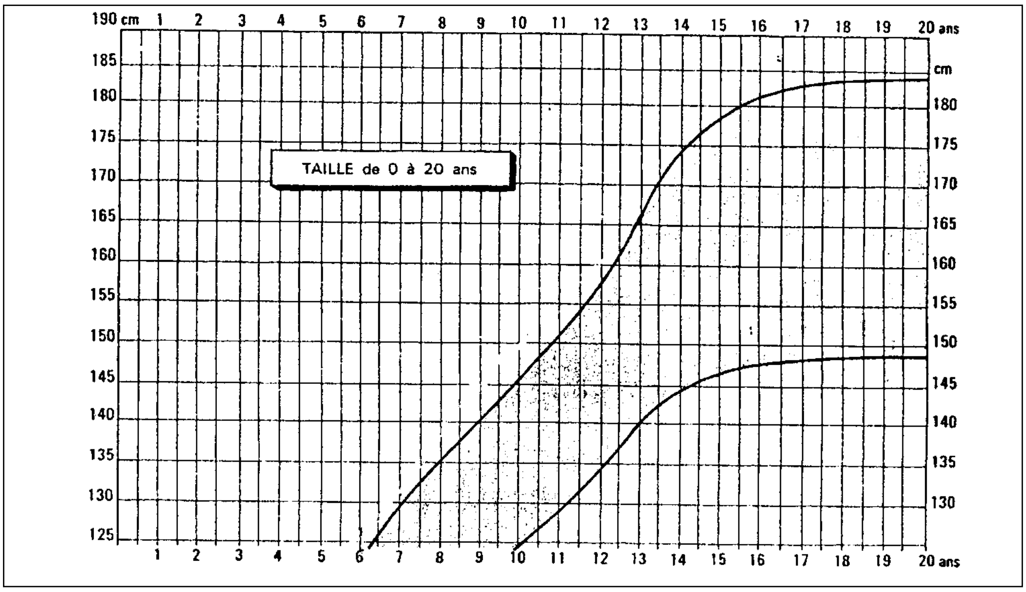
ANNEXE : Courbes de croissance



Garçons. 1995



Filles. 1995



1965

Courbes issues des Carnets de Santé.
Pr.M.Sempé